HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	トランジスタ発振器の周波数について
Author(s)	黒部, 貞一; 安住, 和彦
Citation	北海道大學工學部研究報告, 49, 95-107
Issue Date	1968-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40893
Type	departmental bulletin paper
File Information	49_95-108.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

トランジスタ発振器の周波数について

黒部貞一*
安住和彦*
(昭和43年4月26日受理)

Frequency of Transister Oscillator

Teiichi KUROBE
Kazuhiko AZUMI
Department of Electronic Engineering
Faculty of Engineering, Hokkaido University
(Received April 26, 1968)

Abstract

The frequency of a transistor oscillator is considered to be closely equal to the resonant frequency of the external circuit, however, the frequency of oscillation is lower than it because of transistor parameters.

In general the characteristic equation of transister oscillator circuits is of a higher degree, rendering the solution difficult. The authors obtained the frequency of oscillation from the characteristic equation by assuming that the roots for the principal mode are purely imaginary and by using the regularity which exists between the coefficients of the characteristic equation and the frequency of oscillation. Numerical calculations and experiments were carried out for Colpitts circuits which have a circuit determinant of degree four. The results of calculation and experiments were in good agreement.

If the diffusion capacitance and the junction capacitance in a transistor model are neglected, the calculated frequency is a somewhat higher than the resonant frequency of the external circuit. Such a model has no meaning, because the actual frequency is lower than it. As for nonlinearity of transistor parameters, only g_m (the mutual conductance) was considered. This approximation seems to be valid from the results of the experiments.

目　　次

1. 緒　　言 …… 96
2. 高次方程式における主発振モードの周波数 …… 96
2·1　3次の場合 …… 96
2·2　4次の場合 …… 97
2·3　5次の場合 …… 98
2·4　6次の場合 …… 99
2·5　7次の場合 …… 100

* 電子工学科電子回路工学講座

3. コルピッツトランジスタ発振器の数値例 …… 101
4. コルピッツトランジスタ発振器の実験例 …… 104
5. 結　　言 …… 107

1. 緒　　言

ふつうトランジスタ発振器の発振周波数は外部共振回路の発振周波数にほぼ等しいとして取り扱われているが，発振周波数が高くなるにしたがい，トランジスタの影響が入ってきて外部共振回路の周波数より低くなる。

筆者等はトランジスタの等価回路として電荷制御モデルを用い，系全体の特性方程式より発振周波数の計算を行なった。特性方程式は一般に高次方程式であり，これを解くことは難しい。しかし主発振モードの根は定常状態において純虚数になるという条件を用いれば，5次までは解くことができた。また発振周波数の値は特性方程式の次数にかかわらずある規則性をもっていることがわかったので，これを利用して7次まで求めた。一例として4次のコルピッツ回路について数値計算並びに実験を行なったが，理論と実験とはかなりよく一致した。

トランジスタの等価回路における拡散容量，接合容量などの容量効果を考慮しない時は発振周波数は外部回路の共振周波数より高くなるので，そのような等価回路は意味がないことを明らかにした。また特性方程式の係数の間には一つの関係式が存在し，発振周波数を求める際にはこれを満足しなければならないが，この関係式の中にはトランジスタのパラメータが全て入っている。そのパラメータの中で g_m だけが非線形性をもつものとして計算したのであるが，実験結果とよく一致している点からこの方法が妥当であることがわかった。

2. 高次方程式における主発振モードの周波数

一般にトランジスタ発振器の回路行列式から得られた n 次の特性方程式は $D(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0=H(p^n+c_1p^{n-1}+c_2p^{n-2}+\cdots+c_n)$ と表わすことができる。本報告では，3次から7次までの特性方程式について，定常状態における主発振モードの周波数を求めた。以下において主発振モードの根は p_1 及び p_2 であるとする。

2·1 3次の場合

特性方程式 $D(p)=0$ の根をそれぞれ p_1, p_2, p_3 とすれば

$$D(p)=H(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)=H(p^3+c_1p^2+c_2p+c_3) \tag{1}$$

である。根と係数の関係から

$$\left.\begin{aligned} c_1&=-\sum_{i=1}^{3}p_i=-(2\sigma_1+p_0)\\ c_2&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}p_ip_j=(\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1p_0\\ c_3&=-\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}\sum_{k=j+1}^{3}p_ip_jp_k=-(\sigma_1^2+\omega_1^2)p_0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

である。ただし

$$p_1, p_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \quad p_0 = p_3 = \sigma_3 \tag{3}$$

