



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	密度流の研究（第3報）：単一理想流体のoutflowと密度流との比較
Author(s)	柏村, 正和; Kashiwamura, Masakazu
Citation	北海道大學工學部研究報告, 53, 241-252
Issue Date	1969-03-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40938
Type	departmental bulletin paper
File Information	53_241-252.pdf



密度流の研究 (第3報)

—単一理想流体の outflow と密度流との比較—

柏村正和*

(昭和43年11月28日受理)

Studies on Density Current (III)

—A Comparative Study of the Outflow Pattern of the Density Current with a Single Ideal Fluid Flow—

Masakazu KASHIWAMURA

(Received November 28, 1968)

Abstract

As described in the previous paper, there are five flow patterns of a fluid, when it passes through an outlet into a heavier fluid. The example can be found at a river mouth.

The first pattern, which is called A pattern, appears in a condition where the density difference of the two fluids is large and a velocity of the lighter fluid is small while the breadth of the outlet is long. The last, called E pattern, on the other hand, occurs in a reverse condition, and it gives approximately the same feature with a turbulent jet.

The A pattern has stable stream lines, which extend over the heavier fluid while spreading gradually with the distance from the outlet, and eventually stretch in radial directions. It seems to resemble a flow pattern of a single ideal fluid which issues from an outlet.

This paper describes the extent of conformity between the A pattern flow and the ideal fluid flow. The velocity and the stream lines of the ideal flow have been calculated with conformal representation, while the A pattern was obtained through the experiment.

As a result, it appears that the stream lines of the two flows offer an approximate resemblance with the each other except for a point where the A pattern flow spreads over more rapidly after passing through the outlet. It appears, however, that there are differences between the two flows in velocity. The most remarkable difference is that the velocity along the center line decreases gradually in the ideal flow but, in the A pattern flow, accelerates temporarily at the outlet. The cause has been discussed by emphasizing that a depth of the lighter fluid plays an important part in the motion of the A pattern flow.

* 工業力学第二講座

1. 序 文

自由表面を持ち半無限空間に拡がる液体の表面に向かって、それより軽い流体が水平に流出する場合、その流体が前者の上をどのように拡がっていくかという問題については第2報に述べたとおりであるが¹⁾、その後実験の充足により flow pattern の分類を示す図はさらに詳細なものが得られ、その都度報告してきた^{2)~4)}。その成果を要約するならば、つぎのとおりである。

軽い流体の outflow は大体において5個の pattern に分けられる。流出速度が微小で二流体の密度差の大きいときに観測される密度流的性格の強い A 型と、逆に流出速度が早く、かつ密度差の少ない時に現われやすい噴流的性格をもつ E 型とを両極端として、その間の遷移状態に応じて生ずる B, C, D 型をあわせたものがそれである。これらの各型は $\theta = (\nu \varepsilon g)^{1/3} / U$ と、 $R = bU/\nu$ の二つの無次元量によって図上に示すことができ、それは図-1に示すとおりである。ここに ν は流出水の動粘性係数、 ε は上下二流体の密度の比を1から引いたもの、 g は重力加速度、 U は outlet における平均流出速度、 b は outlet の幅である。

図-1から明らかなように、 θ と R が大きい場合には流線の安定な密度流的 A 型となり、逆に両者が小さければ流線の乱れた噴流的 E 型になる傾向を見出すことができる。A 型の pattern を示す一つの例を図-2に示す。この写真から容易に想像できるように、軽い流体は outlet を出ると重い流体の上のりあげて四方へ拡がっていくが、その流線の形状は一見して単一理想流体の potential flow の流線と似ているのではないかと思わせるものがある。

A から E の各 pattern を数学的に誘導することは現在の段階では難題であってまだ見通しはたさないが、しかし乱流の要素のない最も解析可能に近いことを感じさせる A 型について

