



Title	自由端に剛体を有する片持梁の振動に関する研究
Author(s)	酒井, 良男; Sakai, Yoshio; 青木, 武士 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 51, 9-18
Issue Date	1968-12-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40907
Type	departmental bulletin paper
File Information	51_9-18.pdf



自由端に剛体を有する片持梁の振動に関する研究

酒 井 良 男*

青 木 武 士*

山 崎 裕*

(昭和43年5月31日受理)

A Study on Vibration of a Cantilever Beam with a Rigid-Mass at the Free End

Yoshio SAKAI

Takeshi AOKI

Yutaka YAMAZAKI

(Received May 31, 1968)

Abstract

With regard to vibration of a cantilever beam with a rigid-mass at the free end, we found some difference between practical periods and bending theory's periods. Especially case of second and third mode periods this effect is very remarkable.

With respect to this point a theoretical equation was introduced in addition to the bending theory of beams considering the effects of moment of inertia and secondary stress of bending caused by the vertical force assuming that the beam has not small deformation. Model testing of the above was carried out. The values of theory and test were in good agreement. We suggest that these considerations are indispensable when we calculate the high mode periods, in top-heavy structures.

§1. 序

筆者は20数年前より此の問題に興味を持ち乍ら果し得なかつたが、昭和30年度阿部壽雄君の卒業論文において、梁部分に対して種々なる大きさの質点を有する場合の曲げ理論について、その周期の変化を述べた。しかし或る大きさの剛体を付けた時はその周期につき実験値と理論値とが一致しないこと、特に2次、3次の周期においてこの影響が著しい。

これらの理論については古くティモシェンコがその名著工業振動学において、剛体の慣性モーメント及び剪断力の影響を考慮した場合の式が示してある。本実験の場合には剪断力の影響は小さいので省略した。それよりも梁が相当変形した時の剛体の鉛直方向力による2次の曲

* 建築工学科

げ応力による影響が大であることが分った。この応力を簡単に以下2次応力の影響と仮称する。

即ち本論文は普通曲げ理論に加うるに剛体慣性モーメント及び2次応力の影響を考慮した理論式を求め、或る模型実験にこれを適用した場合の理論値と実験値を比較検討したものである。

この結果より高架水槽、高架高速道路などトップヘビーの構造物即ち置換バネ常数に比し、頂部の重量や慣性モーメントの大きい構造物では固有周期の算出に当り (特に1次は勿論2次3次等について) 慣性モーメント及び2次応力の影響を十分考慮する必要があることを示した。

§2. 理論式とその解

2.1 理論式

梁の曲げ理論によれば周知の如く、撓み曲線と曲げモーメント \mathfrak{M} との関係は (1) 式で表わされる。

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ} = -\frac{d^2y}{dx^2} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

今 $(dy/dx)^2$ が1に比べて無視出来る場合は (2) 式となり一般にこの式が用いられている [(1) 式の解については Taylor 級数の展開と摂動法によって解くことができることは既に筆者が示してある。猶今回の実験においては (2) 式で充分であるので敢えて (1) 式を用いなかった。]

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

又梁断面の曲げ剛性 EJ が一様な場合には下式が成立する。

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EJ} \frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2} = \frac{w}{EJ} \quad (3)$$

w は一般に荷重に相当するものであるが w につき次の3つの場合を考える。

i) 運動体の慣性力

慣性力を考えると

$$w_1 = -\rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

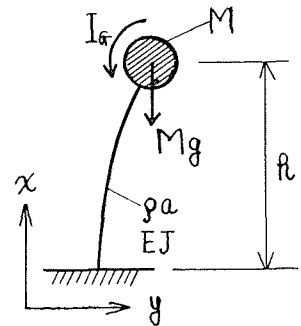
ここに ρ は線密度、 a は断面積 (第1図参照)

ii) 剛体の慣性モーメント I_G を考慮した場合

$$\mathfrak{M}_2 = -I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} = -I_G \frac{d^3y}{dt^2 \cdot dx} \quad (5)$$

$$\text{従って} \quad q_2 = -\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_2}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

$$\text{故に} \quad w_2 = 0 \quad (7)$$



第1図

iii) 剛体の鉛直方向力による 2 次応力の場合

$$\mathfrak{M}_3 = Mg(y_h - y) \quad (8)$$

$$\text{従って } q_3 = Mg \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\text{故に } w_3 = Mg \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (10)$$