である。定常状態では $\sigma_1=0$ なのでこれを (2) 式に代入すると次の様になる。

$$c_1 = -p_0, \quad c_2 = \omega_1^2, \quad c_3 = -\omega_1^2 p_0 \tag{2}'$$

(2)′ 式より

$$\omega_1^2 = c_3/c_1 \tag{4}$$

$$c_1 c_2 = c_3 \tag{5}$$

であるから，3 次の場合には定常状態の発振周波数は (4) 式で与えられる。ただし同時に (5) 式を満足していなければならない。

なお第 3 の根 σ_3 も容易に求まり，この時も (5) 式を満足していなければならない。

2·2 4 次 の 場 合

特性方程式の根をそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4 とすれば

$$D(p) = H(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4) = H(p^4+c_1p^3+c_2p^2+c_3p+c_4) \tag{6}$$

で，根と係数の関係から

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\sum_{i=1}^{4} p_i = -(2\sigma_1+p_0) \\ c_2 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} p_i p_j = (\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1 p_0+\Delta \\ c_3 &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4} p_i p_j p_k = -\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)p_0+2\sigma_1\Delta\right\} \\ c_4 &= \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}\sum_{k=j+1}^{3}\sum_{l=k+1}^{4} p_i p_j p_k p_l = (\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

である。ただし

$$p_1, p_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \quad p_0 = p_3+p_4, \quad \Delta = p_3 p_4 \tag{8}$$

である。(8) 式において定常状態では $\sigma_1=0$ なのでこれを (7) 式に代入すると次の様になる。

$$c_1 = -p_0, \quad c_2 = \omega_1^2+\Delta, \quad c_3 = -\omega_1^2 p_0, \quad c_4 = \omega_1^2\Delta \tag{7}'$$

(7)′ 式の第 1，第 3 番目の式より

$$\omega_1^2 = c_3/c_1 \tag{9}$$

となる。第 2，第 4 番目の式より

$$\omega_1^2 = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2-4c_4}}{2} \tag{10}$$

となる。この複号は実験結果並びに根の規則性から + が正しいと推定される。(9) 式，(10) 式を等しいとおくと

$$c_3^2-c_1c_2c_3+c_1^2c_4=0 \tag{11}$$

となる。従って4次の場合には定常状態の発振周波数は(9)式で与えられる。ただし同時に(11)式を満足していなければならない。

なお第3と第4の根 $\sigma_3\pm j\omega_3$ または σ_3, σ_4 も容易に求められ，この時も同時に(11)式を満足していなければならない。

2·3 5次の場合

特性方程式の根をそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 とすれば

$$D(p)=H(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)=H(p^5+c_1p^4+c_2p^3+c_3p^2+c_4p+c_5) \tag{12}$$

で，根と係数の関係から

$$\left.\begin{aligned}
c_1&=-\sum_{i=1}^{5}p_i=-(2\sigma_1+p_0)\\
c_2&=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}p_ip_j=(\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1p_0+\Delta_1\\
c_3&=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{5}p_ip_jp_k=-\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)p_0+2\sigma_1\Delta_1+\Delta_2\right\}\\
c_4&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}\sum_{l=k+1}^{5}p_ip_jp_kp_l=(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_1+2\sigma_1\Delta_2\\
c_5&=-\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}\sum_{k=j+1}^{3}\sum_{l=k+1}^{4}\sum_{m=l+1}^{5}p_ip_jp_kp_lp_m=-(\sigma_1^2+\omega_2^2)\Delta_2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

である。ただし

$$p_1,p_2=\sigma_1\pm j\omega_1,\quad p_0=\sum_{i=3}^{5}p_i,\quad \Delta_1=\sum_{i=3}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}p_ip_j,\quad \Delta_2=p_3p_4p_5 \tag{14}$$

である。定常状態では $\sigma_1=0$ であるから，これを(13)式に代入すれば次の様になる。

$$c_1=p_0,\quad c_2=\omega_1^2+\Delta_1,\quad c_3=-\omega_1^2p_0-\Delta_2,\quad c_4=\omega_1^2\Delta_1,\quad c_5=-\omega_1^2\Delta_2 \tag{13}'$$

(13)′式の第1，第3，第5番目の式より

$$\omega_1^2=\frac{c_3\pm\sqrt{c_3^2-4c_1c_5}}{2c_1} \tag{15}$$

となり，第2，第4番目の式より

$$\omega_1^2=\frac{c_2\pm\sqrt{c_2^2-4c_4}}{2} \tag{16}$$

となる。(15), (16)式の複号は根の規則性から + が正しいと推定され，両式を等しいとおくと

$$c_1^2c_2c_3c_5+c_1^3c_2c_3c_4-c_1^2c_5^2-c_1^4c_4^2-c_1^3c_2^2c_5+2c_1^3c_4c_5-c_1^2c_3^2c_4=0 \tag{17}$$

