



Title	CEF型前進波増幅装置の空間電荷効果
Author(s)	桜庭, 一郎; Sakuraba, Ichiro; 小柳, 幸次郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 47, 43-55
Issue Date	1968-03-26
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40859
Type	departmental bulletin paper
File Information	47_43-56.pdf



CEF 型前進波増幅装置の空間電荷効果

桜庭 一郎*

小柳 幸次郎*

(昭和42年12月7日受理)

The Effect of Space Charge on Gain Characteristics of CEF-Type Forward-Wave Amplifiers

Ichiro SAKURABA

Kojiro KOYANAGI

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan.

(Received December 7, 1967)

Abstract

This paper deals with the effect of space charge on the gain characteristics of CEF-type forward-wave amplifiers in a special case where

$$d=0, \quad b=0, \quad \beta_e \approx 20, \quad C \approx 0.05, \quad a=0, \quad \text{and } 0 \geq Q \geq -3.$$

The small-signal forward-wave gain was yielded by

$$\text{Gain (db)} \approx 10 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^2 \left(\cosh \cdot \sqrt{\frac{\beta_e C}{2(2-Q)}} \phi - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \cos \frac{\sqrt{2-Q}}{\beta_e C} \phi \right) \right]^2$$

The first term is due to the growing and decreasing waves in the beam-circuit system and the second term is due to the characteristic ripple in the CEF-type focusing system. A plot of gain in db versus the electrical angle with the parameter Q shows that in the small Q region the second term is negligible and in the large Q region there is a spatial beating pattern.

目 次

Abstract	43
1. 緒 言	44
2. 電子方程式	44
3. 前進波回路方程式	47
4. 特性方程式	48
5. 小信号利得に対する空間電荷の影響	50
6. 結 言	54
参 考 文 献	55

* 電子工学科電子管工学講座

1. 緒 言

CEF 型前進波増幅装置 (Fig. 1 参照) のような beam-circuit systems に存在する波動を決定する特性方程式は、かなり複雑なため分散特性を広く考察することが非常に困難である。現在当講座において CEF 型集束系を用いたマイクロ波電子装置の基礎的実験を進めつつあるが、その動作解析中幸いにも空間電荷の影響を含めた前進波小信号利得の近似式を得たので報告する^{1)~13)}。

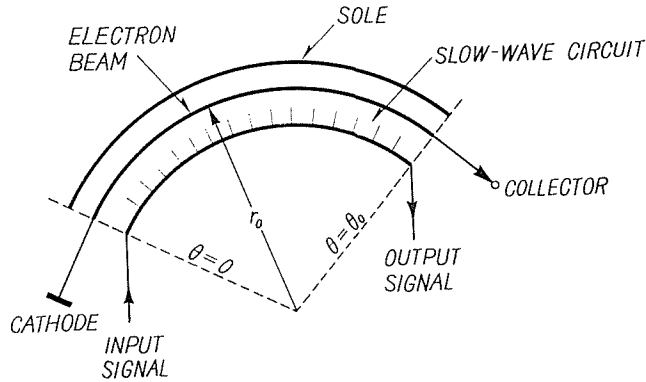


Fig. 1. Model for analysis of CEF-type forward-wave amplifiers.

2. 電子方程式

CEF 型前進波増幅装置の電子方程式は、Brillouin-flow Eulerian-fluid を形成する一個の電子の運動方程式と連続方程式より求められる。単一粒子の運動方程式は、

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\eta[E_r + E_{r,s} + E(r)], \quad (1)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\eta(E_\theta + E_{\theta,s}). \quad (2)$$

ここで E_r と E_θ は遅波回路の高周波電界の半径方向成分および θ 方向成分、 $E(r)$ は半径 r における電子の遠心力と平衡する半径方向の静電界である。また $E_{r,s}$ と $E_{\theta,s}$ は集束電子ビームによる高周波電界の半径方向成分と θ 方向成分である。いま電子ビームの半径方向厚さ σ は、電子の平衡半径 r_0 に比べてきわめて小さく、半径 r と角速度 $\dot{\theta}$ は小信号理論により次のように定義する。

$$r = r_0 + r_1, \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \Omega_0 + \Omega_1. \quad (4)$$

ここで添字 1 は高周波成分を示し、 Ω_0 は平衡角速度である。式(3)と(4)を式(1)と(2)へ代入すれば

$$\begin{aligned}
& (\Omega_0 + \Omega_1) \left[(\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta \cdot \partial t} \right] \\
& + \left[\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial^2 r_1}{\partial \theta \cdot \partial t} \right] \\
& - (r_0 + r_1) (\Omega_0 + \Omega_1)^2 = -\eta [E_r + E_{rs} + E(r_0 + r_1)], \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\Omega_0 + \Omega_1) \left[(\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{\partial r_1}{\partial t} \right] + (r_0 + r_1) \left[(\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \right] \\
& = -\eta [E_\theta + E_{\theta s}]. \tag{6}
\end{aligned}$$

となる。つぎに $E(r_0 + r_1)$ は一個の電子の平衡条件より求められ、

$$E(r_0 + r_1) = \frac{(\Omega_0 r_0)^2}{\eta(r_0 + r_1)}. \tag{7}$$

となる。また集群電子ビームによる高周波電界 E_{rs} と $E_{\theta s}$ は次式で与えられる⁶⁾。

$$E_{rs} \approx \frac{\tau_1}{\varepsilon_0 h}, \tag{8}$$

$$E_{\theta s} \approx \frac{j \tau_1}{\beta \varepsilon_0 h} \left[\frac{(r_0 + r_1)}{\sigma} - 1 \right]. \tag{9}$$

