最適制御問題の数値解法

— 二例題からの検討 —

久保田　譲[**]
三浦良一[*]
(昭和43年11月22日受理)

Numerical Solution of Optimal Control Problems

— Consideration from two examples —

Yuzuru KUBOTA
Ryōichi MIURA
(Received November 22, 1968)

Abstract

This paper extends the variable metric minimization method of Davidon to optimal control problems. The technique is directly applicable to unconstrained and control variable constrained problems, because it carries out the problem formulation by the Maximum Principle. If terminal conditions and inequality constraints of state variables are presented, problem must be converted to an unconstrained form ; e. g. by penalty functions.

Two point boundary problems must be finally solved to formulate optimal control problems by the M. P. But this is usually difficult. Hence the problems were treated by extremum seeking methods of Hamiltonian functions. Consequently, it becomes a problem of extremum seeking methods in functional space carried out in such a way as to obtain gradients by solving the initial value problems. According to the two examples presented, the authors compared the present method with Davidon's method and the Modified Steepest Descent method.

A good approximate solution was obtained by iterative calculations.

緒　言

近年，著しく発展した最適制御の理論は一部の特殊な問題を除いては一応体系化されてきており，まとまってきたように思われる。

しかしそれを解いて，実際に解をうるという段階では十分であるとはいえない。

---

*　精密工学科　自動制御工学講座
**　室蘭工業大学　産業機械工学科

最適制御問題を古典変分法，最大原理等で定式化するとすれば最終的には，境界値問題を処理しなければならないという困難な問題に遭遇する。なぜならば境界値問題自体が簡単な場合をのぞいては解析解を求めることが出来ず数値解法となるからであり，この数値解も，特に非線形系や不安定な系では良い近以解を得ることは大変である。そこで境界値問題にせずに解こうとすることが研究されてきている。最適制御問題では，ある評価の最大（最小）を目標にしている点に注目して，評価関数自体の定式化にして繰り返し計算で解くことにより，境界値問題をさけるのである。従ってこれは極値探索問題となるから，結局は探索法の収束のはやさによって計算の能率が決定される。

数空間での極値探索法では種々の試行法が提案され，その収束性が論じられているが，グラジェントを利用する方法では，二次の収束性をもった Davidon[1]の方法が，変数の多少にかかわらず良いとのことであり，筆者らの経験でも同じ結果である。最適制御問題としては関数空間での最大（最小）を必要とするので，必ずしも数空間での結論があてはまる訳ではないが，少なくともグラジェントを利用しない方法では非常に収束が悪くなるであろう。従って従来までの研究のほとんどすべてが，グラジェントを利用した繰り返し計算法であり，グラジェントも容易に解析的に求まるので不都合はない。

一般にこの問題は微分方程式の拘束条件をもつ関数空間極値問題であるので，いかに拘束条件を含んだ一本の式にするかによって，その計算方式が異なってくる。Hsieh[2]のように関数解析により積分にもっていく方法，Bryson and Denham[3]や Kelley[4]のごとく，ラグランジュ乗数に関した条件方程式系を用いる場合などがあるが，系が線形に限ぎられたり，制御変数や状態変数に制限がある場合には複雑となる。従って本研究では制御変数に制限がある場合でも同一の式になる最大原理[5]で定式化し，Davidon の方法によりハミルトニアン関数の極値を初期値問題を解くことによって求めて，最適制御問題の数値解を求めてみた。結局は極値探索法の関数空間への応用であるが，状態変数に制限がある場合でも評価関数に Penalty function を加えることによって容易に解ける。