となる。従って5次の場合には定常状態の発振周波数は(15)式で与えられる。ただし同時に(17)式を満足していなければならない。

なお Δ_1, Δ_2 は容易に求められるが，第3，第4，第5根を求めることは困難である。

2·4 6次の場合

特性方程式の根をそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 とすれば

$$\begin{aligned} D(p) &= H(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)(p-p_6) \\ &= H(p^6+c_1p^5+c_2p^4+c_3p^3+c_4p^2+c_5p+c_6) \end{aligned} \tag{18}$$

で，根と係数の関係から

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\sum_{i=1}^{6} p_i = -(2\sigma_1+p_0) \\ c_2 &= \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6} p_ip_j = (\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1p_0+\Delta_1 \\ c_3 &= -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6} p_ip_jp_k = -\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)p_0+2\sigma_1\Delta_1+\Delta_2\right\} \\ c_4 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{5}\sum_{l=k+1}^{6} p_ip_jp_kp_l = (\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_1+2\sigma_1\Delta_2+\Delta_3 \\ c_5 &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}\sum_{l=k+1}^{5}\sum_{m=l+1}^{6} p_ip_jp_kp_lp_m = -\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_2+2\sigma_1\Delta_3\right\} \\ c_6 &= \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}\sum_{k=j+1}^{3}\sum_{l=k+1}^{4}\sum_{m=l+1}^{5}\sum_{n=m+1}^{6} p_ip_jp_kp_lp_mp_n = (\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_3 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

である。ただし

$$\left.\begin{aligned} &p_1, p_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \quad p_0 = \sum_{i=3}^{6} p_i, \quad \Delta_1 = \sum_{i=3}^{5}\sum_{j=i+1}^{6} p_ip_j \\ &\Delta_2 = \sum_{i=3}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6} p_ip_jp_k, \quad \Delta_3 = p_3p_4p_5p_6 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

である。定常状態では $\sigma_1=0$ であるからこれを (19) 式に代入すると次の様になる。

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = -p_0, \qquad c_2 = \omega_1^2+\Delta_1, \quad c_3 = -\omega_1^2p_0-\Delta_2 \\ &c_4 = \omega_1^2\Delta_1+\Delta_3, \quad c_5 = -\omega_1^2\Delta_2, \quad c_6 = \omega_1^2\Delta_3 \end{aligned}\right\} \tag{19}'$$

(19)′ 式の第1，第3，第5番目の式より

$$\omega_1^2 = \frac{c_3 \pm \sqrt{c_3^2-4c_1c_5}}{2c_1} \tag{21}$$

となる。5次の場合と同様に複号は + が正しいと考えられる。第2，第4，第6番目の式より

$$\omega_1^6-c_2\omega_1^4+c_4\omega_1^2-c_6 = 0$$

となる。これは一般に解くことは難しいが表-1からわかるように ω_1^2 の値にはある規則性があり，偶数係数の場合は c_2 の値に近く，奇数係数の場合は c_3/c_1 の値に近いことが推定される。したがって ω_1^2 が c_2 に近いと仮定すれば，次の様になる。

$$\omega_1^2 \simeq c_2-\left(\frac{c_2c_4-c_6}{c_2^2}\right) \tag{22}$$

表—1 ω_1^2 と n の関係

n	ω_1^2	
2	c_2	
3	c_2	$\dfrac{c_3}{c_1}$
4	$\dfrac{c_2+\sqrt{c_2^2-4c_4}}{2}$	$\dfrac{c_3}{c_1}$
5	$\dfrac{c_2+\sqrt{c_2^2-4c_4}}{2}$	$\dfrac{c_3+\sqrt{c_3^2-4c_1c_5}}{2c_1}$
6	$c_2-\left(\dfrac{c_2c_4-c_6}{c_2^2}\right)$	$\dfrac{c_3+\sqrt{c_3^2-4c_1c_5}}{2c_1}$
7	$c_2-\left(\dfrac{c_2c_4-c_6}{c_2^2}\right)$	$\dfrac{c_3}{c_1}-\left(\dfrac{c_3c_5-c_1c_7}{c_3^2}\right)$