ここで τ_1 は半径 r_0 の円周上に全電荷が集中していると仮定した等価集群電子ビームの電荷線密度の高周波成分である。 h は電子ビームの z 方向の長さであり、 σ は半径方向厚さである。ここで高周波量は θ と t に関し

$$e^{j(\omega t - \beta \theta)}$$

で変化すると仮定された。 β は角方向位相定数である。

$$\begin{aligned}
& r_1 [\Omega_0 + \Omega_1] (\beta \omega - \Omega_0 \beta^2 - 2\Omega_1 \beta^2) + \omega (\Omega_0 \beta - \omega + 2\Omega_1 \beta) - 2\Omega_0 (\Omega_0 + \Omega_1) - \Omega_1^2 \\
& - \Omega_1 r_0 (2\Omega_0 + \Omega_1) + \tau_1 \left(\frac{\eta}{\varepsilon_0 h} \right) = -\eta E_r, \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2r_1 (\Omega_0 + \Omega_1) [\omega - \beta (\Omega_0 + \Omega_1)] + \Omega_1 (r_0 + r_1) [\omega - \beta (\Omega_0 + \Omega_1)] \\
& + \tau_1 \left[\frac{\eta}{\beta \varepsilon_0 h} \left(\frac{r_0 + r_1}{\sigma} - 1 \right) \right] = j\eta E_\theta. \tag{11}
\end{aligned}$$

なお計算で $r_1/r_0 \ll 1$ と仮定された。

θ 方向電流 I_θ は

$$I_\theta = (\tau_0 + \tau_1) (r_0 + r_1) (\Omega_0 + \Omega_1) = -I_0 + i_\theta, \tag{12}$$

$$-I_0 = \Omega_0 r_0 \tau_0,$$

$$i_\theta = \Omega_0 \tau_0 r_1 + r_0 \tau_0 \Omega_1 + \Omega_0 r_0 \tau_1 + \tau_0 r_1 \Omega_1 + \Omega_0 r_1 \tau_1 + r_0 \Omega_1 \tau_1 + r_1 \Omega_1 \tau_1. \tag{13}$$

で与えられ、 r 方向電流 i_r は

$$\begin{aligned}
i_r & = (\tau_0 + \tau_1) \frac{d}{dt} (r_0 + r_1) = (\tau_0 + \tau_1) \left[(\Omega_0 + \Omega_1) \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \frac{\partial r_1}{\partial t} \right] \\
& = j r_1 (\omega \tau_0 - \beta \Omega_0 \tau_0 - \beta \tau_0 \Omega_1 + \omega \tau_1 - \beta \Omega_0 \tau_1 - \beta \Omega_1 \tau_1). \tag{14}
\end{aligned}$$

となる。連続方程式は

$$\nabla \cdot (\bar{l}_r i_r + \bar{l}_\theta I_\theta) = - \frac{\partial}{\partial t} (\tau_0 + \tau_1). \quad (15)$$

で示され、 \bar{l}_r 、 \bar{l}_θ はそれぞれ r 方向と θ 方向の単位ベクトル量である。ここで τ_0 は等価集群電子ビームの電荷線密度の直流分である。体積密度の直流分および高周波分を ρ_0 と ρ_1 とおけば、 $\tau_0 = \rho_0 h \sigma$ および $\tau_1 = \rho_1 h \sigma$ の関係がある。式 (15) を円筒座標系で示すと、

$$\frac{i_r}{r_0 + r_1} + \frac{\partial i_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r_0 + r_1} \right) \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} = - \frac{\partial \tau_1}{\partial t}. \quad (16)$$

Eulerian-fluid の仮定および式 (13) と (14) とを式 (15) に代入すれば

$$\begin{aligned} & \frac{r_1}{r_0 + r_1} \left[\tau_0 (\omega - \beta \Omega_0) + \tau_1 (\omega - \beta \Omega_0) - \beta \tau_0 \Omega_1 - \beta \Omega_1 \tau_1 \right] \\ & - \frac{\beta}{r_0 + r_1} \left[\tau_0 r_1 (\Omega_0 + \Omega_1) + \tau_0 r_0 \Omega_1 + \Omega_0 \tau_1 (r_0 + r_1) + r_0 \Omega_1 \tau_1 + r_1 \Omega_1 \tau_1 \right] \\ & = - \omega \tau_1. \end{aligned} \quad (17)$$

さてきわめて薄いリボン状電子ビームを用い、単一走行小信号理論を仮定すれば、運動方程式 (10) と (11) および連続方程式 (17) はつぎのように簡単となる。

$$r_1 \Omega_0^2 \left[(\beta_e - \beta)^2 + 2 \right] + \Omega_1 (2 \Omega_0 r_0) + \tau_1 \left(\frac{-\gamma}{\epsilon_0 h} \right) = \gamma E_r, \quad (18)$$

$$2 r_1 \Omega_0^2 (\beta_e - \beta) + \Omega_0 \Omega_1 r_0 (\beta_e - \beta) + \tau_1 \left[\frac{\gamma}{\beta \epsilon_0 h} \left(\frac{r_0}{\sigma} - 1 \right) \right] = j \gamma E_\theta, \quad (19)$$

$$r_1 (\beta_e - 2\beta) + \Omega_1 \left(\frac{-\beta r_0}{\Omega_0} \right) + \tau_1 \left[\frac{r_0 (\beta_e - \beta)}{\tau_0} \right] = 0. \quad (20)$$

ここで

$$\beta_e = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \text{electrical radian/spatial radian} \quad (21)$$

