線型システムの係数の推定について

石　川　　治*
安　田　一　次*
(昭和43年12月4日受理)

Estimation of the Linear System Parameters

Osamu ISHIKAWA
Ichiji YASUDA
(Received December 4, 1968)

Abstract

The object of this paper is to estimate linear system parameters (coefficients) from given sampled data.

This procedure consists of two stages. The first stage is the estimation of the parameters in the higher order difference equation from given sampled responses. In this case, for process noise and error of measurement included in the data, the method of least squares is applied, and a compensation method for linear dependence induced sampled data matrix was also discussed.

The second stage is parameter conversion of difference equation to differential equation, in which the formula of derivative function is approximately used.

目　　　次

* 電気工学科　電気回路学講座
Department of Electrical Engineering, Faculcy of Engineering, Hokkaido University

1. まえがき

線型システムの伝達関数やあるいは運動方程式の係数を推定する，いわゆる同定 (Identification) の手法については既に数多くの研究がなされている。

それらを大別すると，適当な入力に対する実際のシステムの応答とモデルシステムの応答との出力差を小さくするように，最大傾斜法その他を用いてモデルのパラメータを最適方向へ修正していく繰り返し計算法[1)]と，ある適当な入力に対するシステムの応答の一連のデータから一回の計算で各パラメータを算定しようとする確定的な計算法[2)]とに別けられる。

そのどちらについてもそれぞれ長短があるが，計算法の簡便さと，オンライン推定への可能性とから，後者に属する，システムの応答の適当な期間のサンプル値からそのシステムの高階微分方程式の各係数を直接決定する方法を考察した。考え方は数学的には極めて平易な誘導によっているが，現在のところ，システムへの入力はステップに限定されている。

さらに，サンプルされたデータにある種の特定な雑音や誤差を含む場合についても解析を加え，HYBRID 計算機でシミュレートした有効数字の少ないデータを用いても，データの選び方によってはかなり有効であることを確かめた。

また，ごく近接したサンプル値どうしが一次結合に近いところからくる計算過程での一種の情報落ちに対する改善法についても検討して，計算精度の向上がみられたので，計算例も含めて，その計算法を報告する。

2. 一般的計算法

2.1 あらすじ

(1) システムのステップ応答 (実際に用いるのは，ステップ入力とそれに対するシステムの出力との偏差応答) の適当な個数の一定周期サンプル値から，そのシステムの高階定差方程式の係数を決定する。

(2) (1) で求めた係数から，システムの行列形連立定差方程式

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_k$$

の $n \times n$ 係数行列 $\boldsymbol{P}$ を近似計算する。ただし $\boldsymbol{X}_k$ は n 次元状態変数ベクトルで，

$$\boldsymbol{X}_k = \{x_k^1,\ x_k^2,\ \cdots,\ x_k^n\}'$$

ここで

$$x_k^1 = x(kT)$$

$$x_k^2 = dx_k^1/dt = d\left\{x(kT)\right\}\Big/dt$$

$$x_k^3 = dx_k^2/dt = d^2\left\{x(kT)\right\}\Big/dt^2$$

$$\vdots$$

および，T はサンプル周期であり，$'$ は転置を表わす。

(3) 連立定差方程式 $\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_k$ を連立微分方程式 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$ に変換する。ここで $\boldsymbol{A}$ も $n\times n$ 正方行列で，また・は時間微分を表わす。

(4) 連立微分方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が求まれば，システムの高階微分方程式はよく知られた方法で容易に求められる。

2.2 高階定差方程式の係数の算出 ((1)について)

この報告で最も主要な部分はこの過程であるが，データに雑音や誤差を含む場合の処理，あるいは計算の際の情報落ちの改善の記述は後の章に独立させ，ここでは雑音，誤差も含まず，情報落ちも生じないとして完全に理論的な解析のみにとどめる。

いま，同定対象のシステムのステップ入力に対する偏差応答のサンプル値を x_k $(k=0,1,2,\cdots)$ とすると，そのシステムが n 階であれば1ケずつ離れたサンプル値に対して次のような n 階定差方程式が成り立つ。

$$x_{k+n}+P_1x_{k+n-1}+P_2x_{k+n-2}+\cdots+P_{n-1}x_{k+1}+P_nx_k=0 \tag{1}$$

係数が時間について不変であるならば，さらに1ケずつずらしたサンプル値に対しても同様にして，

$$\begin{aligned} &x_{k+n+1}+P_1x_{k+n}+\cdots+P_{n-1}x_{k+2}+P_nx_{k+1}=0\\ &\quad\vdots\\ &x_{k+2n-1}+P_1x_{k+2n-2}+\cdots+P_{n-1}x_{k+n}+P_nx_{k+n-1}=0 \end{aligned} \tag{1$'$}$$

が成り立つ。従ってサンプル値 x_k の適当な個数があれば(1)および(1)$'$式から

$$\begin{pmatrix} P_n\\ \vdots\\ P_2\\ P_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_k, & x_{k+1}, & \cdots & x_{k+n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{k+n-2}, & x_{k+n-1}, & \cdots & x_{k+2n-3}\\ x_{k+n-1}, & x_{k+n}, & \cdots & x_{k+2n-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+n}\\ \vdots\\ x_{k+2n-2}\\ x_{k+2n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

が成り立つ。ここで行列の肩の -1 は逆行列をとることを意味する。(2)式から明らかなように，n 階のシステムではサンプル値 x_k が $2n$ ケ以上あれば，係数 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ を理論的には求めることができる。

2.3 連立定差方程式への変換 ((2)について)

(1)式のような高階定差方程式で記述されるシステムを，サンプル値系の状態空間において表わす際にはしばしばその状態変数を

$$x_k^1=x_k,\quad x_k^2=x_{k+1}^1,\quad x_k^3=x_{k+1}^2,\quad \cdots$$

ととることが行なわれる[3)]。

しかしこの報告では，連立定差方程式の係数行列 $\boldsymbol{P}$ を連立微分方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ へ変換することを前提としているので，サンプル値系の状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{X}_k=\{x_k^1,\ x_k^2,\ \cdots,\ x_k^n\}' \tag{3}$$

と，連続系の状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{X}(t)=\left\{x^1(t),\ x^2(t),\ \cdots,\ x^n(t)\right\}' \tag{4}$$

とが等しく対応しなければならない。すなわち

$$x_k^1=x^1(kT),\quad x_k^2=x^2(kT),\quad \cdots$$

なる状態変数についての連立定差方程式を必要とする。

そこでいま，サンプル周期 T を充分に小さくすると，導関数の公式から近似的に，

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{T}=\frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}\simeq\frac{dx(kT)}{dt}=\frac{dx_k}{dt} \tag{5}$$

とおけることを用いると，

$$\begin{aligned} x_{k+1}^1&=x_k^1+Tx_k^2\\ x_{k+1}^2&=x_k^2+Tx_k^3\\ &\vdots\\ x_{k+1}^{n-1}&=x_k^{n-1}+Tx_k^n \end{aligned} \tag{6}$$

が直ちに得られ，残る x_{k+1}^n がなんらかの形で $x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^n$ の関数として表わされると，連立定差方程式は完成し，係数行列 $\boldsymbol{P}$ が求まることになる。

まず $x_k=x_k^1$ とおき，(1) 式を x_k^1 についての定差方程式

$$x_{k+n}^1+P_1x_{k+n-1}^1+\cdots+P_{n-1}x_{k+1}^1+P_nx_k^1=0 \tag{7}$$

として，左辺の各項毎に展開する。

$$\left.\begin{aligned} x_{k+n}^1&=x_{k+n-1}^1+Tx_{k+n-1}^2\\ &=x_{k+n-2}^1+2Tx_{k+n-2}^2+T^2x_{k+n-2}^3\\ &=\cdots\cdots\\ &=x_k^1+nTx_k^2+\binom{n}{2}T^2x_k^3+\cdots+\binom{n}{i-1}T^{i-1}x_k^i\\ &\qquad+\cdots+\binom{n-1}{n-2}T^{n-1}x_k^n+T^{n-1}x_{k+1}^n\\ x_{k+n-1}^1&=x_k^1+(n-1)\,Tx_k^2+\binom{n-1}{2}T^2x_k^3+\cdots+\binom{n-1}{i-1}T^{i-1}x_k^i\\ &\qquad+\cdots+\binom{n-1}{n-2}T^{n-2}x_k^{n-1}+T^{n-1}x_k^n\\ &\vdots\\ x_{k+1}^1&=x_k^1+Tx_k^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