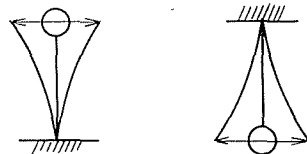
以上を総合すれば下の (11) 式を得る。

$$w = w_1 + w_2 + w_3 = -\rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Mg \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (11)$$

依って (3) 及び (11) 式より、剛体の慣性モーメント及び 2 次応力の影響を考慮した理論式 (12) を得る。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho a}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{Mg}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

$$\text{但し } \begin{cases} g = -980 \text{ cm/sec}^2 \text{ は鉛直上向で振動} \\ g = +980 \text{ cm/sec}^2 \text{ は鉛直下向で振動} \end{cases}$$



第 2 図

2.2 境界条件

境界条件としては次の 4 つの式で与えられる。(第 1 図参照)

$$x = 0; \quad \begin{cases} y = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$x = h; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{I_G}{EJ} \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{M}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{Mg}{EJ} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (15)$$

2.3 理論解

理論式 (12) を (13)~(16) の境界条件を考慮して解くと次の如くなる。

$$\text{解 } y = \left\{ A \left(\cos m_2 x - \cos h m_1 x \right) + B \left(\sin m_2 x - \frac{m_2}{m_1} \sin h m_1 x \right) \right\} \sin \omega t \quad (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{R}{-m_2^2 \cos m_2 h - m_1^2 \cos h m_1 h + \frac{I_G}{\rho a} m_1^2 m_2^2 (m_2 \sin m_2 h + m_1 \sinh m_1 h)} \\ B &= \frac{R}{m_2^2 \sin m_2 h + m_1 m_2 \sin h m_1 h + \frac{I_G}{\rho a} m_1^2 m_2^2 (\sin m_2 h + \sin h m_1 h)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

R は原始条件から定まる定数である。

周期式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{m_1 m_2} \sqrt{\frac{\rho a}{EJ}} \quad (19)$$

ここで m_1, m_2 は次の 2 式の交点として求められる。

$$y_1 = \frac{M}{\rho a h} \sqrt{m_1 m_2} h \quad (20)$$

$$y_2 = \frac{\lambda}{\mu} \quad (21)$$

$$\text{即ち } y_1 = y_2 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \lambda = & (m_1^4 + m_2^4) (1 + \cos m_2 h \cos h m_1 h) + m_1 m_2 (m_1^2 - m_2^2) \sin m_2 h \sin m_1 h \\ & - I_G / \rho a \times m_1^2 m_2^2 (m_1^2 + m_2^2) (m_1 \cos m_2 h \times \sin h m_1 h + m_2 \sin m_2 h \cos h m_1 h) \\ & - (Mg/EJ)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mu = & \sqrt{m_1 m_2} \left[I_G / \rho a \times m_1^2 m_2^2 \left\{ 2m_1 m_2 (\cos m_2 h \times \cos m_1 h - 1) + (m_2^2 - m_1^2) \sin m_2 h \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sin h m_2 h \right\} - (m_1^2 + m_2^2) (m_2 \cos m_2 h \times \sin h m_1 h - m_1 \sin m_2 h \cos h m_1 h) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

式は一見複雑であるが Graphic Solution に依るか電子計算機に依れば容易に求めることができる。

§3. 模型実験

以上の理論式と実際とを比較するため第3図の如き板バネと重錘とを組み合わせた模型実験を行ない理論周期式の結果と実測周期との比較を行なった。

3.1 模型実験

板バネ及び重錘の詳細は次の如くである。

(第3図参照)