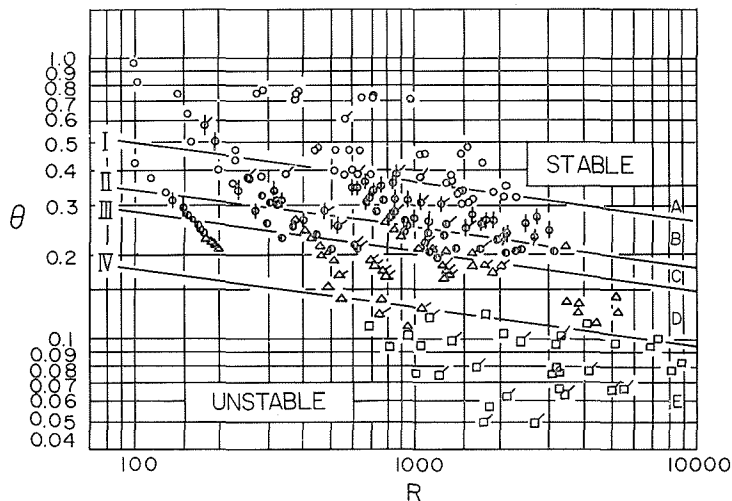


図-1 θ と R によって5種類に分類された flow pattern.

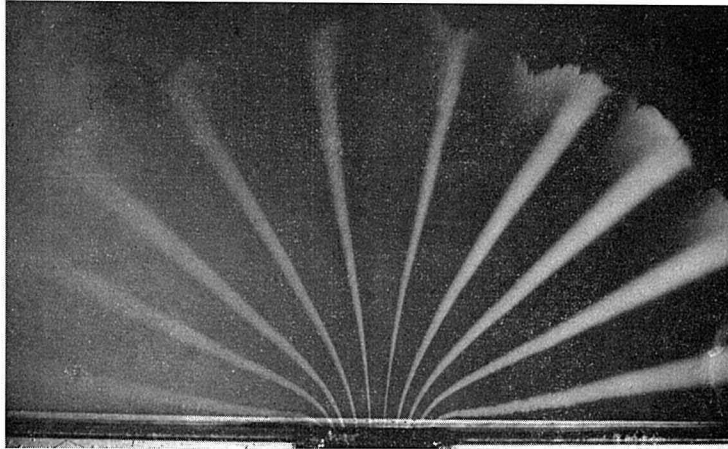


図-2 密度流的 A 型 flow pattern.

は理論的解決の希望が一番濃厚に思われる。

本論文では以上の観点から、さしあたって A 型と類似の pattern を持つと予想される単一流体の outflow を理論的に求めて実験的に得られた A 型流と比較し、その相違点を指摘して A 型 pattern を理解する第一歩としたいと考えるものである。

2. 単一理想流体の outflow

図-3 に示すように $x > 0$ の半無限空間に向かって $x = 0$ なる直線に直角に流出する自由表面を持つ理想流体の定常流を考える。流れは二次元的とし、従って深さは至るところで一定とする。非回転運動を仮定するならばただちに次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに ϕ は速度 potential, ψ は流れ関数である。

(1) 式は ϕ と ψ についての Cauchy-Riemann の偏微分方程式であり、従って複素 potential, $w = \phi + i\psi$ は、 $z = x + iy$ に対し正則であって w と z は相互に等角写像性を有する。

等角写像によって流線を得るために、まずこの流れが x 軸に対して対称であることを注目して y の正側だけを考慮することとし、境界を図-4 のようにとりなおす。この図の境界が t 面の実軸とつぎのような Schwarz-Christoffel 変換によって対応するものとする。

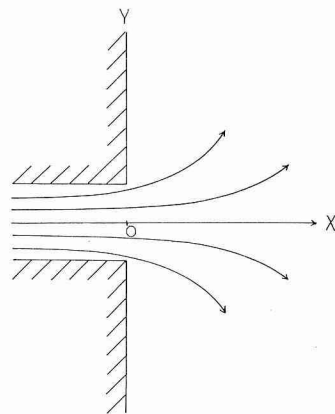


図-3 自由表面を持つ半無限流体に流入する流れ

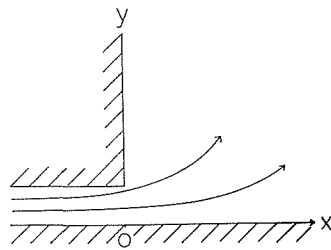


図-4 流心に x 軸をとり y の正方向のみを対象とした流れ

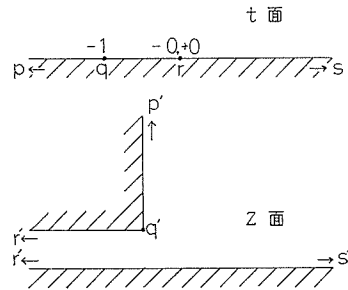


図-5 t 面と z 面の対応図

$$\frac{dz}{dt} = A(t-a)^{-\frac{\alpha}{\pi}}(t-b)^{-\frac{\beta}{\pi}} \quad (2)$$

t 面の実軸と z 面の境界の対応が図-5 のようになるものとすれば、

$$\left. \begin{aligned} a &= -1 & b &= 0 \\ \alpha &= -\frac{\pi}{2} & \beta &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