で与えられ電子ビームの角方向等価位相定数である。したがって高周波量 r_1 、 Ω_1 および τ_1 は

$$r_1 = \frac{\gamma \Omega_0 r_0^2}{\tau_0 \mathcal{A}_S} \left[E_r \left((\beta_e - \beta)^2 + Q(1-a) \right) + j E_\theta (Q a \beta - 2(\beta_e - \beta)) \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \frac{\gamma \Omega_0^2 r_0}{\tau_0 \mathcal{A}_S} & \left[E_r \left(\frac{Q}{\beta} (1-a) (\beta_e - 2\beta) - 2(\beta_e - \beta)^2 \right) \right. \\ & \left. + j E_\theta \left\{ (\beta_e - \beta) \left((\beta_e - \beta)^2 + 2 \right) + Q a (\beta_e - 2\beta) \right\} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma \Omega_0 r_0}{\mathcal{A}_S} \left[-E_r \beta_e (\beta_e - \beta) + j E_\theta (\beta_e - \beta) (\beta (\beta_e - \beta) + 2) \right]. \quad (24)$$

となり、 \mathcal{A}_S は

$$\mathcal{A}_S = \frac{\Omega_0^3 r_0^2}{\tau_0} (\beta_e - \beta) \left[(\beta_e - \beta)^3 + (\beta_e - \beta) (Q(1-a) - 2) + \frac{2Q}{\beta} (1-a) + Q a \beta_e \right], \quad (25)$$

で与えられる。ここで Q は Nunn-Rowe の空間電荷係数、 a はリボン幅係数であり次式で示される^{3),6)}。

$$Q = \frac{\eta \tau_0}{\Omega_0^2 \epsilon_0 h \sigma} \approx -\beta_e^2, \quad (26)$$

$$a = \frac{\sigma}{r_0}. \quad (27)$$

さらに小信号理論における i_θ と i_r は,

$$i_\theta = \Omega_0 \tau_0 r_1 + r_0 \tau_0 \Omega_1 + \Omega_0 r_0 \tau_1, \quad (28)$$

$$i_r = j \tau_0 \Omega_0 r_1 (\beta_e - \beta). \quad (29)$$

となるから、式 (22), (23), (24) および (25) を用いて書きかえると

$$i_\theta = \frac{\eta \tau_0}{\Omega_0} \left[\frac{E_r \left(\frac{Q}{\beta} (1-a) - (2\beta_e - \beta) \right) + j E_\theta (\beta_e (\beta_e - \beta) + 2 + Qa)}{(\beta_e - \beta)^3 + (\beta_e - \beta) (Q(1-a) - 2) + \frac{2Q}{\beta} (1-a) + Qa \beta_e} \right], \quad (30)$$

$$i_r = \frac{j \eta \tau_0}{\Omega_0} \left[\frac{E_r ((\beta_e - \beta)^2 + Q(1-a)) + j E_\theta (Qa \beta - 2(\beta_e - \beta))}{(\beta_e - \beta)^3 + (\beta_e - \beta) (Q(1-a) - 2) + \frac{2Q}{\beta} (1-a) + Qa \beta_e} \right]. \quad (31)$$

また連続方程式 (16) より

$$\tau_1 = \left[-\frac{\beta}{\omega r_0} i_\theta + j \frac{i_r}{\omega r_0} \right]. \quad (32)$$

それ故式 (30) と (31) を使って書きかえると、

$$\tau_1 = \frac{\eta \tau_0}{\Omega_0^2 r_0} \left[\frac{-\beta_e E_r + j E_\theta (\beta (\beta_e - \beta) + 2)}{(\beta_e - \beta)^3 + (\beta_e - \beta) (Q(1-a) - 2) + \frac{2Q}{\beta} (1-a) + Qa \beta_e} \right]. \quad (33)$$

となる。この式が遅波回路の高周波電界 E_r および E_θ と集群電子ビームの電荷線密度の高周波成分 τ_1 との関係を与える電子方程式である。

3. 前進波回路方程式

CEF 型電子装置における遅波回路の回路方程式はつぎのように与えられる¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{0,0}}{Z_{0,1}} (v_{0,0} v_{0,1}) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \left(\frac{v_{0,0}}{r_c} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \left(1 + \frac{v_{0,0}}{v_{0,1}} \frac{Z_{0,0}}{Z_{0,1}} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ & = -(v_{0,0} Z_{0,1}) \frac{\partial^2 (k_r \tau_1)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで V は biperiodic structures の高周波電圧で z , θ および t の関数、 k_c はリボン状電子ビームと回路との結合係数、 $v_{0,0}$ は遅波回路の表面における位相速度の接線成分、 $v_{0,1}$ は遅波回路の表面における位相速度の軸方向成分、 $Z_{0,0}$ は遅波回路表面における回路 impedance の θ 成分、さらに $Z_{0,1}$ は遅波回路表面の回路 impedance の z 成分である。いま E_r と E_θ との関係

$$E_r = j E_\theta (f_r + j g_r), \quad (35)$$

で表示する。一般的な CEF 型装置の遅波回路では $f_r \cong -1.0$, $g_r \cong 0$ である。また電子ビームの中心半径 r_0 における E_θ と高周波電圧 V とは

$$E_\theta = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (k_r V) = j\beta k_e \frac{V}{r_0}, \quad (36)$$