これらを (7) 式に代入し各項の係数を整理すると（ただし，$P_0=1$）

$$\begin{aligned} x_k^1\ \text{の係数}&=1+P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}+P_n=\sum_{j=0}^{n}P_j\\ x_k^2\ \text{の係数}&=nT+P_1(n-1)\,T+P_2(n-2)\,T+\cdots+P_{n-1}T \end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= T\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)P_j \\
&\ \ \vdots \\
x_k^i \text{ の係数} &= \binom{n}{i-1}T^{i-1}+P_1\binom{n-1}{i-1}T^{i-1}+\cdots+P_{n-i+1}\binom{i-1}{i-1}T^{i-1} \\
&= T^{i-1}\sum_{j=0}^{n-i+1}\binom{n-j}{i-1}P_j \\
&\ \ \vdots \\
x_k^n \text{ の係数} &= T^{n-1}\Big\{(n-1)+P_1\Big\} \\
x_{k+1}^n \text{ の係数} &= T^{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

従って

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}^n = &-\Bigg[\left\{\frac{1}{T^{n-1}}\sum_{j=0}^{n}P_j\right\}x_k^1+\left\{\frac{1}{T^{n-2}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-j}{1}P_j\right\}x_k^2 \\
&+\cdots+\left\{\frac{1}{T^{n-i}}\sum_{j=0}^{n-i+1}\binom{n-j}{i-1}P_j\right\}x_k^i+\cdots+\left\{\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{2}\binom{n-j}{n-2}P_j\right\}x_k^{n-1}+(n-1+P_1)\,x_k^n\Bigg] \\
= &-\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{T^{n-i}}\sum_{j=0}^{n-i+1}\binom{n-j}{i-1}P_j\right\}x_k^i-(n-1+P_1)\,x_k^n \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となり，x_{k+1}^n も **2.2** で求めた係数 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ を用いて表わすことができて，連立定差方程式 $\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_k$ の係数行列 $\boldsymbol{P}$ が得られる。具体的には $\boldsymbol{P}$ は次のような行列である。

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}
1, & T, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\
0, & 1, & T, & 0, & \cdots, & 0 \\
0, & 0, & 1, & T, & \cdots, & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & T \\
\multicolumn{5}{c}{-\dfrac{1}{T^{n-i}}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-i+1}\binom{n-j}{i-1}P_j \quad ,} & -(n-1+P_1)
\end{pmatrix} \qquad (11)
$$
$$(1\leqq i\leqq n-1)$$

2.4　連立定差方程式から連立微分方程式への変換 ((3), (4) について)

連立微分方程式 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ が与えられたとき，それに対応するサンプル周期 T による連立定差方程式を $\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}_k$ とすると，それぞれの係数行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{P}$ との間に，

$$\boldsymbol{P}=\exp(\boldsymbol{A}T)=\boldsymbol{I}+T\boldsymbol{A}+\frac{T^2\boldsymbol{A}^2}{2!}+\frac{T^3\boldsymbol{A}^3}{3!}+\cdots \qquad (12)$$

なる関係があることはよく知られている[4)]。ただし $\boldsymbol{I}$ は単位行列である。

いまの場合には逆に **2.3** で $\boldsymbol{P}$ が近似的に得られたわけであるからそれから $\boldsymbol{A}$ を求めるためには

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\log\boldsymbol{P}=\frac{1}{T}\left\{(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})-\frac{(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})^2}{2}+\frac{(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})^3}{3}-\cdots\right\} \qquad (13)$$

なる対数行列のべき級数展開を行なえばよい[5)]。

しかし，(12)式のような指数関数のべき級数は必ず収束するが，(13)式のような対数関数の場合には必ずしも収束せず，収束のための条件として $\boldsymbol{P}$ の各要素は次の関係を満足しなければならない。

$$\begin{cases} 0 \leqq P_{ii} \leqq 2 \\ -1 \leqq P_{ij} \leqq 1, \quad i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

さて以上のようにして $\boldsymbol{A}$ が求まると，同定対象のシステムの n 階微分方程式

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \tag{15}$$

の係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は比較的容易に計算でき，一方別の問題として，$\boldsymbol{A}$ の固有値を求めることによりシステムの特性根の位置を知ることもできて，その意味でシステムの同定が完了する。

2.5 高階定差方程式から高階微分方程式への直接の変換

2.2 で得られた n 階定差方程式の係数 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ から **2.3**, **2.4** の方法とは別に，行列のべき級数展開を行なうことなしに近似の精度は一段下がるが，直接 n 階微分方程式の係数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を代数的に求めることも可能である。

そのためにまず

$$\left.\begin{aligned}
x_k^1 &= x_k = x_k^1 \\
x_k^2 &= \frac{dx_k}{dt} = \frac{x_{k+1}^1 - x_k^1}{T} \\
x_k^3 &= \frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{x_{k+1}^2 - x_k^2}{T} = \frac{x_{k+2}^1 - 2x_{k+1}^1 + x_k^1}{T^2} \\
&\vdots \\
x_k^{n-j+1} &= \frac{d^{n-j}x_k}{dt^{n-j}} = \frac{x_{k+n-j}^1 - (n-j)\,x_{k+n-j-1}^1 + \cdots + (-1)^{n-j}x_k^1}{T^{n-j}} \\
&\vdots \\
x_k^n &= \frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}} = \frac{x_{k+n-1}^1 - (n-1)\,x_{k+n-2}^1 + \cdots + (-1)^{n-1}x_k^1}{T^{n-1}} \\
x_k^{n+1} &= \frac{d^n x_k}{dt^n} = \frac{x_{k+n}^1 - nx_{k+n-1}^1 + \cdots + (-1)^n x_k^1}{T^n}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(16)式を

$$\frac{d^n x_k}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x_k}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x_k}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx_k}{dt} + a_n x_k = 0 \tag{17}$$

に代入して両辺に T^n を掛けて整理すると

左辺

$$\begin{aligned}
&= x_{k+n}^1 - nx_{k+n-1}^1 + \cdots + (-1)^n x_k^1 \\
&+ a_1 T\left\{x_{k+n-1}^1 - (n-1)\,x_{k+n-2}^1 + \cdots + (-1)^{n-1}x_k^1\right\} \\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+a_j T^j\left\{\cdots(-1)^{2n-j-i}\binom{n-j}{n-i}x^1_{k+n-i}+\cdots+(-1)^{n-j}x^1_k\right\}\\
&+\cdots\cdots\\
&+a_{n-1}T^{n-1}\left\{(-1)^2x^1_{k+1}+(-1)^1x^1_k\right\}\\
&+a_nT^n\left\{(-1)^0x^1_k\right\}\\
&=x^1_{k+n}\left\{(-1)^{2n}\right\}\\
&+x^1_{k+n-1}\left\{(-1)^{2n-1}n+(-1)^{2n-2}a_1T\right\}\\
&+\cdots\cdots\\
&+x^1_{k+n-i}\left\{(-1)^{2n-i}\binom{n}{n-i}+(-1)^{2n-i-1}\binom{n-1}{n-i}a_1T+\cdots\right\}\\
&+\cdots\cdots\\
&+x^1_{k+1}\left\{(-1)^{n+1}n+(-1)^n(n-1)a_1T+\cdots+(-1)^2a_{n-1}T^{n-1}\right\}\\
&+x^1_k\left\{(-1)^n+(-1)^{n-1}a_1T+\cdots+(-1)^1a_{n-1}T^{n-1}+(-1)^0a_nT^n\right\}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

(7) 式と (18) 式との間に未定係数法を用いると，

$$
\left.
\begin{aligned}
P_1&=(-2)^{2n-1}n+(-1)^{2n-2}a_1T\\
P_2&=(-1)^{2n-2}\binom{n}{n-2}+(-1)^{2n-3}\binom{n-1}{n-2}a_1T+(-1)^{2n-4}\binom{n-2}{n-2}a_2T^2\\
&\ \vdots\\
P_i&=(-1)^{2n-i}\binom{n}{n-i}+(-1)^{2n-i-1}\binom{n-1}{n-i}a_1T+\cdots\\
&\quad+(-1)^{2n-i-j}\binom{n-j}{n-i}a_jT^j+\cdots\\
&\ \vdots\\
P_{n-1}&=(-1)^{n+1}\binom{n}{1}+(-1)^n\binom{n-1}{1}a_1T+\cdots+(-1)^2\binom{1}{1}a_{n-1}T_{n-1}\\
P_n&=(-1)^n\binom{n}{0}+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{0}a_1T+\cdots+(-1)^0\binom{0}{0}a_nT^n
\end{aligned}
\right\}
\tag{19}
$$

これらは行列形でまとめて表わすことができ

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}=\tilde{\boldsymbol{P}} \tag{20}$$

ここで n 次ベクトル $\tilde{\boldsymbol{P}}$ の第 i 要素は

$$\tilde{P}_i=P_i-(-1)^{2n-i}\binom{n}{n-i} \tag{21}$$

$n\times n$ 行列 $\boldsymbol{G}$ の i 行 j 列要素は

$$g_{i,j}=\begin{cases}(-1)^{2n-(i+j)}\binom{n-j}{n-i}T^j, & \text{for} \quad i\geqq j\\ \quad 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & \text{for} \quad i<j\end{cases} \tag{22}$$