にとればよい。従って

$$\frac{dz}{dt} = A \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{t} \quad (4)$$

これを積分して

$$z = A \left\{ 2(t+1)^{\frac{1}{2}} + \log \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(t+1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right\} + B \quad (5)$$

を得る。 t と z の各点の対応はつぎの表のごとくなる。

t	$-\infty$	-1	-0	$+0$	$+\infty$
z	$i\infty$	$i\frac{b}{2}$	$-\infty + i\frac{b}{2}$	$-\infty$	$+\infty$

この表から (5) 式の A, B を定めることができる。 $(t+1)^{1/2}$ は本来 2 価関数であるが、単に符号が異なるだけであり、それを考慮すれば (5) 式の A は符号が異なって出るだけであって A を正として扱った上、上表を満足する方の $(t+1)^{1/2}$ を用いればよい。この結果

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{b}{2\pi} \\ B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得る。故に

$$z = \frac{b}{2\pi} \left\{ 2(t+1)^{\frac{1}{2}} + \log \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(t+1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right\} \quad (7)$$

図-3において $x \rightarrow -\infty$ では流線はすべて x 軸に平行であり、かつ等流と考えなければならないが、このような流れは t 面上では

$$w = m \log t \quad (8)$$

で与えられる。この流れは t 面では原点から放射状に流出し、流速は原点からの距離のみの関数で、距離に反比例する。また原点からの流出流量を Q とすれば、 m は $m=Q/2\pi$ で与えられる。故に (8) 式をあらためて

$$t = e^{\frac{2\pi}{Q} w} \quad (9)$$

として表わし、これを (7) 式に代入すれば、これが求める流れを表現する式になるであろう。すなわち、

$$z = \frac{b}{2\pi} \left\{ 2(e^{\frac{2\pi}{Q} w} + 1)^{\frac{1}{2}} + \log \frac{(e^{\frac{2\pi}{Q} w} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{\frac{2\pi}{Q} w} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right\} \quad (10)$$

計算を容易にするために、 $2\pi z/b = z'$ 、 $2\pi w/Q = w'$ とし、これに応じて $2\pi x/b = x'$ 、 $2\pi y/b = y'$ 、 $2\pi\phi/Q = \phi'$ 、 $2\pi\psi/Q = \psi'$ とすれば

$$z' = 2(e^{w'} + 1)^{\frac{1}{2}} + \log \frac{(e^{w'} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{w'} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \quad (11)$$

さらに z' を実部と虚部に分けて表わすと次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x' &= 2r \cos \theta + \frac{1}{2} \log \frac{r^2 - 2r \cos \theta + 1}{r^2 + 2r \cos \theta + 1} \\ y' &= 2r \sin \theta + \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - 1} - \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + 1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに

$$\begin{aligned} r &= (e^{2\phi'} + 2e^{\phi'} \cos \psi' + 1)^{\frac{1}{4}} \\ \theta &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{e^{\phi'} \sin \psi'}{e^{\phi'} \cos \psi' + 1} \end{aligned}$$

である。

$\phi' = 0$ は x' 軸に沿う流れを表わし、 $\phi' = \pi$ は $\phi' < 0$ の領域では $y' = 1$ に沿い、 $\phi' > 0$ では $x' = 0$ ($y' > 1$) に沿う流れである。従って ϕ' について 0 から π までの間を $\pi/8$ ごとに区切って計算を行なった。また ϕ' は -5 から $+4$ まで 0.2 ごとにとった。電子計算機による計算結果は表-1に示すとおりである。

さらに表-1を図上で示すと図-6のごとくなる。これによれば流線は上流では等間隔平行で、また速度 potential 線の間隔も一様であることから等流であることが判るが、outlet に近づくに従って前方の水路の拡がりを予知して流速流向に変化を生ずる。 $\phi' = 0$ の流線上では流速が次第に単調減少を示し、また流線間隔は単調に増加する。一方 $\phi' = \pi$ にそっては流線間