二つの例題によって，修正最急降下法を適用した場合の比較を行なって検討してみた。

1. 問題の設定

系の動作方程式は n 個の連立微分方程式で記述されるものとする。

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t) \tag{1}$$

初期条件が

$$\boldsymbol{x}(t_o)=\boldsymbol{C} \tag{2}$$

このような系で，次の評価関数 J を

$$J=\phi(\boldsymbol{x}(t_f)) \tag{3}$$

最小にするような制御変数 $\boldsymbol{u}$ (m ベクトル) を決定する。従って，固定された始点 $\boldsymbol{C}$ と自由な終点 (時刻 t_0, t_f は固定) をもつ最適問題となる。ただし，$\boldsymbol{x}$: 状態変数 (n ベクトル) とする。

2. 計算手順の決定

問題は関数空間で (1), (2) 式の微分方程式の拘束条件のもとに (3) 式の汎関数を最小にすることであるから，それを一本にするにはラグランジュの未定乗数を使ってもよいが，ここでは出来るだけ簡単で一般性を持った形で定式化するために最大原理的な方法でハミルトニアン H として導入することにする。従って H を最大にする $\boldsymbol{u}$ を求める問題に変わる。いわば最小—最大問題となる。

$$H=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t) \tag{4}$$

ここで λ は n 個の補助変数で次の微分方程式を満足しなければならなく，また境界条件は終点時刻 t_f での値として与えられる。

$$\dot{\lambda}_i=-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{5}$$

境界条件は

$$\lambda_i(t_f)=-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_{t=t_f} \tag{6}$$

結局，求める極値関数のグラジェント $\boldsymbol{g}$ は

$$g_i(u_i)=\frac{\partial H}{\partial u_i} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m \tag{7}$$

このグラジェントを使って (3) 式が最小になるような $\boldsymbol{u}$ を繰り返し計算で求める訳である。従って $\boldsymbol{g}$ を求めるには順時間で (1), (2) 式を解き，逆時間で (5), (6) 式を解けばよいことになり，いずれも常微分方程式の初期値問題に帰着されたことになる。

さて $\boldsymbol{g}$ を使って J の最小値を求めるのに数空間での極値探索に効果のある Davidon の方法をこの関数空間への極値探索に応用して解く方法を考えてみよう。

まず任意の推定制御変数 $\boldsymbol{u}_0$ から始めて

$$\boldsymbol{u}_0=\text{任意} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{g}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}_0=-A_0\boldsymbol{g}_0 \tag{10}$$

$\boldsymbol{P}_0$ の方向での最小値を与える α を求める。即ち

$$\alpha=\alpha_i \min J(\boldsymbol{u}_i+\alpha\boldsymbol{P}_i) \tag{11}$$

とすると次の近似値は

$$\boldsymbol{u}_{i+1}=\boldsymbol{u}_i+\alpha_i\boldsymbol{P}_i \tag{12}$$

$$A_{i+1}=A_i+Y_i-Z_i \tag{13}$$

ただし

A_0＝単位行列

$Y_i=(\triangle\boldsymbol{u}_i\triangle\boldsymbol{u}_i')/(\triangle\boldsymbol{u}_i'\triangle\boldsymbol{g}_i)$

$Z_i=(A_i\triangle\boldsymbol{g}_i\triangle\boldsymbol{g}_i'A_i)/(\triangle\boldsymbol{g}_i'A_i\triangle\boldsymbol{g}_i)$

$\triangle\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i$

$\triangle\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{g}_{i+1}-\boldsymbol{g}_i$

$A,\ Y,\ Z$: m 正方行列

添字 $'$ は転位ベクトルを表わし，ベクトル同志の積は積分を意味しており，i は繰り返しの回数を示している。

ここで (11) 式で方向 $\boldsymbol{P}$ での最小値を直接，評価関数に入れて求めているが当然 H 関数の最大値として求めても良い筈である。しかしながら，1回の繰り返しごとに H 関数を求めることは，$\boldsymbol{x}$ 及び $\boldsymbol{\lambda}$ を求める必要があり，直接 J に入れて計算すれば $\boldsymbol{x}$ だけの計算ですむので計算量が半分ですむことになる。さらにこのことによって最小—最大問題が最小—最小問題としても扱え便利である。従って (8) から (13) 式までの繰り返し計算は最小値を求めるアルゴリズムとしてあるし，λ の境界条件もそのように与えてある。

次に二つの例題によって種々の検討を行なってみよう。

3. 計　算　例

例　題　1.