で与えられ、 r_0 における実用的な相互作用 impedance K は、つぎのように定義されている。

$$K = \left| \frac{k_e^2 r_e Z_{0,0}}{r_0} \right|. \quad (37)$$

さらに高周波量が $e^{j(\omega t - \beta \theta - \tau z)}$ のように変化するとして

$$v_{0,0} = \omega r_e / \beta_0, \quad v_{0,1} = \omega / \tilde{\gamma}. \quad (38)$$

$$\omega = \beta_e \Omega_0. \quad (39)$$

を用いれば、前進波の回路方程式は

$$E_\theta = + \frac{j\beta\beta_0\omega K}{\beta_0^2 - \beta^2} \tau_1. \quad (40)$$

となる。

4. 特性方程式

電荷線密度の高周波成分 τ_1 を与える電子方程式 (33) と回路方程式 (40) より、

$$V = \left(\frac{-\gamma \tau_0 K}{\Omega_0 r_0} \right) \left(\frac{\beta\beta_0\beta_e V}{\beta_0^2 - \beta^2} \right) \left[\frac{\beta(\beta_e - \beta) + 2 - \beta\beta_e(f_r + jg_r)}{\beta(\beta_e - \beta)^3 + \beta(\beta_e - \beta)(Q(1-a) - 2) + Q(2 + a(\beta\beta_e - 2))} \right]. \quad (41)$$

いま利得係数 C を

$$C^3 \equiv \frac{-\gamma \tau_0 K}{\Omega_0 r_0} = \frac{K I_0}{2V_0}, \quad (42)$$

で定義すれば、特性方程式は

$$\frac{C^3 \beta^2 \beta_0 \beta_e}{(\beta_0^2 - \beta^2)} \left[\frac{(\beta(\beta_e - \beta) + 2) - \beta_e(f_r + jg_r)}{\beta(\beta_e - \beta)^3 + \beta(\beta_e - \beta)(Q(1-a) - 2) + Q(2 + a(\beta\beta_e - 2))} \right] = 1. \quad (43)$$

となる。いま電子ビームが存在するときの角方向位相定数を β , cold な位相定数を β_0 とし小信号の仮定によって特性方程式を考察する。いま無損失回路で完全同期の場合を考えて、 β と β_0 をつぎのようにおく。

$$\beta = \beta_e(1 + jC\hat{d}), \quad \beta_0 = \beta_e. \quad (44)$$

ここで

$$\hat{d} = x + jy, \quad (45)$$

であり、相互作用のための角方向位相定数の変化分を与える。したがって

$$e^{-j\beta\theta} = e^{-j\beta_e\theta(1 + Cy)} \cdot e^{\beta_e C \eta x}. \quad (46)$$

とおけるから、 x が正なら上式右辺第二項は 1 より大きくなり、空間角 θ に対して指数的に増

大する波を示し、 x が負ならこの項は1より小さく θ に関して指数的に減少する。また x が零であれば一定振幅波となる。同式の右辺の第一項は位相を示し y に関係する。いま x を零とし、高周波界の hot な角速度を Ω_{W1} とすれば、

$$\beta = \frac{\omega}{\Omega_{W1}}. \quad (47)$$

となるから、

$$\Omega_{W1} = \Omega_0(1 + Cy), \quad (48)$$

を得る。ここで $Cy \ll 1$ を仮定した。したがって、 $y > 0$ なら高周波界角速度は電子ビームのそれより大きく、 $y < 0$ なら電子ビーム角速度が大きくなり、また $y = 0$ は両者が同期していることを知る。式(44)を用いて式(43)を書きかえると、

$$\begin{aligned} & \delta^6(\beta_e^4 C^6) + \delta^5(-j3\beta_e^4 C^5) + \delta^4[-\beta_e^4 C^4 + \beta_e^2 C^4(2(1-\beta_e^2) - Q(1-a))] \\ & + j\delta^3[3\beta_e^4 C^6 + \beta_e^2 C^3(Q(3-4a) - 6)] \\ & + \delta^2[\beta_e^2 C^5(\beta_e(3\beta_e - 1) - 2) + C^2(\beta_e^2(Q(2-5a) - 4) - 2Q(1-a))] \\ & + j\delta[-\beta_e^2 C^4(\beta_e(\beta_e - 2) - 4) + 2QC(2(1-a) + a\beta_e^2)] + C^3\beta_e^2(2 + \beta_e) = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

となる。いま実用上必要であり、相互作用の特質を明らかにするため、

$$\beta_e \approx 20, \quad C \approx 0.05, \quad a = 0.02. \quad (50)$$

の場合を考え、さらに Q の絶対値が20以下として式(49)を近似すれば、

$$\begin{aligned} & \delta^6(\beta_e^4 C^6) + \delta^5(-j3\beta_e^4 C^5) + \delta^4(-2\beta_e^4 C^4) + j\delta^3 3\beta_e^2 C^3(Q-2) + \delta^2 2\beta_e^2 C^2(Q-2) \\ & + j\delta[-\beta_e^2 C^4 + 2QC(2+a\beta_e^2)] + C^3\beta_e^2 \approx 0. \end{aligned} \quad (51)$$

となる。

さて CEF 型電子ビームの近軌軌道方程式の解によれば^{8),10),11)}, $0 \geq Q > -2$ のとき rippling の幅は陽極孔の幅 T_a をこえることはない。 $Q = -2$ のとき ripple がなくなり、 $Q < -2$ となれば幅 T_a をこえるに至り、 Q の絶対値の増加とともに増す。すなわち $|Q| < 2$ のときは、電子ビームはそんなにひろがらず、 $|Q| = 2$ のとき空間電荷界と集束電極の電界による力および

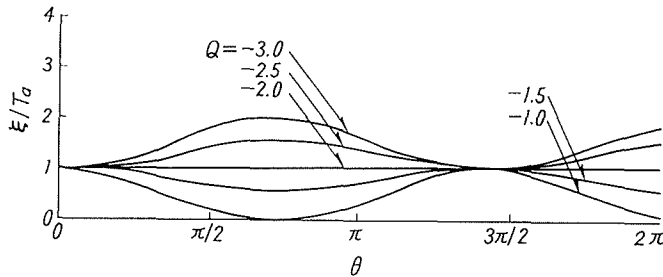


Fig. 2. Sketch showing paths of edge-of-the-beam electrons for various values of Q , where T_a is the width of a slit, ξ is the separation between the optical-axis electron and the edge-of-the-beam electron and θ is the spatial angle.