バネ; 鋼板 0.95 mm 厚

取付アングル; 黄銅 3.0 mm 厚

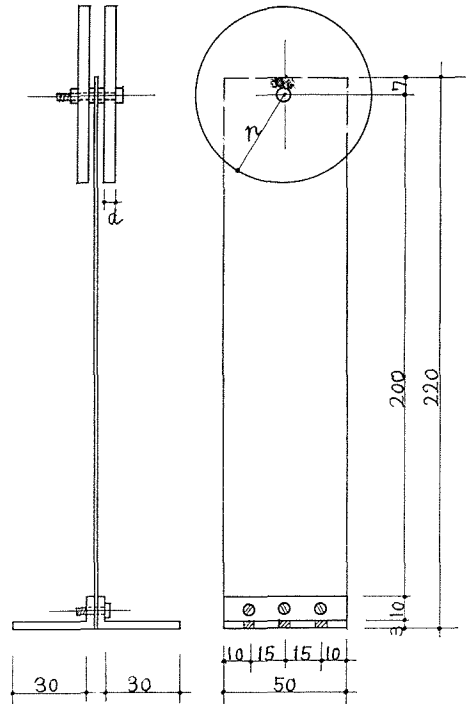
止めビス; 3.0 mmφ

穴径; 全て 5.0 mm

$\rho a = 0.00408 \text{ gr/cm}^2$

$EJ = 8.247 \times 10^5 \text{ gr} \cdot \text{wt} \cdot \text{cm}^2$

重錘	d (mm)	重量 (gr)	I_G (gr·cm ²)
A	6.4	143	0.851
B	10.6	235	1.582
C	15.5	346	2.792
D	21.6	479	4.875
E	28.5	632	8.309
F	45.0	998	22.905



第3図

第1表 板パネの実測周期表

付加荷重 (gr·wt)		水平状態で振動		鉛直状態で振動		
		ナット有り (sec)	ナット無し (sec)	Tension		Compression
				ナット有り (sec)	ナット無し (sec)	ナット有り (sec)
0	1次	0.0529		0.051		0.0523
	2	0.0085		0.008		
	3					
	4	0.0015				
40	1次	0.0890	0.0887	0.0895	0.087	0.0880
	2	0.0106	0.0105	0.0105	0.0101	
	3			0.0036		
	4	0.0019	0.0018	0.0019		
290	1次	0.202	0.2030	0.2092	0.204	0.196
	2	0.0183	0.0156	0.0184	0.0149	
	3	0.0069	0.0049			
	4		0.0021	(0.0009)		
470	1次	0.2525	0.2505	0.2692	0.264	0.242
	2	0.0225	0.0176	0.0228	0.0173	
	3	0.0073	0.0052			
	4			0.0029		
690	1次	0.2955	0.2929	0.3283	0.321	0.285
	2	0.0279	0.0208	0.0279	0.0204	
	3	0.0079	0.0056	0.0076	0.0052	
	4			(0.0015)		
960	1次	0.3461	0.3415	0.396	0.389	0.328
	2	0.0357	0.0254	0.0357	0.0246	
	3	0.0096	0.0066	0.0076	0.0054	
	4	(0.0019)	0.0021	0.0028		
1260	1次	0.3897	0.3872	0.4697	0.463	0.370
	2	0.0452	0.0319	0.0457	0.0306	
	3	0.0112	0.0078	0.0078	0.0058	
	4		0.0021	0.0030		
2000	1次	0.4672	0.4693	0.6626	0.644	0.445
	2	0.0723	0.0515	0.0743	0.049	
	3	(0.0174)	0.0129	0.0079	0.0056	
	4					