従っていま求めたい n 階微分方程式の係数ベクトル $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}'$ は

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{G}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{P}} \tag{23}$$

として求まる。なお，(20) 式は具体的には次式のような形である。

$$\begin{pmatrix}(-1)^{2n-2}\binom{n-1}{n-1}T, & 0, & 0,\ \cdots, & 0\\ (-1)^{2n-3}\binom{n-1}{n-2}T, & (-1)^{2n-4}\binom{n-2}{n-2}T^2, & 0,\ \cdots, & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (-1)^{2n-i-1}\binom{n-1}{n-i}T, & (-1)^{2n-i-2}\binom{n-2}{n-i}T^2, & \cdots\cdots\cdots, & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (-1)^{n}\binom{n-1}{1}T, & (-1)^{n-1}\binom{n-2}{1}T^2, & \cdots\cdots\cdots, & 0\\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0}T, & (-1)^{n-2}\binom{n-2}{0}T^2, & \cdots\cdots\cdots, & (-1)^0\binom{0}{0}T^n\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1-(-1)^{2n-1}\binom{n}{n-1}\\ P_2-(-1)^{2n-2}\binom{n}{n-2}\\ \vdots\\ P_i-(-1)^{2n-i}\binom{n}{n-i}\\ \vdots\\ P_{n-1}-(-1)^{n+1}\binom{n}{1}\\ P_n-(-1)^{n}\binom{n}{0}\end{pmatrix} \tag{24}$$

3.　簡単な実例での近似の精度の比較

前章において，n 階定差方程式の係数 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ から n 階微分方程式の係数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ を近似的に求めるための 2 通りの計算法を述べたが，この章では，具体的に簡単な 2 階のシステムについてその計算法の有効性と，2 者の精度の比較を行なう。

次式で表わされるシステムを考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x(t)=0 \tag{25}$$

このシステムの係数は明らかに

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = 1 \tag{26}$$

である。ここで $x = x^1$ とおくことにより

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= -x^1 - 2x^2 \end{aligned} \tag{27}$$

なる形の連立微分方程式が得られ，その係数行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0\,, & 1 \\ -1\,, & -2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

である。これから指数行列のべき級数展開により，連立定差方程式の係数行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \exp(\boldsymbol{A}T) = \begin{bmatrix} P_{11}, P_{12} \\ P_{21}, P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999950333 \,, & 0.009900500 \\ -0.009900500\,, & 0.980149333 \end{bmatrix} \tag{29}$$

となる。ただしサンプル周期は $T = 0.01$ sec とした。

この係数行列 $\boldsymbol{P}$ から2階定差方程式の係数 P_1, P_2 を求めると，

$$\begin{cases} P_1 = -(P_{11} + P_{22}) = -1.980099666 \\ P_2 = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21} = 0.980198672 \end{cases} \tag{30}$$

実際には P_1, P_2 はサンプル値から前章 **2.2** の方法で求めるわけであるが，ここでは $P_1, P_2, \cdots, P_n$ から $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を求める近似計算法の数値解析を行なうことが目的であるので，P_1, P_2 には (30) 式の理論的真値を用いる。

さてここで，a_1, a_2 を前章に述べた2通りの方法で近似計算してみる。

(1)　**2.3, 2.4** の方法の例

(11) 式を2階のシステムに適用すると，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 \,, & T \\ -(1+P_1+P_2)/T\,, & -(1+P_1) \end{bmatrix} \tag{31}$$

となる。これに (30) 式の P_1, P_2 を代入すると，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 \,, & 0.01 \\ -0.0099006\,, & 0.980099666 \end{bmatrix} \tag{32}$$

さらに (13) 式に従って行列 $\boldsymbol{P}$ をべき級数展開すると，連立微分方程式の係数行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{0.01} \log \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0050167 \,, & 1.0100501 \\ -1.0000102\,, & -2.0050177 \end{bmatrix} \tag{33}$$

故に2階の微分方程式の係数は

$$\begin{cases} a_1 = -(a_{11} + a_{22}) = 2.0000010 \\ a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.9999927 \end{cases} \tag{34}$$

となる。

(2)　2.5 の方法の例

(23) 式を2階のシステムに適用すると，

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\ , & 0 \\ -T\ , & T^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_1+2 \\ P_2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1+2)/T \\ (P_1+P_2+1)/T^2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

となるからこれに (30) 式の P_1, P_2 の値を入れると，

$$\begin{cases} a_1 = 1.9900334 \\ a_2 = 0.99006 \end{cases} \tag{36}$$

となる。

例題のシステムの真の係数 (26) 式と，２通りの方法で求めた近似値 (34) および (36) 式を比較して明らかなように，2.3, 2.4 の計算法によると極めて高精度での係数の変換を可能とし，一方，2.5 の方法によっても 1% 程度の誤差で変換することができ，しかも計算の手続きははるかに簡単であるといえる。

4.　雑音および測定誤差を含む場合

高階定差方程式の係数が精確に求まった後，それを用いて高階微分方程式の係数へ変換するための計算法は具体例を前章に示したようにかなり精度が良く有効であることが確かめられたが，一般の場合，この推定法で最も重要であり，かつ困難な部分はサンプルされたデータから定差方程式の係数を求める過程である。

実際の問題として 2.2 に示したような単純な理論的誘導を実用に際し強く阻害する最大の原因として次の２点が指摘される。

(1)　システムに信号として入れた入力の他に，外乱やランダムなパラメータ変動等の雑音を生じたり，アナログ量のシステムの応答をサンプルデータとして読み取る際に測定誤差を伴うこと。

(2)　サンプル周期を小さくとることによって，(2) 式のサンプル値行列の各行要素間が非常に一次結合に近くなり，逆行列演算の際に著しい桁落ちが生じ，求めるべき係数の精度を非常に劣下させること。

(2) については次の章にゆずり，この章では (1) のサンプルデータに雑音，誤差を含む場合における処理の一方法を述べる。

よく知られているように入力 u_k を含むサンプル値系の n 階定差方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} &x_{k+n}+P_1 x_{k+n-1}+P_2 x_{k+n-2}+\cdots+P_{n-1} x_{k+1}+P_n x_k \\ &\quad = q_1 u_{k+n-1}+q_2 u_{k+n-2}+\cdots+q_{n-1} u_{k+1}+q_n u_k \end{aligned} \tag{37}$$

ここでいまの場合 u_k はシステムの雑音とする。一方応答 x_k の測定の際に誤差 v_k を含むものとすると，測定値 Z_k は次式で表わされる。

$$Z_k = x_k + v_k \tag{38}$$

(37), (38) 式を測定値 Z_k に関する n 階定差方程式に書き直すと，

$$\begin{aligned} &Z_{k+n}+P_1Z_{k+n-1}+P_2Z_{k+n-2}+\cdots+P_{n-1}Z_{k+1}+P_nZ_k \\ &= v_{k+n}+P_1v_{k+n-1}+P_2v_{k+n-2}+\cdots+P_{n-1}v_{k+1}+P_nv_k \\ &\quad + q_1u_{k+n-1}+q_2u_{k+n-2}+\cdots+q_{n-1}u_{k+1}+q_nu_k \end{aligned} \tag{39}$$

となる。ここで雑音 u_k，誤差 v_k の項をすべてまとめて w_k で表わすと (39) 式は

$$Z_{k+n}+P_1Z_{k+n-1}+P_2Z_{k+n-2}+\cdots+P_{n-1}Z_{k+1}+P_nZ_k = w_{k+n} \tag{40}$$

となる[6)]。

従って **2.2** と同じ考え方でサンプル値を 1 ケずつずらすことにより n 本の連立方程式が得られるから，それらを行列形で表わすと，

$$\begin{pmatrix} Z_{k+n} \\ Z_{k+n+1} \\ \vdots \\ Z_{k+2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_k, & Z_{k+1}, & \cdots, & Z_{k+n-1} \\ Z_{k+1}, & Z_{k+2}, & \cdots, & Z_{k+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{k+n-1}, & Z_{k+n}, & \cdots, & Z_{k+2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P_n \\ -P_{n-1} \\ \vdots \\ -P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{k+n} \\ w_{k+n+1} \\ \vdots \\ w_{k+2n-1} \end{pmatrix} \tag{41}$$