遠心力とが平衡して円軌道となる。 $|Q| > 2$ では空間電荷によりひろがる傾向をもつ (Fig. 2 参照)。したがって増幅装置の perveance の決定にあたり、 $|Q|$ の値を 2 程度にとることがのぞましい。また小さい $|Q|$ の範囲に、角方向位相定数の変化分の実部が存在すると予想されるから⁴⁾、 $|Q| \leq 3$ の領域で式 (51) を考察しよう。その場合 δ の近似解は、

$$\delta_{1,2} \approx \pm \sqrt{\frac{\beta_e C}{2(2-Q)}} - j \frac{\beta_e^4 C^3 - 2Q(2+a\beta_e^2)}{4\beta_e^2 C(2-Q)}, \quad (52)$$

$$\delta_{3,4} \approx \pm j \left(\frac{\sqrt{2-Q}}{\beta_e C} \pm \frac{\beta_e^4 C^3 - 2Q(2+a\beta_e^2)}{4\beta_e^2 C(2-Q)} \right), \quad (53)$$

$$\delta_5 = \frac{j}{C}, \quad (54)$$

$$\delta_6 \approx j \frac{2}{C}. \quad (55)$$

となる。増大波 δ_1 と減衰波 δ_2 の実部の絶対値は等しく、符号反対であり両者の位相速度はともに等しい。第三の波 δ_3 は Ω_0 より大きい位相速度をもち第四の波 δ_4 は Ω_0 より小さい位相速度をもち、振幅はともに一定である。第五の波 δ_5 は θ 方向速度成分をもたない。第六の波は反対方向に進む波を示す。したがって、はじめの四波を調べると相互作用の特性を知り得る (Fig. 3 参照)。

これらの波のうち δ_3 と δ_4 の両波は、CEF 型集束系に固有な ripple を含んだ空間電荷波を示すと考えられ、相互作用への影響はきわめて少ない (いま与えられた動作条件のもとで)。また $Q=0$ のとき、 $\delta_{1,2}$ と $\delta_{3,4}$ の近似式は、既に求めた表現式といくぶん異なるが^{2),4)}、数値的にはほぼ一致する。さらに式 (52) と (53) を数値計算結果と比較してみたが、かなりよい近似を得ており、これらの議論は別の機会に発表する予定である^{12),13)}。

5. 小信号利得に対する空間電荷の影響

四つの波の入力端における境界条件は、

$$\sum_{n=1}^4 V_n = V_{R0}, \quad (56)$$

$$\sum_{n=1}^4 i_{\theta n} = 0, \quad (57)$$

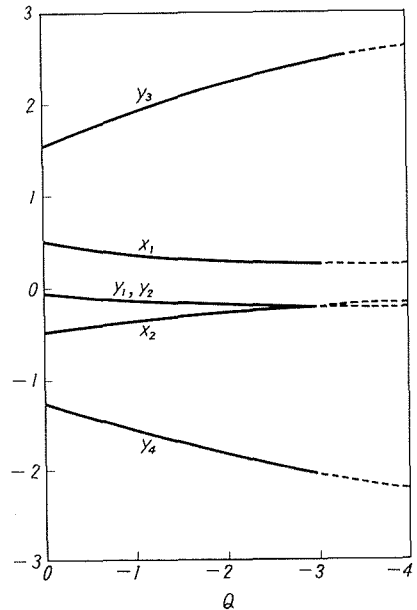


Fig. 3. The four waves of a CEF-type forward-wave amplifier vary with angle as $\exp(-j\beta_e + j\beta_e C y + \beta_e C x)\theta$. Here x 's and y 's for the four waves are shown vs the space charge parameter Q for the special case of zero loss and an electron velocity is equal to the circuit phase velocity. It was assumed that $\beta_e \approx 20$ and $C \approx 0.05$.

$$\sum_{n=1}^4 i_{rn} = 0, \quad (58)$$

$$\sum_{n=1}^4 \Omega_n = 0. \quad (59)$$

となる。ここで V_{r0} は $\theta=0$ における遅波回路への入力信号、 V_n は $\theta=0$ における第 n 波の高周波電圧、 $i_{\theta n}$ は $\theta=0$ 、 $r=r_0$ における第 n 波の θ 方向電流、 i_{rn} は $\theta=0$ 、 $r=r_0$ における第 n 波の r 方向電流、 Ω_n は $\theta=0$ 、 $r=r_0$ における第 n 波の角速度の高周波成分である。すなわち入力信号が四つの波の和に等しく、相互作用域の入口で零集団で零速度変調の場合を考察している。上式を matrix-form にすれば、

$$\begin{pmatrix} V_{r0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ C_{\theta 1} & C_{\theta 2} & C_{\theta 3} & C_{\theta 4} \\ C_{r1} & C_{r2} & C_{r3} & C_{r4} \\ C_{\Omega 1} & C_{\Omega 2} & C_{\Omega 3} & C_{\Omega 4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} \quad (60)$$