第2表 板バネの理論周期表

 $E = 2.31 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とした場合

付加荷重 (gr·wt)		① 1質点系とし ての解 (sec)	② 弾性棒の曲げ 振動として の解 (sec)	③ ②に回転慣性 の項を加え た解 (sec)	④ ③に軸力の項 を加えた解 (Tension) (sec)	④' " (Compression) (sec)
0	1次	0.0504	0.0504	0.0504	0.0504	0.0504
	2		0.0079	0.0079	0.0079	0.0079
	3		0.0029	0.0029	0.0029	0.0029
	4		0.0014	0.0014	0.0014	0.0014
40	1次	0.102	0.0875	0.0875	0.0873	0.0882
	2		0.0104	0.0104	0.0105	0.0105
	3		0.0033	0.0033	0.0034	0.0034
	4		0.0016	0.0016		
290	1次	0.206	0.200	0.200	0.198	0.209
	2		0.0112	0.0167	0.0176	0.0176
	3		0.0034	0.0066	0.0067	0.0067
	4		0.0016	0.0028	0.0028	0.0028
470	1次	0.256	0.252	0.252	0.246	0.265
	2		0.0113	0.0216	0.0213	0.0215
	3		0.0034	0.0071	0.0072	0.0072
	4		0.0016	0.0028	0.0028	0.0028
690	1次	0.305	0.302	0.302	0.291	0.333
	2		0.0113	0.0271	0.0268	0.0271
	3		0.0034	0.0074	0.0074	0.0075
	4		0.0016	0.0029	0.0028	0.0028
960	1次	0.358	0.356	0.356	0.336	0.407
	2		0.0114	0.0345	0.0343	0.0349
	3		0.0034	0.0075	0.0076	0.0077
	4		0.0016	0.0029	0.0028	0.0029
1260	1次	0.409	0.406	0.406	0.376	0.481
	2		0.0114	0.0450	0.0438	0.0448
	3		0.0034	0.0078	0.0077	0.0078
	4		0.0016	0.0029	0.0028	0.0029
2000	1次	0.512	0.512	0.512	0.454	0.678
	2		0.0114	0.0715	0.0706	0.0725
	3		0.0034	0.0078	0.0077	0.0079
	4		0.0016	0.0029	0.0028	0.0029

3.2 実験による実測周期

上述模型を次の3つの場合につき実験を行ない夫々の周期を測定したのが第1表である。表中ナット有り、ナット無しとあるのは付加荷重を板バネに取り付ける際 I_G の回転中心が取り付け中心と一致する如く考慮した場合がナットを入れた場合である。この影響は高次周期において差が出ていることに注目されたい。

- i) 板バネを水平に保持し、上下に振動させた場合
- ii) 板バネを鉛直に保持し、付加錘を上につけて水平に振動させた場合 (compression が板バネにかかる。)
- iii) 板バネを鉛直逆さに保持し、付加錘をつけて水平振動させた場合 (tension が板バネにかかる。)

3.3 理論式による周期

模型につき夫々の諸元を用いて次の5種類につき理論周期を求めた。

- i) 1 質点系としての解; $T = \sqrt{\delta/5}$
 δ ; 水平重力による質点の変位 (cm)
- ii) 弾性棒端に質点があるとしての曲げ振動解
- iii) ii) に回転慣性を加えた場合
- iv) iii) に引張による2次応力を加えた場合
- v) iii) に圧縮による2次応力を加えた場合