外力 (制御関数) u に従う機械系で，次の一次微分方程式で記述される系を考える。この系で位置は x で示される。

$$\dot{x}=-x+u \qquad x(0)=x_0 \tag{14}$$

さらに次の積分評価関数 J を最小にする u を求める問題とする。

$$J=\int_0^T(x^2+ku^2)dt \tag{15}$$

これは (3) 式で与えた評価関数の形と異なるが，評価関数自身を $(n+1)$ 番目の状態変数として追加してやることによって同様に扱うことができる。従って

$$x_2=\int_0^T(x_1^2+ku^2)dt$$

$$\dot{x}_2=x_1^2+ku^2 \qquad x_2(0)=0 \tag{16}$$

$$H=\lambda_1(-x_1+u)+\lambda_2(x_1^2+ku^2) \tag{17}$$

$$\dot{\lambda}_1=\lambda_1-2\lambda_2x_1 \qquad \lambda_1(T)=0$$

$$\dot{\lambda}_2=0 \qquad \lambda_2(T)=-1$$

$$g=\frac{\partial H}{\partial u}=\lambda_1+2k\lambda_2 u$$

よって，$\lambda_2=-1$，定数を $k=0.01$，$T=1$ とすると，グラジェントを求めるべき式として

$$\dot{x}=-x+u \qquad x(0)=1 \tag{18}$$

$$\dot{\lambda}=\lambda+2x \qquad \lambda(1)=0 \tag{19}$$

$$g=\lambda-0.02u \tag{20}$$

ここで，最大原理では $g=0$としてやり (20) 式から u を消去して (18), (19) 式による 2 点境界値問題となるが，連立微分方程式となっており，境界値の与えられかたに注意を要する。この場合は一次の簡単な線形の系であるから解析解も求まるし，重ね合わせ法による数値解も高精度でえられる。Fig. 1 に Davidon の方法と修正最急降下法での評価関数 J の変化の様子を示してあり，Table 1 に各繰り返し回ごとの制御変数 u の値を最適解とともに示し，Fig. 2 には 5 回目の u の時間変化を重ね合わせ法での数値解とをあわせて示してある。

この例題 1 からいえることは最初の推定制御変数（この場合にかぎらず，特に定まった初回の推定は行なわず，$u=0$ から始めている）から 1 回目の近似解で非常に大きな評価関数値での変化がみられることである。さらに 2 回目以降でも制御変数で最適解から離れているのに J ではさほどの変化がないことである。また比較のために用いた修正最急降下法では，方向決定での (10), (13) 式におけ