ここで係数 $C_{\theta n}$ 、 C_{rn} および $C_{\Omega n}$ は次式で与えられる。

$$C_{\theta n} = \frac{-(Q(1-a) - \beta_e^2(1+C^2\delta_n^2)) + \beta_e((1-C^2\delta_n^2)(2+aQ) + 2(\beta_e C \delta_n)^2) + j[-C\delta_n(Q(1-a) - \beta_e^2(1+C^2\delta_n^2)) + \beta_e C \delta_n(2(2+aQ) - \beta_e^2(1-C^2\delta_n^2))]}{(\beta_e C \delta_n)^2(Q(1-a) - 2 - (\beta_e C \delta_n)^2) + Q(2(1-a) + a\beta_e^2) + j\beta_e^2 C \delta_n((\beta_e C \delta_n)^2 + 2 - Q(1-2a))}, \quad (61)$$

$$C_{rn} = \frac{-(1-C^2\delta_n^2)(Q(1-a) - (\beta_e C \delta_n)^2) + Qa\beta_e(1-3C^2\delta_n^2) - 4\beta_e C^2\delta_n^2 + j[-2C\delta_n(Q(1-a) - (\beta_e C \delta_n)^2) + \beta_e C \delta_n(2(1-C^2\delta_n^2) + Qa(3-C^2\delta_n^2))]}{(\beta_e C \delta_n)^2(Q(1-a) - 2 - (\beta_e C \delta_n)^2) + Q(2(1-a) + a\beta_e^2) + j\beta_e^2 C \delta_n((\beta_e C \delta_n)^2 + 2 - Q(1-2a))}, \quad (62)$$

$$C_{\Omega n} = \frac{Q(1-a)(1-2C^2\delta_n^2) + 2\beta_e C^2\delta_n^2(2 - (\beta_e C \delta_n)^2 - \beta_e(1-C^2\delta_n^2)) - Qa\beta_e(1-5C^2\delta_n^2) + j[Q(1-a)(3C\delta_n) - 4(\beta_e C \delta_n)^2 C \delta_n - \beta_e C \delta_n((2 - \beta_e^2 C^2\delta_n^2)(1-C^2\delta_n^2) + 2Qa(2-C^2\delta_n^2))]}{\beta_e(\beta_e C \delta_n)^2(2 + (\beta_e C \delta_n)^2 - Q(1-2a)) + j\beta_e C \delta_n[(\beta_e C \delta_n)^2(2 + (\beta_e C \delta_n)^2 - Q(1-a)) - Q(2(1-a) + a\beta_e^2)]}. \quad (63)$$

式(60)の C-matrix の inverse は

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{V_1}{V_{r0}}\right) \\ \left(\frac{V_2}{V_{r0}}\right) \\ \left(\frac{V_3}{V_{r0}}\right) \\ \left(\frac{V_4}{V_{r0}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \\ D_{41} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

となる。D-matrix は C-matrix の inverse な symbolic form であり、D-element は一般に、

$$D_{n1} = u_{n1} + jv_{n1}. \quad (65)$$

となる。

さて前述の動作条件 $\beta_e \approx 20$ と $C \approx 0.05$ および $0 \geq Q \geq -3$ のとき、 δ_n の近似解 (52) と (53) を用いて C -elements と D -elements を計算するとつぎのようになる。ここできわめて薄いリボン状電子ビームを使うとして、リボン幅係数 a を零と仮定した。

$$C_{\theta 1} \approx \frac{4Q - \beta_e^4 C^3}{2(2-Q)} - j \frac{2\beta_e^2 C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}}, \quad (66)$$

$$C_{\theta 2} \approx \frac{4Q - \beta_e^4 C^3}{2(2-Q)} + j \frac{2\beta_e^2 C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}}, \quad (67)$$

$$C_{\theta 3} \approx 2\beta_e(1 + \sqrt{2-Q}), \quad (68)$$

$$C_{\theta 4} \approx 2\beta_e(1 - \sqrt{2-Q}), \quad (69)$$

$$C_{r 1} \approx \frac{(4-Q)\beta_e^3 C^3}{2(2-Q)} - j \frac{\beta_e C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}} \left(\frac{\beta_e^3 C^3}{2-Q} - 2Q \right), \quad (70)$$

$$C_{r 2} \approx \frac{(4-Q)\beta_e^3 C^3}{2(2-Q)} + j \frac{\beta_e C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}} \left(\frac{\beta_e^3 C^3}{2-Q} - 2Q \right) \quad (71)$$

$$C_{r 3} \approx -4(1 + \sqrt{2-Q}), \quad (72)$$

$$C_{r 4} \approx -4(1 - \sqrt{2-Q}), \quad (73)$$

$$C_{\theta 1} \approx 2Q - \frac{\beta_e^3 C^3}{2-Q} - j \frac{2(2-Q)\beta_e C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}}, \quad (74)$$

$$C_{\theta 2} \approx 2Q - \frac{\beta_e^3 C^3}{2-Q} + j \frac{2(2-Q)\beta_e C \sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}}, \quad (75)$$

$$C_{\theta 3} \approx 2(4-Q) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2-Q}} \right), \quad (76)$$

$$C_{\theta 4} \approx 2(4-Q) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2-Q}} \right). \quad (77)$$

$$u_{11} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1}, \quad (78)$$

$$v_{11} \approx \frac{-\sqrt{2(Q-2)}}{4\beta_e^2 C(2-Q)\sqrt{\beta_e C}} \left(\frac{\beta_e^4 C^3}{2} + \frac{4Q}{2-Q} \right) \left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1}, \quad (79)$$