以上の結果を表示したのが第2表板バネ理論周期表である。

第2表より次の結果を得た。

1. 質点重量 Mg は当然乍ら1次の固有周期に大なる影響を及ぼす。故に1質点として計算しても i)~iii) の場合には殆んど同一の結果を得た。

2. しかし圧縮状態と引張状態との1次の固有周期につき付加重量 2 kg を例にとれば、前者は後者の1.5倍ものびている点が注目される。

3. しかるに2次の周期に対しては殆んど付加重量の影響は表われない。

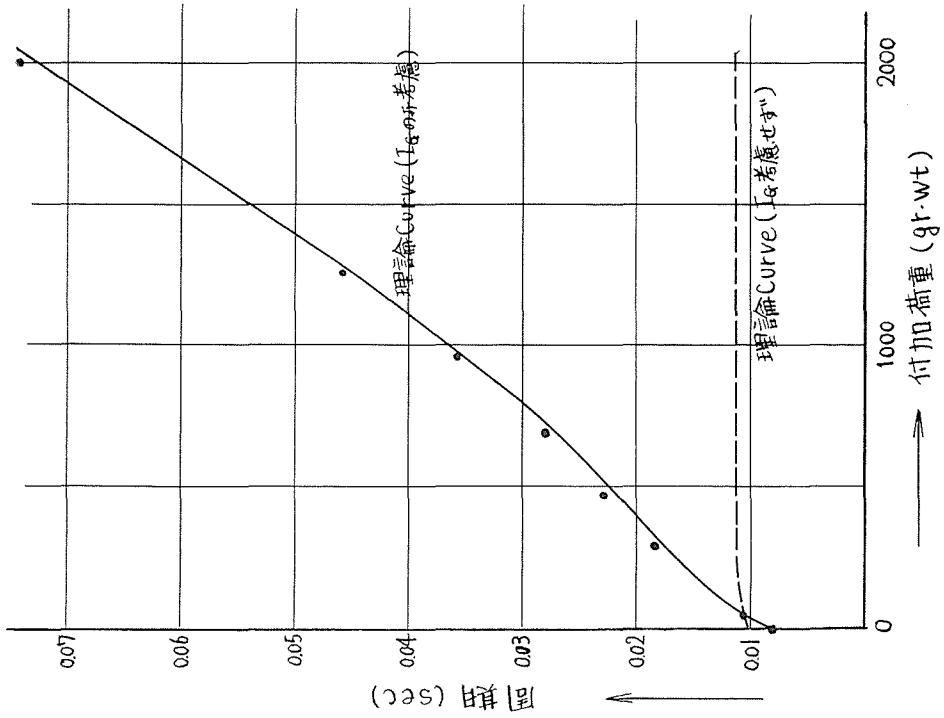
4. 逆に I_G は1次固有周期には殆んど影響を与えないが、

5. 2次、3次、4次の固有周期特に2次の周期に対して I_G の影響は大きく I_G が大きい付加重量 2 kg の場合には実に6~7倍に周期がのびることが分かった。