表一 ϕ' , ψ' に対応

ϕ'	$\psi' = 0$		$\psi' = \frac{\pi}{8}$		$\psi' = \frac{\pi}{4}$		$\psi' = \frac{3}{8}\pi$	
	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'
4.0	4.660	0.000	4.571	0.926	4.306	1.816	3.875	2.637
3.8	4.208	0.000	4.127	0.840	3.888	1.646	3.499	2.391
3.6	3.798	0.000	3.725	0.762	3.509	1.493	3.158	2.168
3.4	3.426	0.000	3.360	0.691	3.165	1.355	2.849	1.968
3.2	3.089	0.000	3.029	0.628	2.853	1.231	2.568	1.787
3.0	2.782	0.000	2.728	0.570	2.570	1.118	2.313	1.624
2.8	2.503	0.000	2.455	0.519	2.312	1.017	2.081	1.477
2.6	2.249	0.000	2.206	0.472	2.078	0.927	1.870	1.345
2.4	2.018	0.000	1.979	0.431	1.864	0.845	1.677	1.226
2.2	1.807	0.000	1.772	0.393	1.669	0.772	1.501	1.120
2.0	1.614	0.000	1.583	0.360	1.491	0.706	1.341	1.025
1.8	1.438	0.000	1.410	0.330	1.327	0.647	1.194	0.940
1.6	1.276	0.000	1.251	0.303	1.177	0.595	1.058	0.864
1.4	1.126	0.000	1.104	0.279	1.039	0.548	0.934	0.797
1.2	0.989	0.000	0.970	0.258	0.912	0.507	0.819	0.737
1.0	0.862	0.000	0.845	0.240	0.794	0.471	0.712	0.685
0.8	0.743	0.000	0.728	0.223	0.684	0.439	0.612	0.639
0.6	0.633	0.000	0.620	0.209	0.581	0.411	0.518	0.598
0.4	0.529	0.000	0.518	0.196	0.484	0.386	0.429	0.564
0.2	0.432	0.000	0.422	0.185	0.392	0.365	0.345	0.533
0.0	0.339	0.000	0.331	0.176	0.305	0.347	0.265	0.508
-0.2	0.251	0.000	0.244	0.168	0.222	0.331	0.188	0.486
-0.4	0.167	0.000	0.161	0.161	0.143	0.318	0.113	0.467
-0.6	0.087	0.000	0.081	0.155	0.066	0.307	0.041	0.451
-0.8	0.009	0.000	0.004	0.150	-0.009	0.297	-0.030	0.438
-1.0	-0.067	0.000	-0.071	0.146	-0.082	0.289	-0.100	0.427
-1.2	-0.140	0.000	-0.144	0.142	-0.153	0.282	-0.167	0.418
-1.4	-0.212	0.000	-0.215	0.139	-0.223	0.277	-0.235	0.410
-1.6	-0.283	0.000	-0.285	0.137	-0.291	0.272	-0.301	0.404
-1.8	-0.352	0.000	-0.354	0.135	-0.359	0.268	-0.367	0.399
-2.0	-0.420	0.000	-0.422	0.133	-0.426	0.265	-0.433	0.395
-2.2	-0.488	0.000	-0.489	0.132	-0.492	0.262	-0.498	0.391
-2.4	-0.554	0.000	-0.555	0.130	-0.558	0.260	-0.563	0.388
-2.6	-0.621	0.000	-0.621	0.129	-0.624	0.258	-0.628	0.386
-2.8	-0.686	0.000	-0.687	0.129	-0.689	0.257	-0.692	0.384
-3.0	-0.752	0.000	-0.752	0.128	-0.754	0.256	-0.757	0.382
-3.2	-0.817	0.000	-0.817	0.127	-0.819	0.255	-0.821	0.381
-3.4	-0.882	0.000	-0.882	0.127	-0.883	0.254	-0.885	0.380
-3.6	-0.946	0.000	-0.947	0.127	-0.948	0.253	-0.949	0.379
-3.8	-1.010	0.000	-1.010	0.126	-1.011	0.253	-1.012	0.378
-4.0	-1.075	0.000	-1.075	0.126	-1.075	0.252	-1.076	0.378
-4.2	-1.139	0.000	-1.139	0.126	-1.139	0.252	-1.140	0.377
-4.4	-1.203	0.000	-1.203	0.126	-1.203	0.251	-1.204	0.377
-4.6	-1.267	0.000	-1.267	0.126	-1.267	0.251	-1.268	0.377
-4.8	-1.331	0.000	-1.331	0.126	-1.331	0.251	-1.332	0.376
-5.0	-1.395	0.000	-1.395	0.125	-1.395	0.251	-1.395	0.376