$$u_{21} = u_{11}, \quad (80)$$

$$v_{21} = -v_{11}, \quad (81)$$

$$u_{31} \approx \frac{-(1-\sqrt{2-Q})}{8(1-Q)(4-Q)\sqrt{2-Q}} \left[\beta_e^3 C^3 \left(2-Q + \frac{4(1-Q)}{2-Q} + \frac{2(4-Q)}{\sqrt{2-Q}} \right) - 4Q(2-Q) \right] \left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1}, \quad (82)$$

$$v_{31} \approx 0, \quad (83)$$

$$u_{41} \approx \frac{1 + \sqrt{2-Q}}{8(1-Q)(4-Q)\sqrt{2-Q}} \left[\beta_e^3 C^3 \left(2-Q + \frac{4(1-Q)}{2-Q} - \frac{2(4-Q)}{\sqrt{2-Q}} \right) - 4Q(2-Q) \right] \left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1}, \quad (84)$$

$$v_{41} \approx 0. \quad (85)$$

したがって前進波増幅装置の Q の影響を含めた小信号利得は、

$$\begin{aligned} \text{Gain (db)} &= 10 \log_{10} \left| \sum_{n=1}^4 e^{j\phi x_n} \left[u_{n1} \cos \phi y_n - v_{n1} \sin \phi y_n + j(v_{n1} \cos \phi y_n + u_{n1} \sin \phi y_n) \right] \right|^2 \\ &\approx 10 \log_{10} \left| \left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1} \left[\cosh \frac{\sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}} \phi - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \cos \frac{\sqrt{2-Q}}{\beta_e C} \phi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + j \frac{\beta_e^3 C^3 \left(6-Q - \frac{4(1-Q)}{2-Q} \right) + 4Q(2-Q)}{4(1-Q)(4-Q)\sqrt{2-Q}} \sin \frac{\sqrt{2-Q}}{\beta_e C} \phi \right] \right|^2 \\ &\approx 10 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \right)^{-1} \left(\cosh \frac{\sqrt{\beta_e C}}{\sqrt{2(2-Q)}} \phi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{Q(2-Q)}{(1-Q)(4-Q)} \cos \frac{\sqrt{2-Q}}{\beta_e C} \phi \right) \right]^2. \quad (86) \end{aligned}$$

となる。ここで空間角度 θ に対する電気角 ϕ は、

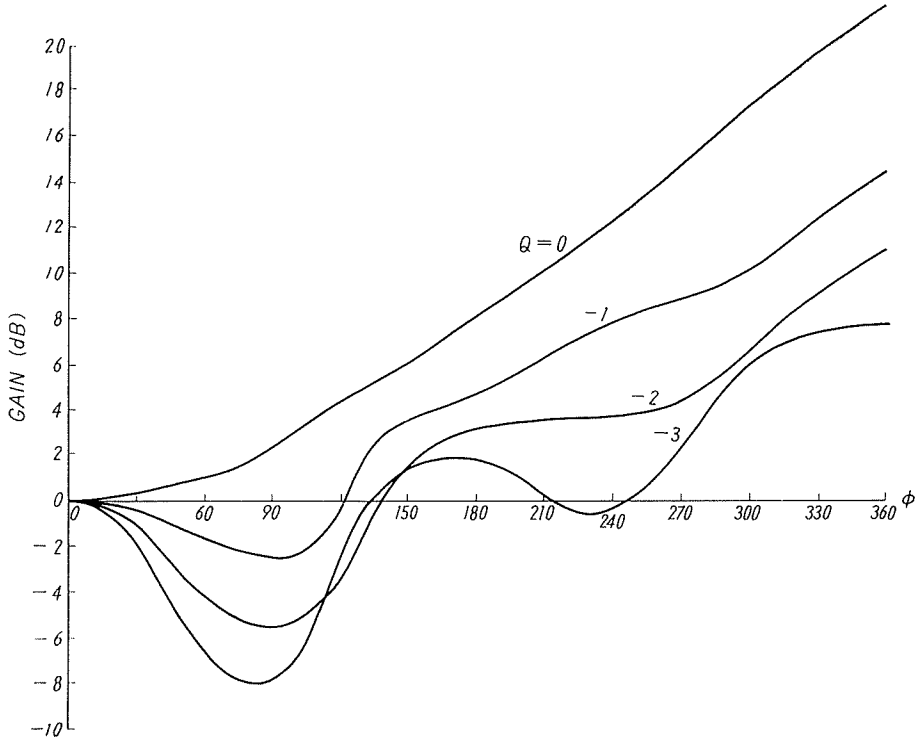


Fig. 4. The small-signal gain vs ϕ with Q as parameter in the case where $d=0$, $b=0$, $\beta_e \approx 20$, $C \approx 0.05$ and $a=0$.

$$\phi = \beta_e C \theta = 2\pi CN. \quad (87)$$

である。 N は相互作用域の空間角度 θ に対する wave angle の数である。式(86)は、無損失回路、完全同期、 $\beta_e \approx 20$, $C \approx 0.05$, $a=0$ および $0 \geq Q \geq -3$ の場合、空間電荷の影響を考慮した利得の表示式であり $Q=0$ とすれば従来の結果と一致する。

この利得における第一項は、増大波と減衰波による利得であり、 $|Q|$ の増加とともに利得は減少する。これはO型前進波増幅装置と同じ傾向であるが¹⁵⁾、予期した Diocotron 効果は表われなかった¹⁶⁾。第二項は集束系固有の ripple によるものである。 $|Q|$ の小さいときの利得は、第一項がよくきき、 $|Q|$ が大きくなると第二項がよくきいて、 ϕ に対する利得がかなり脈動し、その周期が $|Q|$ の増加とともに短くなる (Fig. 4 と Fig. 5 参照)。