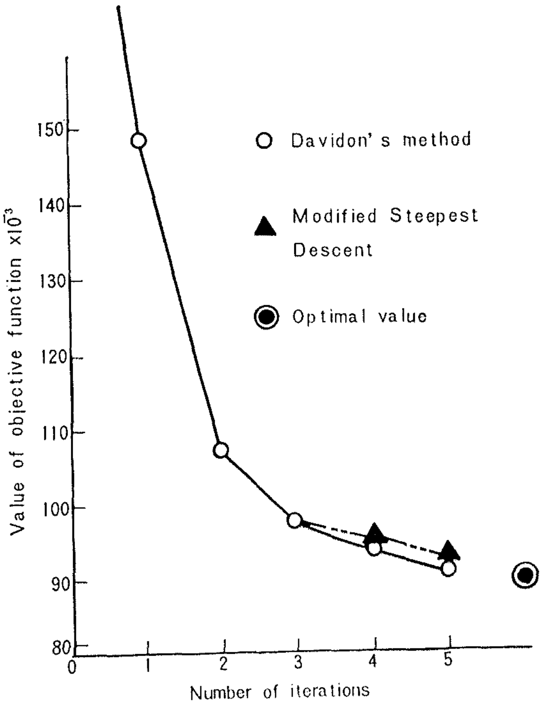

Fig. 1 Behavior of objective J, example one

Table 1 Behavior of control variable u, example one

t \ iterations	1	2	3	4	5	Optimal
0	−2.217	−4.611	−5.186	−6.318	−6.624	−9.049
0.2	−1.676	−1.785	−1.977	−1.618	−1.695	−1.214
0.4	−1.201	−0.294	−0.464	−0.119	−0.217	−0.163
0.6	−0.775	0.277	0.091	0.161	0.057	−0.021
0.8	−0.379	0.276	0.149	0.102	0.040	−0.002
1.0	0	0	0	0	0	−0.000

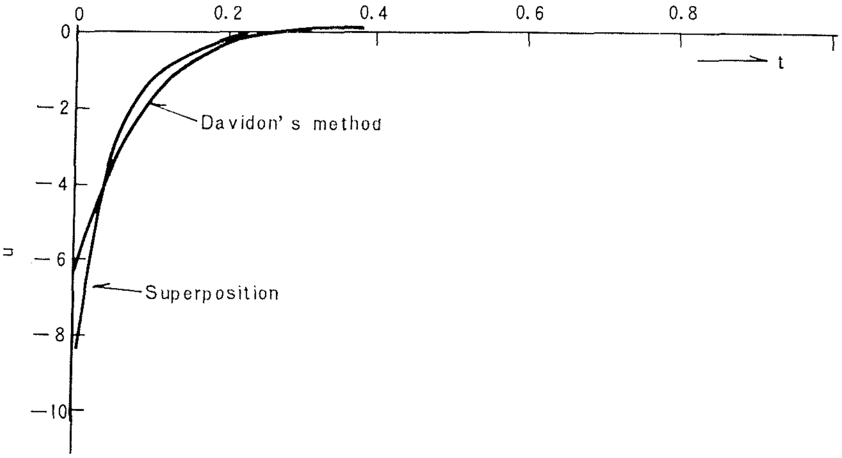

Fig. 2 Control variable u after 5 iterations, example one

る修正係数ともいうべき A 行列を常に単位行列としてやることによって得られる方法なので通常の意味での断続的な最適降下法とは(11)式での最急方向での極値を求めるので異なるものであり，Davidon の方法でも初回は A 行列を単位行列とするため第1回目の探索方向は同じであり，従って1回目の近似解は同じ値となる。この修正最急降下法もかなり効果のある方法であるが，回数を重ねるに従って収束速度が Davidon の方法より悪くなるのは数空間での場合と同様である。簡単な例にもかかわらず5回もの繰り返しでこの程度しか評価関数はともかく制御変数が一致しないのは，数空間と異なるところで，Fig. 2 でもわかる通り，入力が急激に変化する最適解をもつためと思われる。従って Fig. 3 の g が最終的にはすべての時点で0となるべきであるのにその所でまだ十分に0にならず 10^{-2} 程度であることからでも言えるし，まだまだ u の値が変化する可能性を含んでいることになる。