(41) 式を記号を用いて次のように表わす。

$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{W}_k \tag{41$'$}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Z}_k = \begin{pmatrix} Z_{k+n} \\ Z_{k+n+1} \\ \vdots \\ Z_{k+2n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} -P_n \\ -P_{n-1} \\ \vdots \\ -P_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_k = \begin{pmatrix} w_{k+n} \\ w_{k+n+1} \\ \vdots \\ w_{k+2n-1} \end{pmatrix} \\ &\boldsymbol{S}_k = \begin{pmatrix} Z_k, & Z_{k+1}, & \cdots, & Z_{k+n-1} \\ Z_{k+1}, & Z_{k+2}, & \cdots, & Z_{k+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{k+n-1}, & Z_{k+n}, & \cdots, & Z_{k+2n-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

さて雑音，誤差の項 w_k は平均が 0 で，分散に対する時間についての重みが一様であるものとする。いま一連のサンプル値 Z_k から $\boldsymbol{\Phi}$ を推定することが目的であるから，ここで評価関数として次の二乗誤差

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{t}[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{t}[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}]'[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}] \\ &= \sum_{k=0}^{t}\Big\{(Z_{k+n}+P_1Z_{k+n-1}+\cdots+P_nZ_k)^2 \end{aligned}$$

$$+(Z_{k+n+1}+P_1Z_{k+n}+\cdots+P_nZ_{k+1})^2$$
$$+\cdots\cdots$$
$$\left.+(Z_{k+2n-1}+P_1Z_{k+2n-2}+\cdots+P_nZ_{k+n-1})^2\right\} \tag{43}$$

を考え，これを最小にするように $\boldsymbol{\Phi}$ を推定する。そのために $\boldsymbol{\Phi}$ の各要素について J を偏微分すると，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial(-P_n)} &= \sum_{k=0}^{t}\Big\{-2Z_k(Z_{k+n}+P_1Z_{k+n-1}+\cdots+P_nZ_k)\\
&\qquad -\cdots\cdots\\
&\qquad -2Z_{k+n-1}(Z_{k+2n-1}+P_1Z_{k+2n-2}+\cdots+P_nZ_{k+n-1})\Big\}\\
&= -2\sum_{k=0}^{t}\begin{pmatrix} Z_k \\ Z_{k+1} \\ \vdots \\ Z_{k+n-1}\end{pmatrix}'[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}]\\
&\text{以下同様にして}\\
&\quad\vdots\\
\frac{\partial J}{\partial(-P_1)} &= -2\sum_{k=0}^{t}\begin{pmatrix} Z_{k+n-1} \\ Z_{k+n} \\ \vdots \\ Z_{k+2n-2}\end{pmatrix}'[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}]
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ の推定値 $\boldsymbol{\Phi}_0$ を得るために，(44) 式を行列形にまとめて 0 とおくと，

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = \begin{pmatrix} \partial J/\partial(-P_n) \\ \partial J/\partial(-P_{n-1}) \\ \vdots \\ \partial J/\partial(-P_1)\end{pmatrix} = -2\sum_{k=0}^{t}\boldsymbol{S}_k[\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{\Phi}_0]=0 \tag{45}$$

となるから，故に

$$\sum_{k=0}^{t}\{\boldsymbol{S}_k\}^2\boldsymbol{\Phi}_0 = \sum_{k=0}^{t}\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{Z}_k \tag{46}$$

従って t のある値で $\sum_{k=0}^{t}\{\boldsymbol{S}_k\}^2$ が正則となれば逆行列が存在するから，

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \left[\sum_{k=0}^{t}\{\boldsymbol{S}_k\}^2\right]^{-1}\left[\sum_{k=0}^{t}\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{Z}_k\right] \tag{47}$$

かくして，先に仮定したような性質の雑音，誤差を含むデータの場合には定差方程式の係数の推定値 $\boldsymbol{\Phi}_0$ を求めることができる。

5.　サンプル値行列における桁落ちの改善法

雑音，誤差を含まない (2) 式においても，また，雑音，誤差を最小二乗法的に考慮した (47) 式の場合にも，逆行列演算を必要とするサンプル値行列（たとえば (42) 式の $\boldsymbol{S}_k$）は，後の計算

で導関数の公式を近似的に用いる必要からサンプル周期を充分小さくとると，必然的に隣り合う行要素間が非常に一次結合に近くなってそのため行列の状態指数が大きくなり，いわゆる性質の悪い行列[7]となる。それ故，著しい桁落ちが生じて行列式の値が0に近くなり，求める逆行列の精度は極めて劣下する。これは一種の情報落ちといえる。

従って，データの有する情報をもらさずに捕えるために，一連のサンプルデータをより有効に結びつけて行列演算の精度を高める必要性が生ずる。それは計算上のテクニックともいえるが，限られたサンプルデータからシステムを同定するこの種の問題ではかなり重要な側面をなすものであって，以下にその一手法を述べる。

いま，サンプル周期 T でサンプルしたデータを用いるとき，T が充分小さければ，システムの特性根の位置によって柔軟性を持たせる意味で，求めようとする係数についてのサンプル周期を lT とする。ここで $l=1,2,\cdots$ (整数) は任意に選べるものとする。すなわち

$$Z_{k+nl}+P_1Z_{k+(n-1)l}+\cdots+P_nZ_k=w_{k+nl} \tag{48}$$

とおくことにより，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ は lT というサンプル周期に対応するサンプル値系高階定差方程式の係数となる。

一方連立化するとき，隣り合う方程式のサンプル値の番号 k の間隔を1より大きく任意に離しても定係数のシステムでは問題はないから，ある適当なサンプル値間隔 $s(s=1,2,\cdots$(整数)) を選んで (41) 式に対応するサンプル値による行列形の連立方程式を書き換える。

$$\begin{pmatrix} Z_{k+nl} \\ Z_{k+nl+s} \\ \vdots \\ Z_{k+nl+(n-1)s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_k & ,\ \cdots, & Z_{k+(n-1)l} \\ Z_{k+s} & ,\ \cdots, & Z_{k+(n-1)l+s} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{k+(n-1)s}, & \cdots, & Z_{k+(n-1)l+(n-1)s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -P_n \\ -P_{n-1} \\ \vdots \\ -P_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{k+nl} \\ w_{k+nl+s} \\ \vdots \\ w_{k+nl+(n-1)s} \end{pmatrix} \tag{49}$$

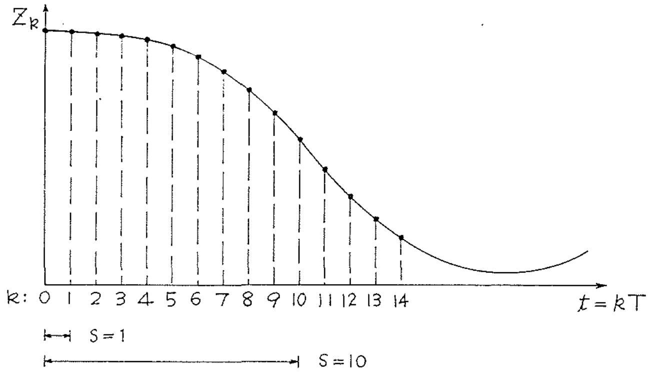
ここで再び記号を導入して，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Z}_{(l,s),k}=\begin{pmatrix} Z_{k+nl} \\ Z_{k+nl+s} \\ \vdots \\ Z_{k+nl+(n-1)s} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Phi}_{(l,s)}=\begin{pmatrix} -P_n \\ -P_{n-1} \\ \vdots \\ -P_1 \end{pmatrix} \\ &\boldsymbol{S}_{(l,s),k}=\begin{pmatrix} Z_k & ,\ \cdots, & Z_{k+(n-1)l} \\ Z_{k+s} & ,\ \cdots, & Z_{k+(n-1)l+s} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{k+(n-1)s}, & \cdots, & Z_{k+(n-1)l+(n-1)s} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

とおくと，前章と全く同様にして，

$$\boldsymbol{\Phi}_{(l,s),0}=\left[\sum_{k=0}^{t}\{\boldsymbol{S}_{(l,s),k}\}^2\right]^{-1}\left[\sum_{k=0}^{t}\boldsymbol{S}_{(l,s),k}\boldsymbol{Z}_{(l,s),k}\right] \tag{51}$$

ただし本研究の同定計算はすべて計算機の使用を前提としているので，(51) 式をより計算機向きに書き直し，途中の計算を省略して結果だけ示すと，



図—1　サンプル値間隔 s

$$\{\boldsymbol{S}_{(l,s),k}\}^2=\sum_{m=1}^{n}\begin{pmatrix} Z_{k+(m-1)l} \\ Z_{k+(m-1)l+s} \\ \vdots \\ Z_{k+(m-1)l+(n-1)s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_{k+(m-1)s} \\ Z_{k+(m-1)s+l} \\ \vdots \\ Z_{k+(m-1)s+(n-1)l}\end{pmatrix}' \tag{52}$$

$$\boldsymbol{S}_{(l,s),k}\,\boldsymbol{Z}_{(l,s),k}=\sum_{m=1}^{n}\begin{pmatrix} Z_{k+(m-1)l} \\ Z_{k+(m-1)l+s} \\ \vdots \\ Z_{k+(m-1)l+(n-1)s}\end{pmatrix} Z_{k+nl+(m-1)s} \tag{53}$$