6. 結 言

CEF型前進波増幅装置の無損失、完全同期、 $\beta_e \approx 20$, $C \approx 0.05$, $a=0$ および $0 \geq Q \geq -3$ の場合、空間電荷の影響を考慮した小信号利得の表示式がはじめて与えられた。hot systems には増大波と減衰波および集束系固有の波が存在するが、空間電荷効果が大きい場合、空間角に対する利得はかなり脈動する。

これらの結果は、既に1966年夏に得られていたが、 Q の物理的意義や beam stiffness を考察中近軌軸道が必要になった。ところがこの解析がなされていないことを知り、計算した結果幸いにも $Q=-2$ で ripple がなくなるという重要な条件を得た^{8),10),11)} それ故得られていた利得の近似式を再検討し δ_n の表示を定めた¹³⁾。これはまた1966年秋に行なった千田助手の電子計算機の計算結果と比較してもかなりよい近似であることを知った¹²⁾。計算結果が早く得られていたのに、公表が遅れた理由は上記の過程を経たためここに敢えて附記する。

おわりに研究の機会を与えて下さった電子工学科の方々、輪講において討論下さった千田正彦助手に感謝する。

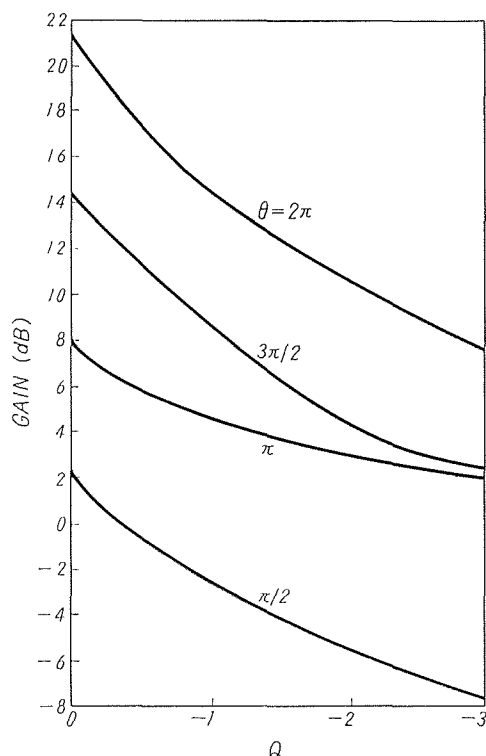


Fig. 5. The small-signal gain vs Q with θ as parameter in the case where $d=0$, $b=0$, $\beta_e \approx 20$, $C \approx 0.05$ and $a=0$.

参 考 文 献

- 1) 桜庭一郎：“遠心力を用いた静電界集束系における電子軌道”，北海道大学工学部研究報告，第40号，pp. 77-86 (1966-3).
- 2) 桜庭一郎・平石雅昭：“CEF型前進波増幅装置の利得”，北海道大学工学部研究報告，第41号 pp. 121-133 (1966-8).
- 3) Rowe, J. E. and Sakuraba, I.: “Equivalent Resistance of CEF Photodemodulators”, Proceedings of the 6th International Conference on Microwave and Optical Generation and Amplification, Cambridge, England, pp. 458-463 (1966-9).
- 4) 桜庭一郎・千田正彦：“CEF型前進波増幅装置の利得に対する電子入射速度の影響”，北海道大学工学部研究報告，第42号，pp. 29-41 (1967-1).
- 5) 千田正彦・桜庭一郎：“CEF型前進波増幅装置の利得におよぼす集束特性の影響”，北海道大学工学部研究報告，第43号，pp. 55-66 (1967-5).
- 6) 桜庭一郎・小柳幸次郎：“薄い、CEF型電子ビームの集束による空間電荷界”，北海道大学工学部研究報告，第43号，pp. 49-54 (1967-5).
- 7) 小柳幸次郎・桜庭一郎：“空間電荷を考慮したCEF型集束系のBeam Stiffness”，北海道大学工学部研究報告，第44号，pp. 67-72 (1967-9).
- 8) 小柳幸次郎・桜庭一郎：“CEF型電子ビームの近軸軌道方程式とCritical Perveance”，昭和42年電気四学会北海道支部連合大会講演論文集，No. 2-3 (1967-10). 北海道大学工学部研究報告，第45号，印刷中.
- 9) 千田正彦・桜庭一郎：“CEF型前進波増幅装置の利得と電子入射速度”，昭和42年電気四学会北海道支部連合大会講演論文集，No. 2-2 (1967-10).
- 10) Sakuraba, I. and Koyanagi, K.: “Rippling of CEF-Type Electron Beams”, Memoirs of Faculty of Engineering, Hokkaido University, No. 55 (to be published).
- 11) 桜庭一郎・小柳幸次郎：“CEF型電子ビームの近軸軌道”，昭和43年電気四学会連合大会講演論文集，印刷中.
- 12) 千田正彦・桜庭一郎：“CEF型前進波増幅装置の空間電荷効果に関する数値計算結果”，Unpublished Work (1966-12).
- 13) 小柳幸次郎・桜庭一郎：“CEF型前進波増幅装置の特性方程式の近似解”，Unpublished Work (1967-9).
- 14) Rowe, J. E.: “Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena”, Academic Press, New York and London, pp. 54-62 (1965).
- 15) Pierce, J. R.: “Traveling-Wave Tubes”, D. Van Nostrand, Inc., New York, p. 134 (1950).
- 16) Mourier, G.: “Small Signal Theory”, Crossed-Field Microwave Devices, Vol. 1, Academic Press, New York and London, pp. 395-435 (1961).