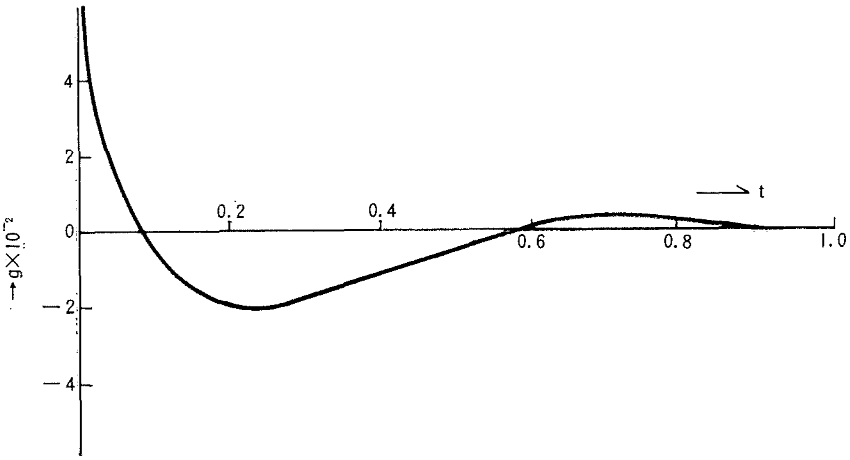

Fig. 3 Gradient trajectories g, example one

例　題　2.

次のような非線形の系で Fig. 4 に示されるブロックダイヤグラムの意味をもつものと考える。

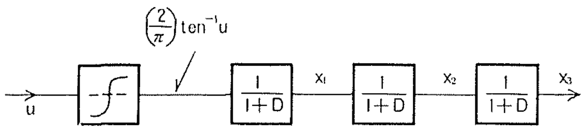

Fig. 4　Block diagram of example two

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2}{\pi}\arctan(u) - x_1 & x_1(0) &= -0.6 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 & x_2(0) &= -0.6 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 & x_3(0) &= 4.0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

次の評価関数 J を最小にする。

$$J = \int_0^T \left[\left(\frac{x_2}{V} \right)^{2l} + x_3^2 + ku^2 \right] dt \tag{22}$$

従って，H 関数及び λ 方程式は

$$H = \lambda_1 \left[\frac{2}{\pi}\arctan(u) - x_1 \right] + \lambda_2(x_1 - x_2) + \lambda_3(x_2 - x_3) + \lambda_4 \left[\left(\frac{x_2}{V} \right)^{2l} + x_3^2 + ku^2 \right] \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1(T) &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 - \lambda_3 - 2l\lambda_4 \left(\frac{x_2}{V} \right)^{2l-1} \cdot \frac{1}{V} & \lambda_2(T) &= 0 \\ \dot{\lambda}_3 &= \lambda_2 - 2\lambda_4 x_3 & \lambda_3(T) &= 0 \\ \dot{\lambda}_4 &= 0 & \lambda_4(T) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

最小—最小問題としてやるので $\lambda_4(T)=1$ としている。グラジェント g は

$$g = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{2\lambda_1/\pi}{1+u^2} + 2\lambda_4 ku \tag{25}$$

ここで系の arctan (u) は $|u| \leqq 1$，さらに評価関数中の $(x_2/V)^{2l}$ は状態変数 x_2 を $x_2 \leqq V$ なる制限を意味しているが，前者の制御変数の制限は無理して系を非線形にしてまで入れなくとも，その制限範囲内での u で H 関数の最小値を求めればよいことであるが，このように系に組み入れるとその意味から少しずれた問題となっている。状態変数の制限でいわゆる penalty function として評価関数に入れると l の大小によって条件がきつくなったり弱くなったりする。ここではこの条件の異なる二種の例について次の諸定数で検討してみた。