(21) 式，(22) 式を等しいとおくと

$$c_1^2c_3^4-2c_1^3c_2c_3^2c_4+2c_1^2c_3^2c_6-c_1c_2^2c_3^3+c_1^2c_2^2c_4^2-2c_1^2c_2c_4c_6 +c_1^2c_6^2+c_1c_2^3c_3c_4-c_1c_2^2c_3c_6+4c_1c_2^4c_5=0 \tag{23}$$

となる。6 次の場合には定常状態の発振周波数は (21) 式で与えられる。ただし同時に (23) 式を満足していなければならない。

2·5 7 次の場合

特性方程式の根をそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 とすれば

$$\begin{aligned}D(p)&=H(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)(p-p_6)(p-p_7)\\&=H(p^7+c_1p^6+c_2p^5+c_3p^4+c_4p^3+c_5p^2+c_6p+c_7)\end{aligned} \tag{24}$$

で，根と係数の関係から

$$\left.\begin{aligned}
c_1&=-\sum_{i=1}^{7}p_i=-(2\sigma_1+p_0)\\
c_2&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=i+1}^{7}p_ip_j=(\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1p_0+\Delta_1\\
c_3&=-\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}\sum_{k=j+1}^{7}p_ip_jp_k=-\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)+2\sigma_1\Delta_1+\Delta_2\right\}\\
c_4&=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6}\sum_{l=k+1}^{7}p_ip_jp_kp_l=(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_1+2\sigma_1\Delta_2+\Delta_3\\
c_5&=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\sum_{k=j+1}^{5}\sum_{l=k+1}^{6}\sum_{m=l+1}^{7}p_ip_jp_kp_lp_m=-\left\{(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_2+2\sigma_1\Delta_3+\Delta_4\right\}\\
c_6&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}\sum_{l=k+1}^{5}\sum_{m=l+1}^{6}\sum_{n=m+1}^{7}p_ip_jp_kp_lp_mp_n=(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_3+2\sigma_1\Delta_4\\
c_7&=-\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}\sum_{k=j+1}^{3}\sum_{l=k+1}^{4}\sum_{m=l+1}^{5}\sum_{n=l+1}^{6}\sum_{p=n+1}^{7}p_ip_jp_kp_lp_mp_np_p=-(\sigma_1^2+\omega_1^2)\Delta_4
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

である。ただし

$$\left.\begin{aligned} &p_1, p_2 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \quad p_0 = \sum_{i=3}^{7} p_i, \quad \Delta_1 = \sum_{i=3}^{6} \sum_{j=i+1}^{7} p_i p_j \\ &\Delta_2 = \sum_{i=3}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} \sum_{k=j+1}^{7} p_i p_j p_k, \quad \Delta_3 = \sum_{i=3}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} \sum_{k=j+1}^{6} \sum_{l=k+1}^{7} p_i p_j p_k p_l \\ &\Delta_4 = p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

である。定常状態では $\sigma_1=0$ であるからこれを(25)式に代入すれば次の様になる。

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = -p_0, \qquad c_2 = \omega_1^2 + \Delta_1, \quad c_3 = -\omega_1^2 p_0 - \Delta_2, \quad c_4 = \omega_1^2 \Delta_1 + \Delta_3 \\ &c_5 = -\omega_1^2 \Delta_2 - \Delta_4, \quad c_6 = \omega_1^2 \Delta_3, \quad c_7 = -\omega_1^2 \Delta_4 \end{aligned}\right\} \quad (25)'$$

(25)′ 式の第 1，第 3，第 5，第 7 番目の式より

$$c_1\omega_1^6 - c_3\omega_1^4 + c_5\omega_1^2 - c_7 = 0 \quad (27)$$

となり，第 2，第 4，第 6 番目の式より

$$\omega_1^6 - c_2\omega_1^4 + c_4\omega_1^2 - c_6 = 0 \quad (28)$$

となる。(27)式は一般に解くことは難しいが，ω_1^2 が c_3/c_1 に近いと仮定すれば，次の様になる。

$$\omega_1^2 \simeq \frac{c_3}{c_1} - \left(\frac{c_3 c_5 - c_1 c_7}{c_3^2}\right) \quad (29)$$

(28)式も一般に解くことは難しいが ω_1^2 が c_2 に近いと仮定すれば，次の様になる。

$$\omega_1^2 \simeq c_2 - \left(\frac{c_2 c_4 - c_6}{c_2^2}\right) \quad (30)$$

(29)式，(30)式を等しいとおくと

$$c_1 c_2^3 c_3^2 - c_1 c_2 c_3^2 c_4 + c_1 c_3^2 c_6 - c_2^2 c_3^3 + c_1 c_2^2 c_3 c_5 - c_1^2 c_2^2 c_7 = 0 \quad (31)$$