となる。

以上の操作を具体的に示すために，２階のシステムを考え，係数に対するサンプル周期をデータのサンプル周期に等しくとるすなわち $l=1$。いま仮りに $s=1$ とすると，(50) 式のサンプル値行列は $k=0$ として

$$\boldsymbol{S}_{(1,1),0}=\begin{bmatrix} Z_0, & Z_1 \\ Z_1, & Z_2 \end{bmatrix} \tag{54}$$

となり，図-1 に示したような応答データの場合，$[Z_0, Z_1]$ と $[Z_1, Z_2]$ とは明らかに一次結合に近く（傾きが殆んど等しい）逆行列の精度が劣下する。

一方例えば，$s=10$ ととると同様にサンプル値行列は

$$\boldsymbol{S}_{(1,10),0}=\begin{bmatrix} Z_0, & Z_1 \\ Z_{10}, & Z_{11} \end{bmatrix} \tag{55}$$

となり，$[Z_0, Z_1]$ と $[Z_{10}, Z_{11}]$ とは傾きが相当違って逆行列の精度が向上することが容易に推察されるであろう。

しかしながら，l や s の選び方は画一的でなく，システムの特性一応答の速度や振動の周期等一によってそれぞれの場合に適宜，最適となるように選ぶ必要があり，今後に検討を要する点である。

6. 計算例と検討

以上に述べた線型システムの係数の推定法の最も主要な部分であるサンプルデータから高階定差方程式の係数を求める計算の収束状況をみるために，(51) 式に従って実際に求めた計算例を以下に示す。

対象としたシステムはいずれも2階のシステムで，データとしては，与えられたシステムの微分方程式を R-K-G 法[7]で精密に計算した。すなわち雑音，誤差が非常に小さい (有効数字9桁の範囲で) とみなせるデータと，HYBRID 計算機でシミュレートした，アナログ部の雑音を含み，かつ AD 変換器による読み取り誤差をも含むデータ (有効数字おおむね3桁) を用いた。HYBRID 計算機によるデータの場合には誤差の問題の他に，AD 変換器自体の応答時間 (立上り時間) や AD 変換器の走査時間も含めて AD 変換されたディジタル値をメモリに一時ストアさせるための時間等の問題も当然考えなければならないが，それらは 100 μs 以内におさまるのでデータのサンプル周期を 10 ms ととったのに対し充分小さく無視し得るものと考え考察から省いた。

図中の一点鎖線は各係数の真値を示している。またデータ番号はそれぞれ次を意味する。

データ **1**　$\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$, $T=0.01$ sec.　HYBRID 計算機データ

$l=10$ ($lT=0.10$ sec.) の場合

$$\text{真値}\ \begin{cases} P_1=-1.8000 \\ P_2=0.8100 \end{cases}$$

$l=5$ ($lT=0.05$ sec.) の場合

$$\text{真値}\ \begin{cases} P_1=-1.8975 \\ P_2=0.9000 \end{cases}$$

$l=1$ ($lT=0.01$ sec.) の場合

$$\text{真値}\ \begin{cases} P_1=-1.9801 \\ P_2=0.9802 \end{cases}$$

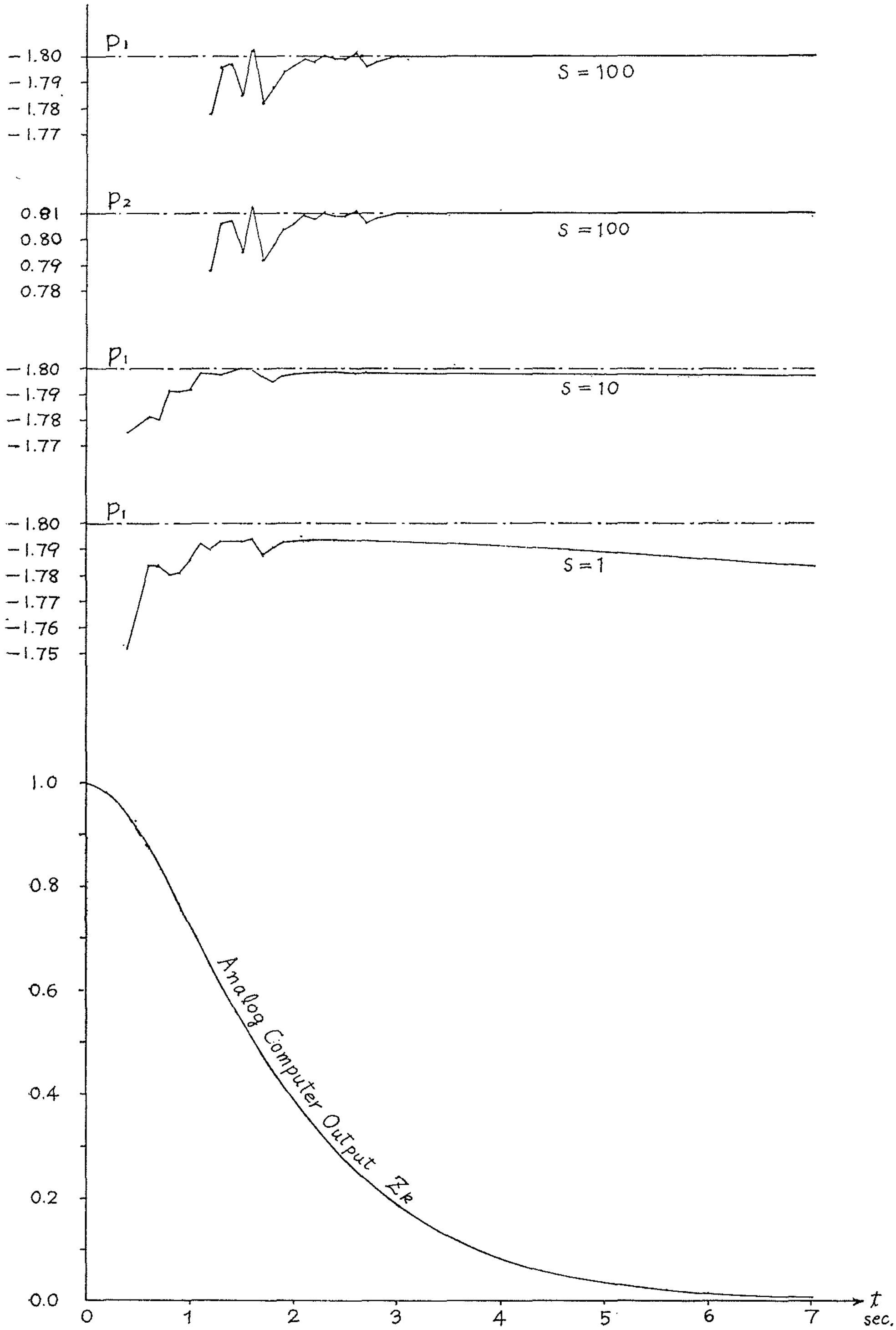
データ **2**　$\ddot{x}+\dot{x}+x=0$, $T=0.01$ sec.　HYBRID 計算機データ