(a)　$k=0.01$　　$V=0.5$　　$T=3$　　$m=2$

(b)　$k=0.01$　　$V=0.5$　　$T=3$　　$m=10$

この場合には勿論，解析解も重ね合わせ法の近似解を求めることは出来ない。Fig. 5 に二つの方

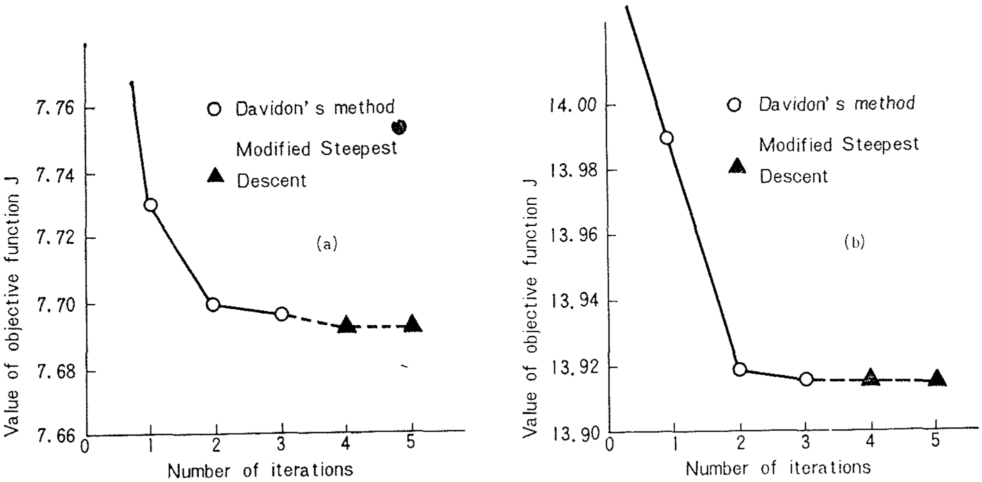

Fig. 5 Behavior of objective J, example two (a)-(b)

Table 2 Behavior of control variable u, example two (a)-(b)

(a) t \ iterations	1	2	3	(b) t \ iterations	1	2	3
0	2.152	2.662	2.886	0	10.47	9.903	9.456
0.4	1.295	1.329	1.586	0.4	0.981	3.566	0.911
0.8	0.657	0.165	0.268	0.8	0.012	−1.194	−1.177
1.2	0.316	−0.233	−0.221	1.2	−0.008	−0.625	−0.621
1.6	0.142	−0.185	−0.161	1.6	−0.002	−0.284	−0.210
2.0	0.057	−0.081	−0.055	2.0	−0.000	−0.103	−0.027
2.4	0.017	−0.018	−0.003	2.4	−0'000	−0.023	0.007
2.8	0.001	−0.000	−0.002	2.8	−0.000	−0.000	0.000
3.0	0	0	0	3.0	0	0	0

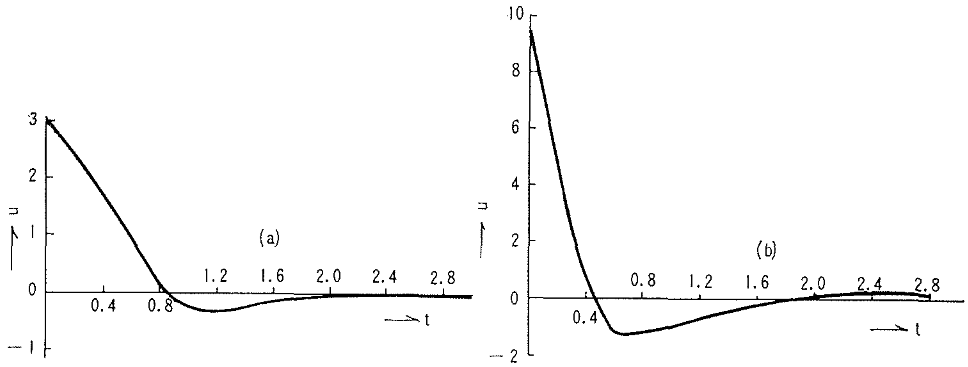

Fig. 6 Control variable u, example two (a)-(b)

法での評価関数 J の減少の様子を示し，Table 2 に 3 回までの繰り返し各回の u の値を表わし，Fig. 6 には u の 3 回目の近似解を示してある。そのグラジェントが Fig. 7 に示してあるがこの値からしてかなりの近似解がわずか 3 回でえられていることがわかる。(b) の例では $l=$