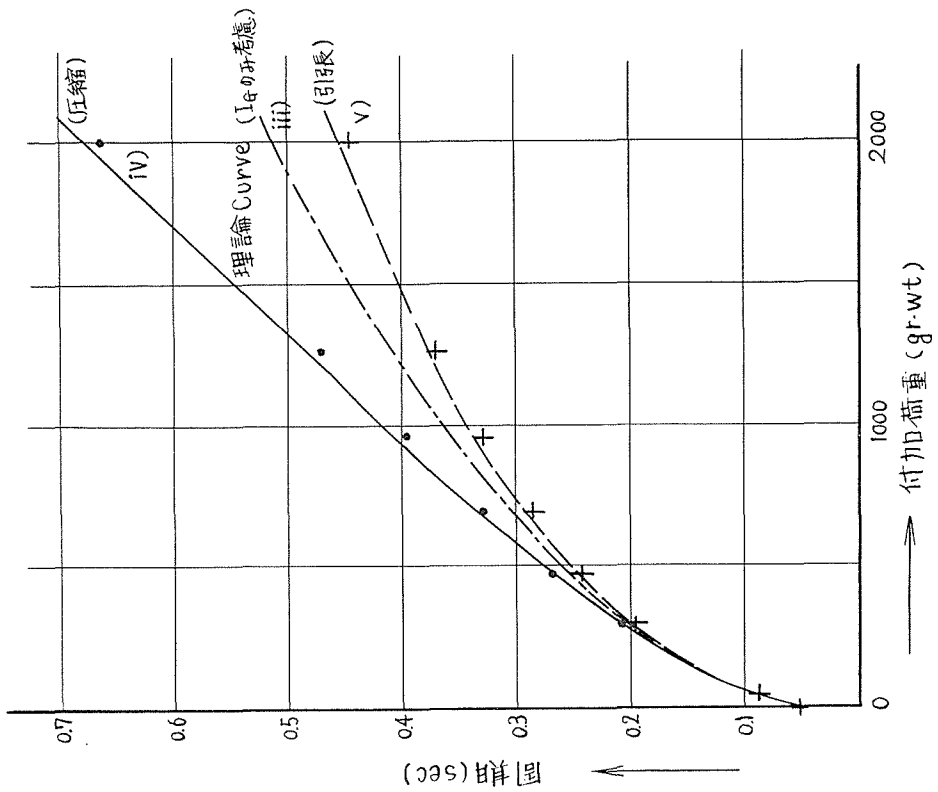
3.4 実験周期と理論周期との比較

以上の結果を1次~4次周期別に周期と付加重量の関係グラフを示したのが第4図~第7図である。

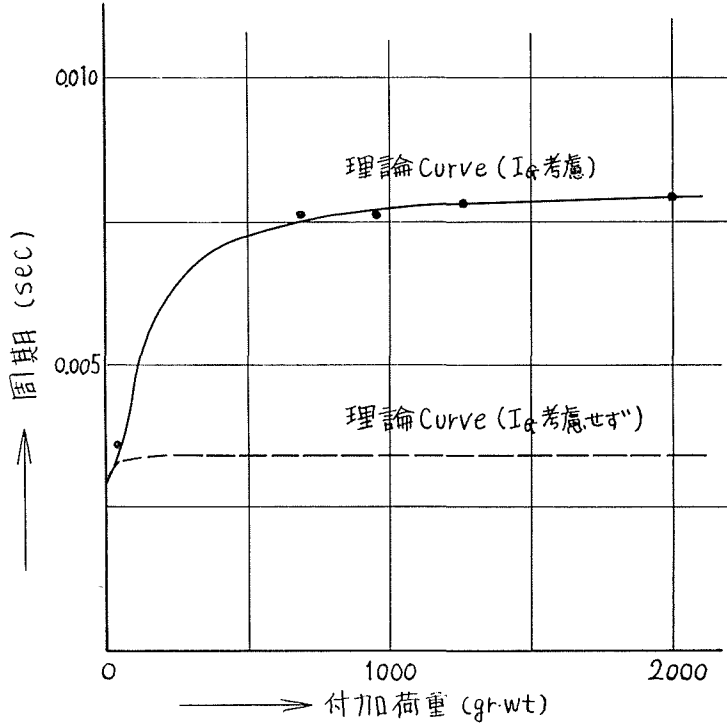
又実験値を(圧縮状態)+(引張状態)で同時に示したが、非常に本理論式が実験値と一致していることを示している。



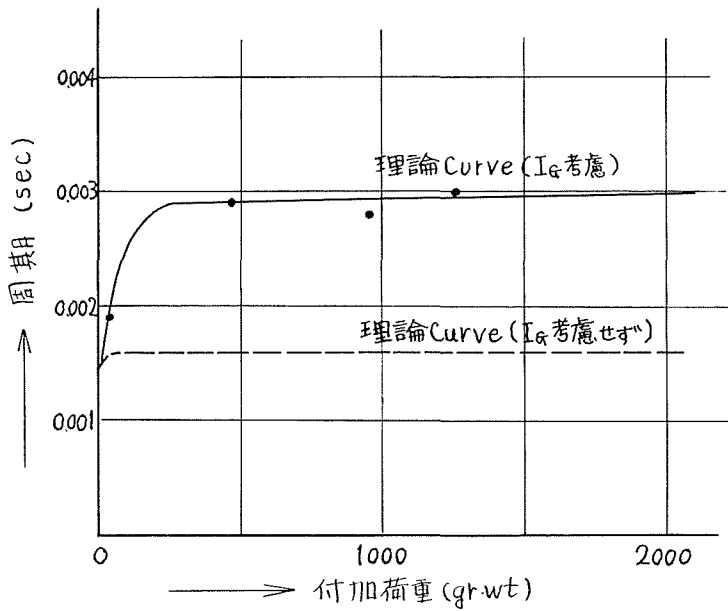
第5図 弾性棒の曲げ振動固有周期 (2次)



第4図 弾性棒の曲げ振動固有周期 (1次)



第 6 図 弾性棒の曲げ振動固有周期 (3 次)



第 7 図 弾性棒の曲げ振動固有周期 (4 次)

§4. 結

本論文は高架水槽や高架高速道路などトップヘビーの構造物においてはその回転慣性及び鉛直方向力による2次的曲げ応力の影響が大であることを示した。即ち従来の式で計算した周期は特に2次, 3次周期において短く, 場合によっては数分の1となっている。構造物の巨大化に伴い地震応答に対し2次, 3次の周期が問題になる場合が考えられるので, 特にかかる構造物の高次周期算出に対して注意を促すものである。

現在筆者らはこれらの強制振動応答の解析を進めているが, その結果は後日に譲ることとする。本研究は筆者の文部省特定研究の一部をなすものである。

猶本実験に対しては長能正武助手, 三浦重幸技官の協力を得たことを付記して感謝の意を表します。