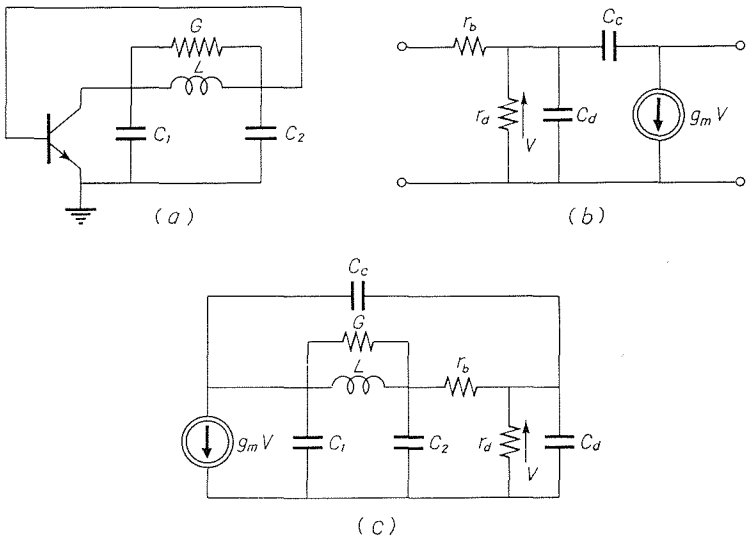
となる。従って，7 次の場合には定常状態の発振周波数は(29)式で与えられる。ただし同時に(31)式を満足していなければならない。

3. コルピッツ・トランジスタ発振器の数値例

ここで，前に述べた考え方を用いて，コルピッツ発振回路の特性方程式を求め具体的な数値を代入して計算してみる。コルピッツ発振回路としては図-1 (a) の回路を用い，トランジスタの等価回路は図-1 (b) とする。従ってコルピッツ発振回路の等価回路は図-1 (c) の様になる。この回路方程式を解き，回路行列式を求めると

$$\begin{vmatrix} g_m - pC_c & G + p(C_1 + C_c) + \dfrac{1}{pL} & -\left(G + \dfrac{1}{pL}\right) \\ -g_b & -\left(G + \dfrac{1}{pL}\right) & G + g_b + pC_2 + \dfrac{1}{pL} \\ g_b + g_a + p(C_c + C_a) & -pC_c & -g_b \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

となる。ただし



図—1　コルピッツ発振器と等価回路

$$g_b = 1/r_b \qquad g_d = 1/r_d$$

である。(32) 式より

$$\left.\begin{aligned}
a_4 &= C_2 C_c C_d + C_1 C_2 C_c + C_1 C_2 C_d \\
a_3 &= g_b C_2 (C_1 + C_c) + G C_c C_d + g_b C_c C_d + (g_m + g_d) C_2 C_c \\
a_2 &= G g_b (C_1 + C_2) + G (g_d + g_m) C_c + g_b (g_m + g_d) C_c + g_d G (C_1 + C_2) \\
&\quad + g_d g_b C_1 + G g_b C_d + \frac{1}{L}\left\{ C_c C_d + (C_c + C_d)(C_1 + C_2) \right\} \\
a_1 &= G g_b g_m + G g_b g_d + \frac{1}{L}\left\{ g_b (C_1 + C_2) + (g_d + g_m) C_c + g_d (C_1 + C_2) + C_d g_b \right\} \\
a_0 &= \frac{g_b}{L}(g_m + g_d)
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

である。トランジスタのパラメータは代表的シリコントランジスタの値として次の数値を用いた。

$$r_b = 50\ \Omega \qquad r_d = 250\ \Omega \qquad C_c = 5\ \mathrm{pF} \qquad C_d = 100\ \mathrm{pF} \qquad (34)$$

又 (11) 式を変形すると

$$a_0 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4 = 0 \qquad (11)'$$

となる。以下において f_0 は外部回路の共振周波数であり，トランジスタのパラメータの中で g_m だけが線形範囲の値と異なり，ほかのパラメータと外部回路素子の値は線形範囲の値とした。

(例 1)

$C_1 = 6$ pF，$C_2 = 10$ pF，$L = 14\ \mu$H，コイルの Q を 50 とすると，$f_0 = \sqrt{(C_1 + C_2)/C_1 C_2 L}/2\pi = 22.0$MHz，$G = 1/Q\omega_0 L = 1.00 \times 10^{-5}$ ℧ となる。以上の値と (34) 式の値を (32) 式に用いて a_1,

a_2 等の係数を求めこれを (11)′ 式に代入して整理すると次の様になる。

$$(8.00\times10^{-43})\,g_m^3+(1.32\times10^{-42})\,g_m^2+(4.67\times10^{-43})\,g_m-(6.2\times10^{-46})=0 \tag{35}$$