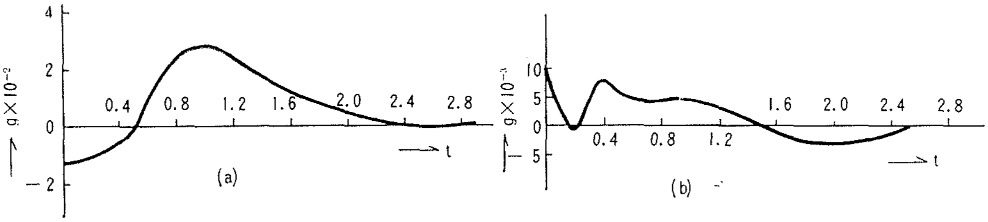

Fig. 7 Gradient trajectories g, example two (a)-(b)

10 なのでかなりきつい条件と思われるが，その場合の状態変数及び補助変数の変化の様子を Fig. 8, Fig. 9 に示したが，これで明らかなごとく λ_1, λ_2 については不安定性の様子があり，特に λ_2 については普通の二点境界値問題の数値解法ではうまく求めることは，順時間方向でやる以上発散したりして無理であるが，この方法のように逆時間方向で解く場合には，状態方程式が安定ならば必ず安定なのでこのような場合にも容易に計算ができる。また $V \leqq 0.5$ を意図したのであるが，これは本質的な制限を意味してはいないことに注意を要する。

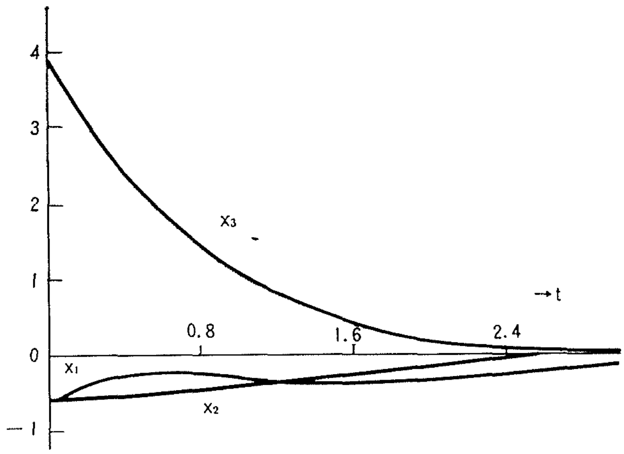

Fig. 8 State variable x, example two (b)

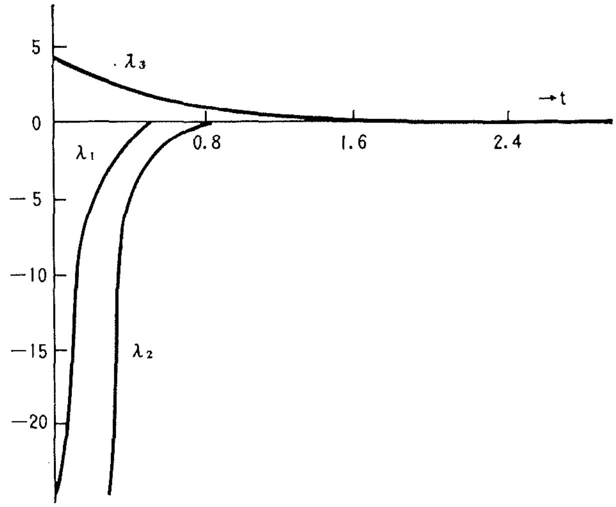

Fig. 9 Auxiliary variable λ, example two (b)

この例題２の結果から，まず例題１での結果と同様に最初から第１回目の近似解での評価関数で非常に大きな相異があることである。これは推定制御変数を用いていないことに起因するのであるが，回数にしてわずか１～２回なので，ある特定の推定値をえらぶ必要性のある問題ではない。修正最急降下法は５回までの近似解を求めて比較してみたが，ほとんど差がなくわずかに Davidon の方法が勝っているにすぎない。