$l=10$ ($lT=0.10$ sec.) の場合

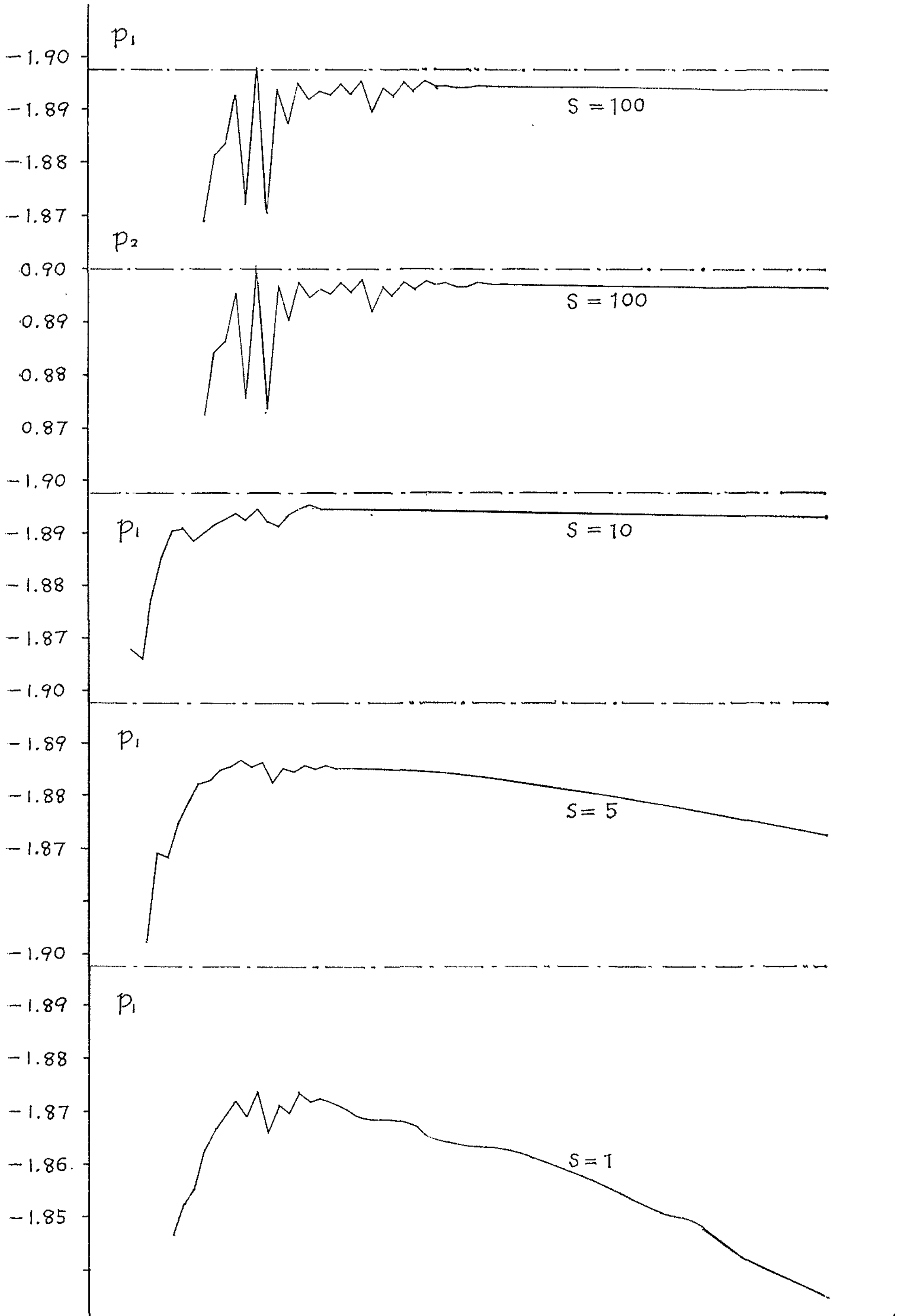
$$\text{真値}\ \begin{cases} P_1=-1.8900 \\ P_2=0.9000 \end{cases}$$

$l=5$ ($lT=0.05$ sec.) の場合

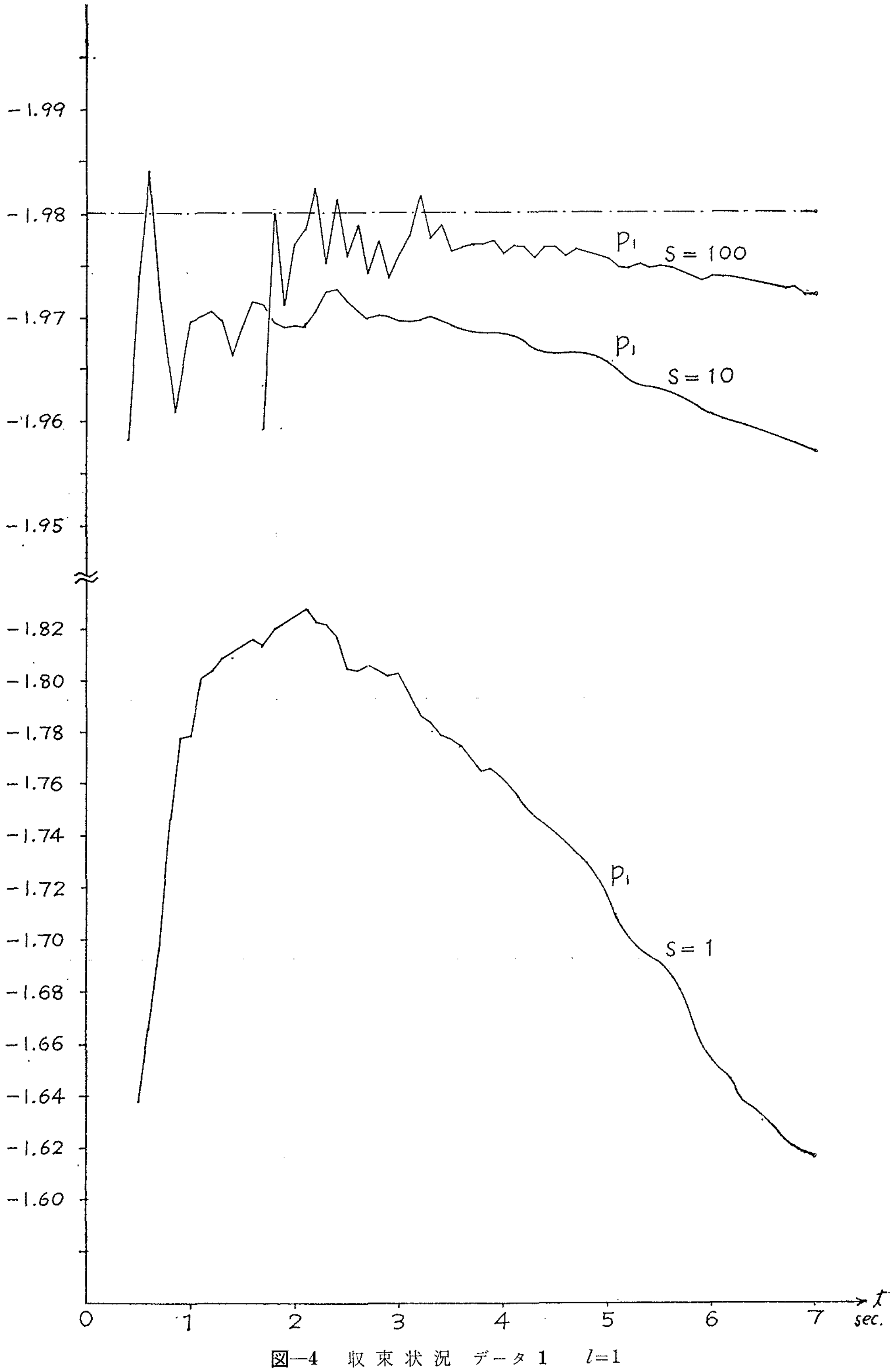
$$\text{真値}\ \begin{cases} P_1=-1.9475 \\ P_2=0.9500 \end{cases}$$