(35) 式は 3 次式で，解は 3 つ存在するが，そのうち正の実根はただひとつでそれを g_{mav} とすると

$$g_{mav}=1.33\times10^{-3}\,\mho \tag{36}$$

となる。(36) 式及び (34) 式の値を (33) 式に代入して，(9) 式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1=\omega_1/2\pi=13.2\ \mathrm{MHz} \tag{37}$$

(例 2)

$C_1=50$ pF，$C_2=80$ pF，$L=20\ \mu$H，コイルの Q を 50 とすると，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=6.42$ MHz，$G=1/Q\omega_0L=2.48\times10^{-5}\,\mho$ となる。前例と同様に (33) 式に上の数値及び (34) 式を代入して，(11)′ 式より次の様になる。

$$(1.30\times10^{-40})\,g_m^3+(1.52\times10^{-40})\,g_m^2+(4.21\times10^{-41})\,g_m-(2.49\times10^{-43})=0 \tag{38}$$

(38) 式の唯一の正の実根は

$$g_{mav}=5.93\times10^{-3}\,\mho \tag{39}$$

である。(39) 式及び (34) 式を (33) 式に代入し，(9) 式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1=\omega_1/2\pi=5.48\ \mathrm{MHz} \tag{40}$$

(例 3)

$C_1=60$ pF，$C_2=100$ pF，$L=140\ \mu$H，コイルの Q を 50 とすると，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=2.20$ MHz，$G=1/Q\omega_0L=1.00\times10^{-5}\,\mho$ となる。前例と同様に (33) 式に上の数値及び (34) 式を代入して，(11)′ 式より次の様になる。

$$(2.39\times10^{-41})\,g_m^3+(3.23\times10^{-41})\,g_m^2+(1.06\times10^{-41})\,g_m-(1.62\times10^{-44})=0 \tag{41}$$

(41) 式の唯一の正の実根は

$$g_{mav}=1.53\times10^{-3}\,\mho \tag{42}$$

である。(42) 式及び (34) 式を (33) 式に代入し，(9) 式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1=\omega_1/2\pi=1.93\ \mathrm{MHz} \tag{43}$$

以上をまとめると，表-2 の様になる。表-2 において g_{mav} は一周期を通じての平均の g_m である。これを用いた発振周波数は f_1 で示され，f_0 は外部回路の共振周波数である。トランジスタの容量 $C_r=C_d=0$ とすれば

$$\omega_1'^2=\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}+\frac{Gg_b(g_m+g_d)}{C_1C_2(g_b+g_d)} \tag{44}$$

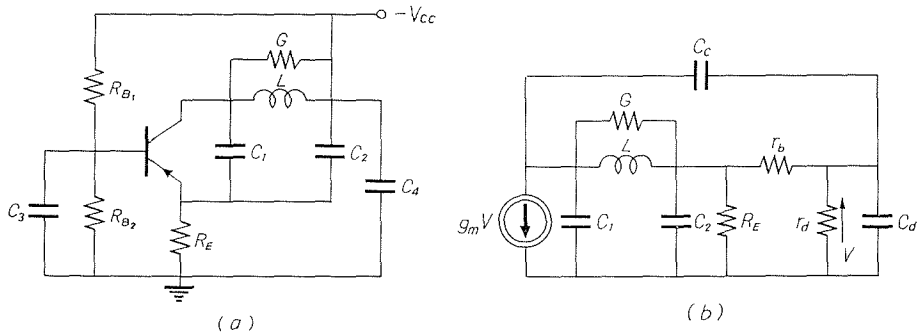
表—2 コルピッツ発振器の数値例

例	C_1(pF)	C_2(pF)	L(μH)	G(×10 ^{5}℧)	f_1(MHz)	f_0(MHz)	f_1'(MHz)	g_{max}(m℧)
1	60	100	140	1.00	1.93	2.20	2.25	1.53
2	50	80	20	2.48	5.48	6.42	6.69	6.40
3	6	10	14	1.00	13.2	22.0	22.5	1.33

となり常に外部回路の共振角周波数 ω_0 より高くなるので，トランジスタの容量 C_c 及び C_d を無視した等価回路を用いることは意味がない。f_1 は発振周波数の理論値で，f_1' は $C_c=C_d=0$ とした時の発振周波数である。