4. 検　　討

以上わずか2例の適用例ではあるが，関数空間での極値探索法の適用に関して考慮すべき問題が種々あるので，個々のものについて検討を加えてみよう。

(i) 方向決定と一次元探索精度

Davidon の方法では結局，極値探索の骨子は (10) 式の方向決定と (11) 式のその方向での一次元部分極値探索である。後者さえ正確に行なわれれば，数空間では二次の収束性をもち，少なくとも線形の系である例題1では，関数空間でもそのことがいえれば2回で最適制御変数値に収束する筈であるが，しかし結果は5回でもまだ最適値にはまだだいぶへだたりがある。これは一次元探索精度に関連することであり，例題ではすべての場合 10^{-2} の精度で計算したので，このような結果となった訳である。特にこの例題では，急激に短時間で変化する解であるから，なおさらこの精度を高めなければならない。このことは例題2からみても明らかであり，このようにゆるやかに変化する解では，非線形でしかもきつい条件を加えた評価をもった系であっても，わずか3回で良い近似解がえられ，あまり精度は問題となっていない。むしろ方向決定でのこの方法の特徴はこの例題のような1制御入力ではなく多入力で発揮されると思われる。

一次元探索の精度をあげなければならない問題では方向の決定回数よりも，一次元探索に時間がかかるということになり，数空間での一次元探索で有力な Fibonacci の数列を使ってもまだ不十分で，極値座標内挿の考えを導入して，数回で部分極値を決定する必要があるが，精度が保証できないのでさらに今後検討を要する問題である。

(ii) 記　憶　容　量

電子計算機で計算するので記憶させねばならない容量が，重要な課題であるが，最大限で $(2n+4m)\times$ 分割数となり，多入出力の系ではかなりの記憶を必要とするが，これは最大限での必要容量であり，大低の問題はこれほど必要でないのが普通である。

(iii) 微分方程式解法の精度

本例題ではいずれも Runge-Kutta 法で数値解を求めたが，分割数によって精度は変わるが部分極値探索の精度に見合ったもので十分であると考える。

(iv) 分割数の問題

記憶容量とも関係するが，長時間後の評価を要する場合は，分解などの方法で分けて計算する必要があるが，その他の場合はそれほどの問題はない。

(v) 計算停止の判定

例えば，グラジェントの二乗積分値などで与えたりすればよいが，これは評価値の変動で判定するよりは良い近似解をうることができるが，絶対近似度評価はできない。

(vi) 他方法との比較

本例では修正最急降下法としか比較してないが，普通の意味での最急降下法とはくらべてみるまでもなく Davidon 法の方が良い。修正最急降下法とでは評価関数値ではわずかに良いだけであるが，これは全く当然で，実際には多制御変数の場合には相当の差異があるものと思う。また本例のような1制御入力系でも方向値に修正係数がかかっているだけ，一次元探索では，精度を上げるのに計算回数が少なくてすむことは，重要な長所であると思われる。

5. 結　　言

以上種々の問題点で検討を加えたごとく，一応最適制御問題の解法に Davidon 法が効率良く使えることがわかったが，一次元探索方法では，まだ検討の余地を残している。これされもう少し改良できれば，十分収束の速い繰り返し計算法として関数空間に適用できるものと考える。

例題計算はすべて， FACOM 231 計算機によった。最後に日頃御援助をいただいている精密工学科自動制御研究室の皆様に謝意を表する。

引用文献

1) Fletcher R. & Powell M. J. D.: A rapidly convergent descent method minimization. Computer Journal Vol. 6 (1963)
2) Hsieh H. C.: Synthesis of opimum multivariable control systems by the method of steepest descent. IEEE Trans. Appl. Ind. Vol. 82 (1963)
3) Bryson A. E. & Denham W. F.: A steepest ascent method for solving optimum programming problems. Journal Appl. Mech. Vol. 29, No. 2 (1962)
4) Kelley H. J.: Method of gradients, chap. 6, Optimization Techniques (ed. Leitmann), Academic Press (1962)
5) Noton A. R. M.: Introduction to variatonal methods in control engineering. Pergamon Press (1962)