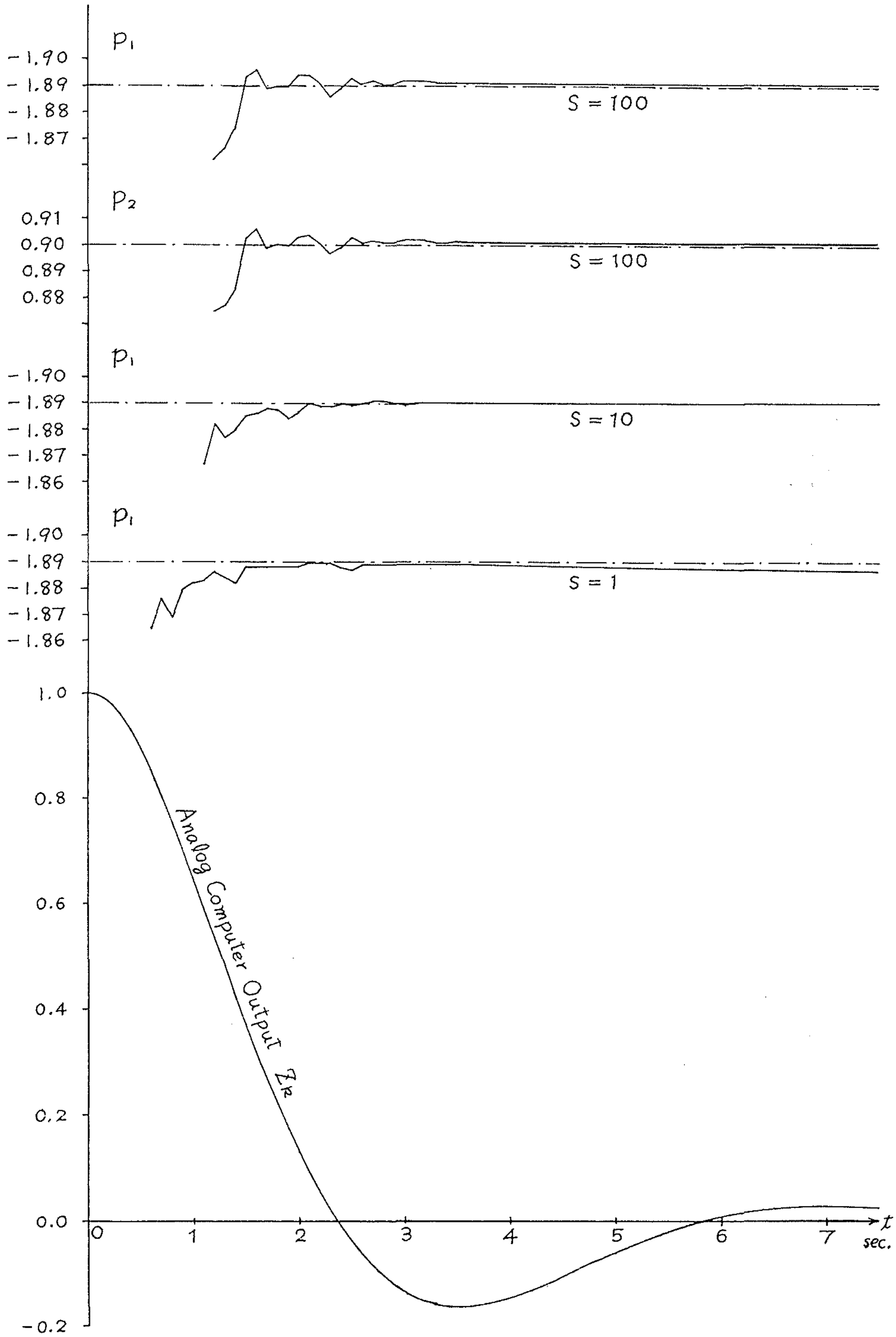
図—2 収束状況 データ1 $l=10$



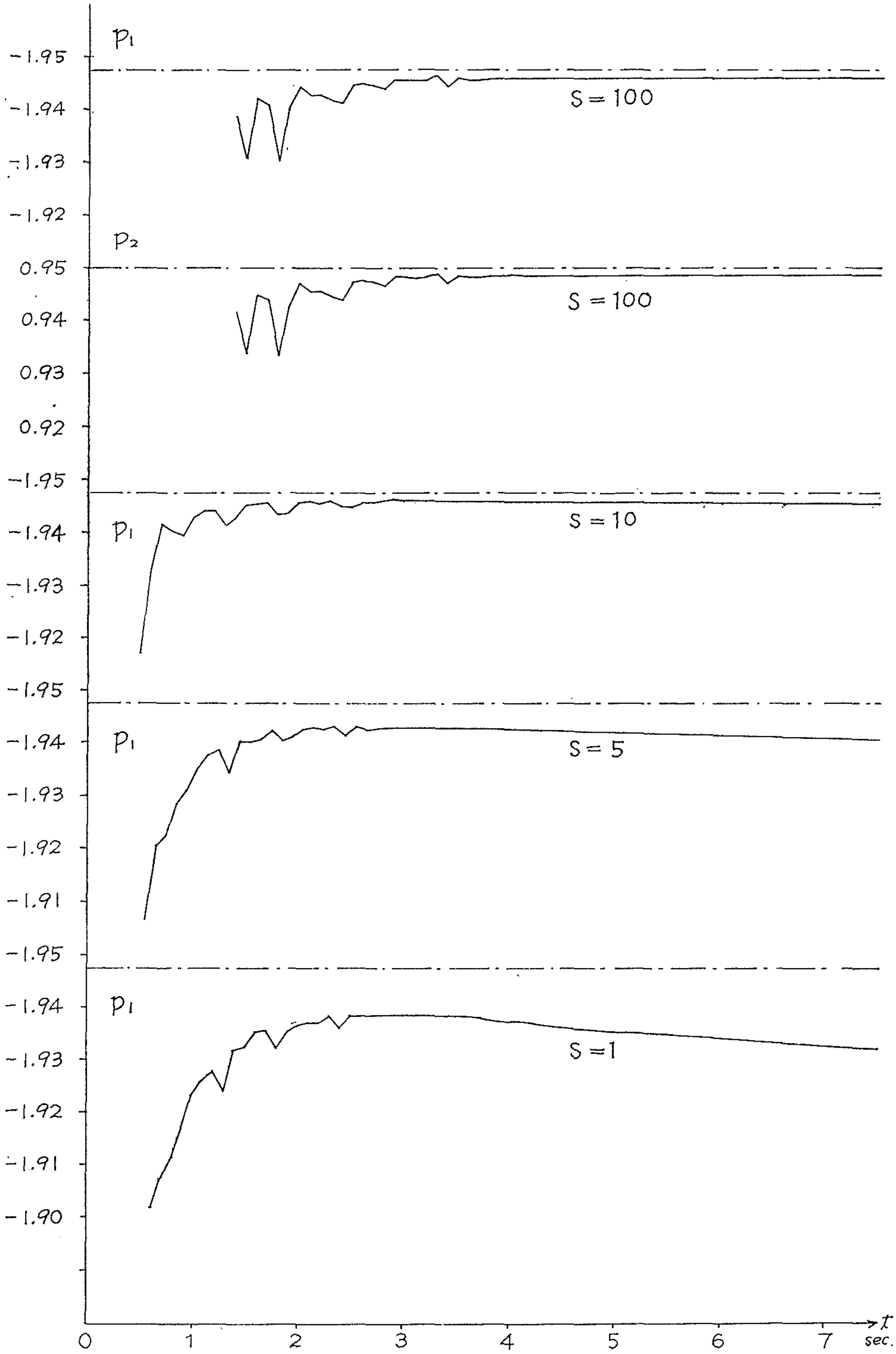
図—3 収束状況 データ 1 $l=5$



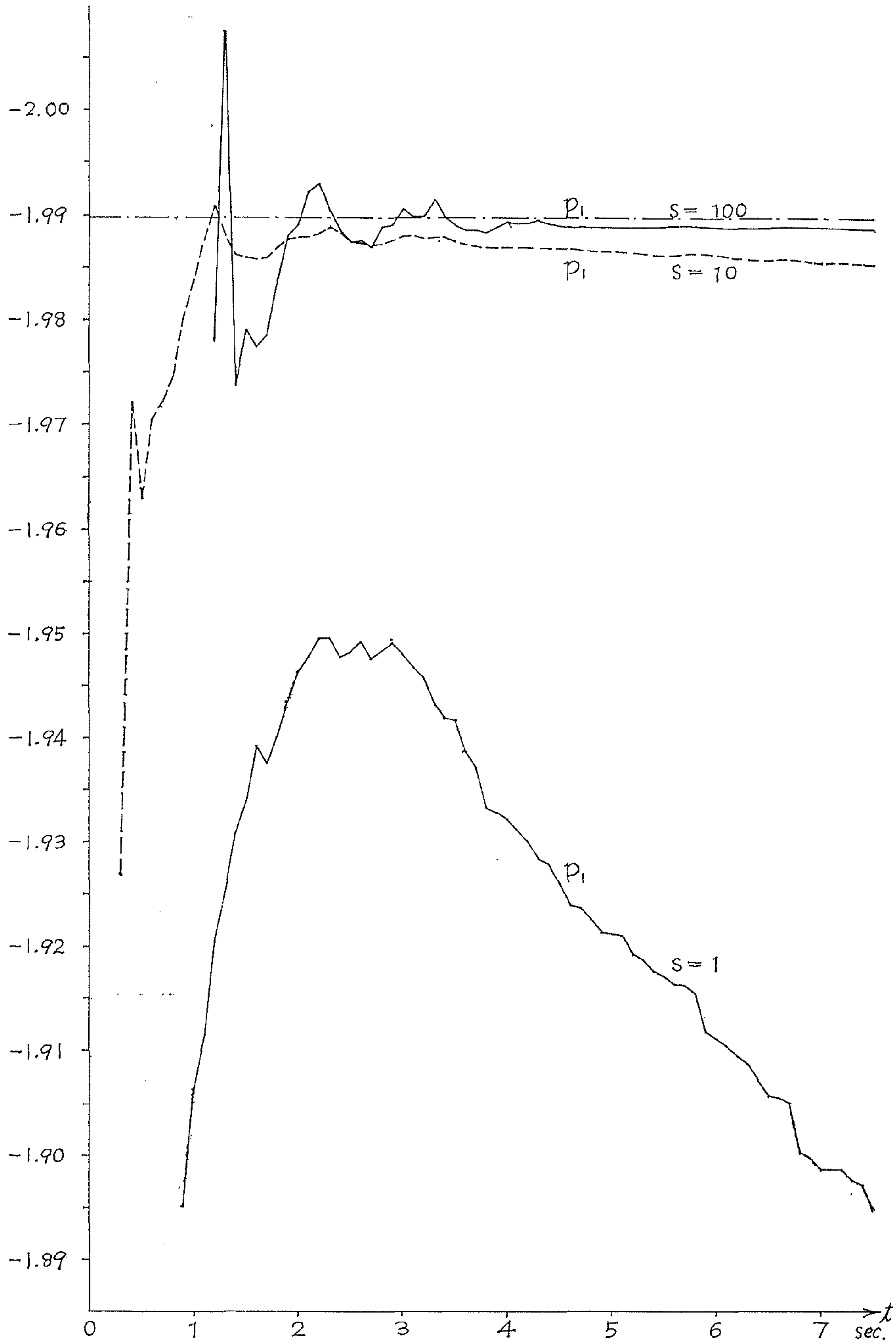
図—4 収束状況 データ1 $l=1$



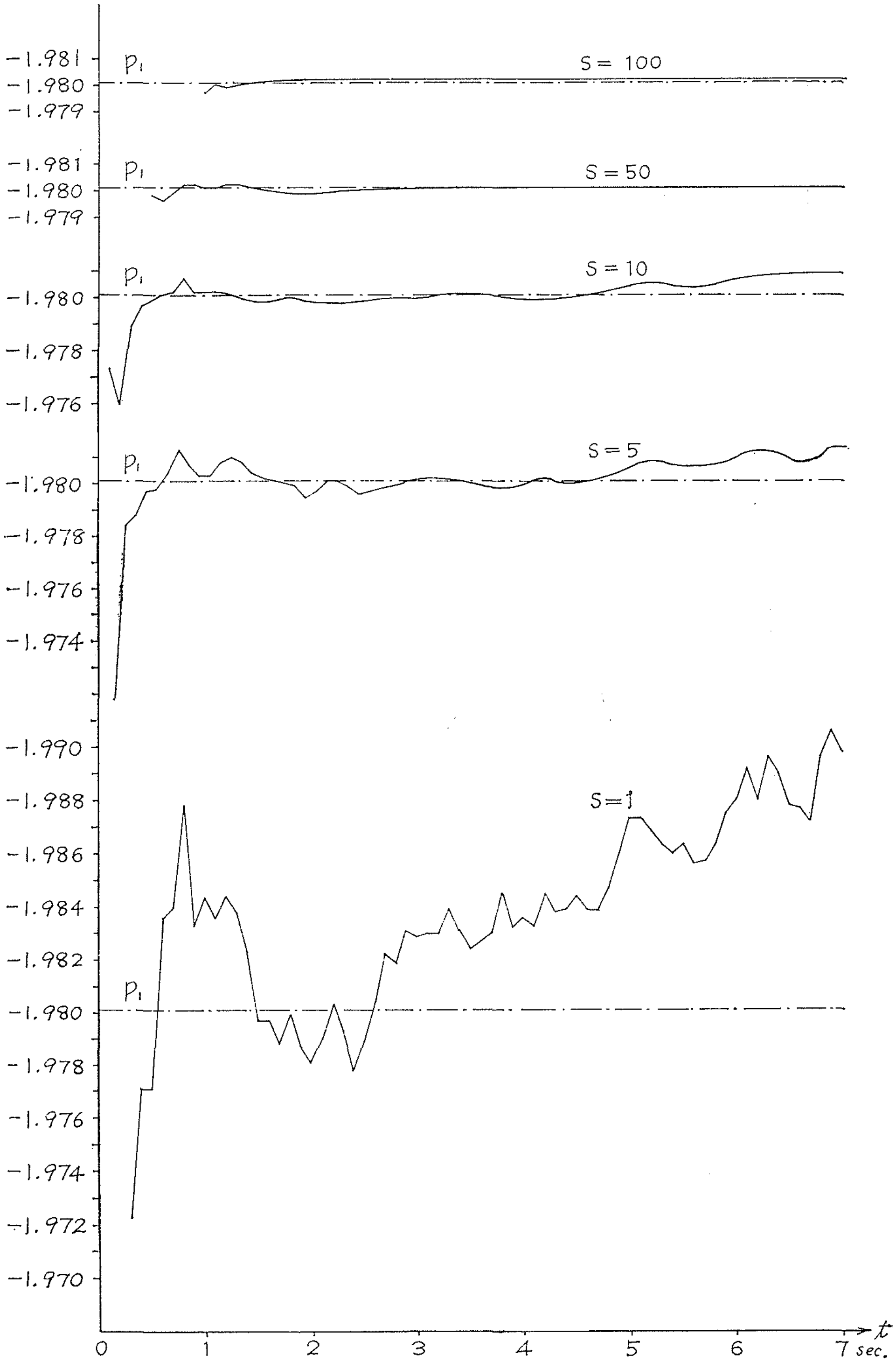
図—5 収束状況 データ 2 $l=10$



図—6　収 束 状 況　データ 2　$l=5$



図—7 収束状況 データ2 $l=1$



図—8　収 束 状 況　データ 3　$l=1$

$l=1$ ($lT=0.01$ sec.) の場合

$$\text{真値}\begin{cases} P_1=-1.9899 \\ P_2=0.9900 \end{cases}$$

データ **3** $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$, $T=0.01$ sec. R-K-G 法による厳密解データ

$l=1$ ($lT=0.01$ sec.) の場合のみ，真値はデータ **1** の場合と同じ

なお P_2 の収束状況も一部のせてあるが，それらから明らかなように，P_2 と P_1 の動きは殆んど等しく他の多くの例では省略した。

当然考えられたことであるが，これらの計算例でより明らかにされたように，係数の収束性は l や s の選び方にかなり依存している。一般にいえることは，係数に対するサンプル周期 lT はシステムの応答速度との関連であまり小さくとっても無意味であろう。またサンプル値間隔 s については応答曲線の傾きの差ができるだけ大きくなるような間隔を選ぶべきである。

いまのところ，収束計算をデータのどの程度のレベルまで行なうかについて理論的な解析の段階まで達していないが，応答の絶対値が小さくなると相対的に誤差が増大するから，実際の場合には適当なところで計算を終えなければならない。

なお間に合わなかったが，目下より高階のシステムについても計算中なので，今後機会があったら報告したい。

7. 結　　び

以上に述べてきたように本研究は数学的には平易な誘導によっており，しかもその実際の計算過程はディジタル計算機の最も得意とするものばかりである。