4. コルピッツトランジスタ発振器の実験例

次に実際にコルピッツ発振器を作り，実験値と理論値を比較してみた。バイアス回路を含んだコルピッツ発振器を図-2(a)とし，トランジスタの等価回路は図-1(b)とすれば，コルピッツ発振器の等価回路は図-2(b)の様になる。図-2(a)において，C_3 及び C_4 はバイパスコンデンサであり，R_{B1} 及び R_{B2} は図-2(b)の等価回路では省略してある。この回路方程式を解き，回路行列式を求めると



図—2 実験に用いたコルピッツ発振器と等価回路

$$\begin{vmatrix} g_m-pC_c & G+p(C_1+C_c)+\dfrac{1}{pL} & -\left(G+\dfrac{1}{pL}\right) \\ -g_b & -\left(G+\dfrac{1}{pL}\right) & G+g_b+g_E+pC_2+\dfrac{1}{pL} \\ g_b+g_d+p(C_c+C_d) & -pC_c & -g_b \end{vmatrix}=0 \qquad (45)$$

となる。ただし

$$g_b=1/r_b \qquad g_d=1/r_d \qquad g_E=1/R_E$$

である。(45)式より

$$
\left.\begin{aligned}
a_4 &= C_2C_cC_d+C_1C_2C_c+C_1C_2C_d \\
a_3 &= g_mC_2C_c+g_bC_1C_2+g_dC_1C_2+g_bC_2C_c+g_dC_2C_c+g_bC_1C_c+g_bC_cC_d \\
&\quad +g_bC_1C_d+g_EC_1C_c+g_EC_cC_d+g_EC_1C_d+GC_1C_c+GC_2C_c \\
&\quad +GC_1C_d+GC_2C_d+GC_cC_d \\
a_2 &= Gg_mC_c+g_bg_mC_c+g_Eg_mC_c+Gg_bC_1+Gg_bC_2+Gg_dC_1+Gg_dC_2 \\
&\quad +Gg_dC_c+g_bg_EC_1+g_bg_dC_1+g_Eg_dC_1+g_bg_EC_c+g_bg_dC_c+g_Eg_dC_c \\
&\quad +Gg_bC_d+Gg_EC_c+Gg_EC_d+\frac{1}{L}\left\{(C_1+C_2)(C_c+C_d)+C_cC_d\right\} \\
a_1 &= Gg_mg_b+Gg_bg_E+Gg_bg_d+Gg_Eg_d \\
&\quad +\frac{1}{L}\left(C_cg_m+C_1g_b+C_2g_b+C_1g_d+C_2g_d+C_cg_d+C_cg_E+C_dg_b+C_dg_E\right) \\
a_0 &= \frac{1}{L}\left(g_mg_b+g_bg_d+g_Eg_b+g_Eg_d\right)
\end{aligned}\right\} \quad (46)
$$

となる。実験に用いたトランジスタは 2SA-76 で，定格表によると各パラメーターの値は次のとおりである。

$$r_b = 40\Omega \qquad r_d = 1.75\ \mathrm{k}\Omega \qquad C_d = 60\ \mathrm{pF} \qquad C_c = 1.7\ \mathrm{pF} \tag{47}$$

なお発振周波数の測定法は次のとおりである。最初に実験回路を発振させ影響を与えない位に離したラジオで受信する。次に信号発生器の電波をラジオで受信して，初めの回路の発振周波数とゼロビートをとる。この時の信号発生器の周波数を周波数カウンターで測定する。

(例 1)

$C_1=39.9\ \mathrm{pF}$, $C_2=97.2\ \mathrm{pF}$, $L=39\ \mu\mathrm{H}$, コイルの $Q=206$ の場合には，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=4.79\ \mathrm{MHz}$ となる。$R_{B_1}=10\ \mathrm{k}\Omega$ とし，R_{B_2} 及び R_E を調節して最適のバイアス状態にして，発振周波数を測定すると次の様になった。

$R_{B_2}=37\ \mathrm{k}\Omega$，　$R_E=440\ \mathrm{k}\Omega$

$f=4.33\ \mathrm{MHz}$，　$4.28\ \mathrm{MHz}$，　$4.24\ \mathrm{MHz}$

以上の値及び (47) 式を (46) 式に代入し，(11)′ より g_{mav} を求めると

$$g_{mav}=2.12\times10^{-4}\ \mho \tag{48}$$

となる。(48) 式及び (47) 式を (46) 式に代入し，(9) 式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1=\omega_1/2\pi=4.41\ \mathrm{MHz} \tag{49}$$

(例 2)

$C_1=39.9\ \mathrm{pF}$, $C_2=97.2\ \mathrm{pF}$, $L=132\ \mu\mathrm{H}$, コイルの $Q=110$ の場合には，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=2.60\ \mathrm{MHz}$ となる。例 1 と同様に $R_{B_1}=10\ \mathrm{k}\Omega$ とし，R_{B_2} 及び R_E を調節して最適バイアス状態にして，発振周波数を測定すると次の様になった。

$R_{B_2}=40\ \mathrm{k}\Omega$　　$R_E=600\ \mathrm{k}\Omega$

$f=2.34\ \mathrm{MHz}$，　$2.31\ \mathrm{MHz}$，　$2.32\ \mathrm{MHz}$

以上の値及び(47)式を(46)式に代入し，(11)′式より g_{mav} を求めると

$$g_{mav} = 1.82\times10^{-4}\,\mho \tag{50}$$

である。(50)式及び(47)式を(46)式に代入し，(9)式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1 = \omega_1/2\pi = 2.39\ \text{MHz} \tag{51}$$

(例 3)

$C_1=50.3$ pF, $C_2=97.2$ pF, $L=132\ \mu$H, コイルの $Q=110$ の場合には，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=2.40$ MHz となる。前例と同様に $R_{B_1}=10\ \text{k}\Omega$ とし，R_{B_2} 及び R_E を調節して最適バイアス状態にして，発振周波数を測定すると次の様になった。

$R_{B_2}=36\ \text{k}\Omega$　　$R_E=950\ \text{k}\Omega$

$f=2.19$ MHz，2.18 MHz，2.16 MHz

以上の値及び(47)式を(46)式に代入し，(11)′式より g_{mav} を求めると

$$g_{mav} = 6.46\times10^{-5}\,\mho \tag{52}$$

となる。(52)式及び(47)式を(46)式に代入し，(9)式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1 = \omega_1/2\pi = 2.20\ \text{MHz} \tag{53}$$

(例 4)

$C_1=39.9$ pF, $C_2=97.2$ pF, $L=345\ \mu$H, コイルの $Q=130$ の場合には，$f_0=\sqrt{(C_1+C_2)/C_1C_2L}/2\pi=1.62$ MHz となる。前例と同様に $R_{B_1}=10\ \text{k}\Omega$ とし，R_{B_2} 及び R_E を調節して最適バイアス状態にして，発振周波数を測定すると次の様になった。

$R_{B_2}=44\ \text{k}\Omega$　　$R_E=1.3\ \text{M}\Omega$

$f=1.47$ MHz，1.45 MHz，1.44 MHz

以上の値及び(47)式を(46)式に代入し，(11)′式より g_{mav} を求めると

$$g_{mav} = 1.74\times10^{-4}\,\mho \tag{54}$$

となる。(54)式及び(47)式を(46)式に代入し，(9)式より発振周波数を求めると次の様になる。

$$f_1 = \omega_1/2\pi = 1.48\ \text{MHz} \tag{55}$$

以上の例において，C_1, C_2, L 及び Q は $\boldsymbol{Q}$ メータで測定したものである。又 G はコイルの損失をあらわすコンダクタンスである。(例1), (例2), (例3), (例4) の結果をまとめると表-3の様になる。

表-3において，実験回路の周波数 f が3つあるのは，同じ回路構成で3個の2SA-76トランジスタを用いて実験したからである。

表—3　発振周波数の実験値と理論値の比較

例	f_0(MHz)	f(MHz)	f_1(MHz)	g_{mav}(℧)
1	4.79	4.33, 4.28, 4.24	4.41	2.12×10^{-4}
2	2.60	2.34, 2.31, 2.32	2.39	1.82×10^{-4}
3	2.40	2.19, 2.18, 2.16	2.20	6.46×10^{-5}
4	1.62	1.47, 1.45, 1.44	1.48	1.74×10^{-4}

5. 結　　言

トランジスタ発振器の特性方程式より発振周波数を求める方法を，3次～7次の場合について導いた。その場合主発振モードについては根の実数部を0とした。数値例及び実験例としては4次のコルピッツ発振器について行ない，理論と実験がかなりよく一致することを確かめた。発振周波数は外部共振回路の共振周波数より低く，周波数が高くなるにしたがいその差は大きくなる。容量効果を無視したトランジスタの等価回路では発振周波数は共振周波数より高くなるので間違いであることを明らかにした。また平均相互コンダクタンス g_{mav} の導入により理論と実験がよく一致したので，この方法が妥当であることがわかった。

おわりに，実験に際して協力され，かつ種々討論いただいた電子回路工学講座の方々に深く感謝する。