計算例から明らかなとうり，サンプルデータの活用のしかたに収束性がかなり依存しているが，適当な選択によっては非常に高精度の同定が可能であることがわかった。結局この問題はある限られたデータから，必要とする情報をいかにして確実に捕え得るかという意味での関心事であり，今後も解析を進めていくつもりである。

さらに同定問題の残された重要な課題としては，システムの正確な階数の推定問題，特定な入力信号によらずプロセスの日常の入出力データからシステムの係数を推定するいわゆる動特性の同定問題等があげられる。それらについての考察は追って報告する予定である。

まえがきでも触れたように，システムの同定問題はかなりの方法が発表され，そろそろ整理される段階まできているようにも思われるが，なおこの問題は，いろいろな性質の雑音，誤差を含む測定値の適確な統計的処理法の開発と，オンライン短時間同定と適応制御との密接な関連という面において大変重要な分野であるものと思う。

計算に使用した電子計算機は，ディジタル計算機は，北大計算センター NEAC 2203 G, HYBRID 計算機は北大汎用シミュレータ室 HIDAS 2000 である。

なお，本報告は一部先に発表したもの[8),9)]に，新たな解析と計算例を加えてまとめたもの

である。

終りに，日頃有益な御指導，御助言を頂いています電気工学科村田助教授，大学院在学中本研究の基礎となるべく御指導頂いた，電子工学科仲丸教授，栃内助教授に深く謝意を表します。またいろいろと御検討と激励を頂いています，電気工学科河合助手をはじめ，電気回路，電磁気講座の皆様にも厚くお礼申し上げます。

参考文献

1) 例えば
茅　陽一：計測と制御，**7** (1968), 3, p. 151.
2) 例えば
村田茂昭：第11回自動制御連合講演会前刷 (1968), p. 153.
3) Timothy, L. K. and Bona, B. E.: State Space Analysis, An Introduction, (1968), p. 300, McGraw-Hill.
4) 高橋安人：システムと制御 (1968), p. 161, 岩波書店.
5) 森口・宇田川・一松：数学公式 II (1964), p. 143, 岩波全書.
6) 有本　卓：電子通信学会誌，**51** (1968), 3, p. 314.
(石川　治：第11回北大電気談話会資料 (1968)).
7) 山内・森口・一松：電子計算機のための数値計算法 I (1965), 培風館.
8) 石川　治：第14回北大電気談話会資料 (1968).
9) 石川　治：第1回計測・制御に関する北海道地区研究集会講演予稿集 (1968), p. 39.