する x' , y' の計算値

$\psi' = \frac{\pi}{2}$		$\psi' = \frac{5}{8}\pi$		$\psi' = \frac{3}{4}\pi$		$\psi' = \frac{7}{8}\pi$		$\psi' = \pi$	
x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'
3.295	3.356	2.589	3.947	1.783	4.385	0.909	4.655	0.000	4.747
2.975	3.043	2.338	3.578	1.610	3.976	0.821	4.221	0.000	4.304
2.680	2.760	2.110	3.245	1.453	3.606	0.741	3.829	0.000	3.904
2.422	2.505	1.903	2.945	1.311	3.273	0.668	3.475	0.000	3.543
2.184	2.274	1.715	2.675	1.181	2.972	0.602	3.155	0.000	3.217
1.967	2.067	1.545	2.431	1.064	2.701	0.543	2.868	0.000	2.924
1.769	1.880	1.390	2.211	0.958	2.457	0.488	2.609	0.000	2.660
1.590	1.712	1.249	2.014	0.860	2.238	0.438	2.376	0.000	2.423
1.426	1.561	1.120	1.836	0.771	2.041	0.393	2.120	0.000	2.210
1.276	1.426	1.002	1.678	0.690	1.865	0.352	1.980	0.000	2.019
1.139	1.305	0.895	1.535	0.616	1.707	0.314	1.813	0.000	1.848
1.014	1.197	0.796	1.409	0.548	1.566	0.279	1.664	0.000	1.697
0.899	1.101	0.705	1.296	0.485	1.441	0.247	1.531	0.000	1.562
0.792	1.015	0.621	1.196	0.427	1.331	0.217	1.415	0.000	1.443
0.694	0.940	0.543	1.108	0.373	1.234	0.189	1.312	0.000	1.339
0.602	0.874	0.470	1.031	0.322	1.149	0.163	1.224	0.000	1.249
0.516	0.816	0.401	0.964	0.273	1.076	0.138	1.148	0.000	1.172
0.435	0.766	0.336	0.907	0.227	1.014	0.114	1.084	0.000	1.108
0.358	0.722	0.273	0.857	0.182	0.963	0.089	1.031	0.000	1.057
0.284	0.685	0.212	0.816	0.137	0.920	0.063	0.991	0.000	1.019
0.213	0.654	0.153	0.781	0.091	0.885	0.035	0.961	0.000	1.000
0.144	0.627	0.094	0.752	0.044	0.857	0.001	0.940	-0.018	1.000
0.076	0.605	0.035	0.729	-0.005	0.836	-0.037	0.925	-0.051	1.000
0.010	0.586	-0.024	0.709	-0.056	0.818	-0.081	0.914	-0.090	1.000
-0.055	0.571	-0.083	0.694	-0.109	0.805	-0.128	0.906	-0.136	1.000
-0.120	0.558	-0.143	0.681	-0.164	0.794	-0.179	0.900	-0.184	1.000
-0.185	0.548	-0.204	0.670	-0.220	0.786	-0.232	0.895	-0.237	1.000
-0.249	0.539	-0.264	0.662	-0.278	0.779	-0.287	0.891	-0.291	1.000
-0.313	0.532	-0.326	0.655	-0.337	0.774	-0.344	0.888	-0.341	1.000
-0.377	0.525	-0.387	0.650	-0.396	0.769	-0.402	0.885	-0.404	1.000
-0.441	0.522	-0.449	0.645	-0.456	0.766	-0.461	0.884	-0.463	1.000
-0.505	0.518	-0.511	0.641	-0.517	0.763	-0.521	0.882	-0.523	1.000
-0.568	0.514	-0.574	0.638	-0.579	0.760	-0.582	0.881	-0.583	1.000
-0.632	0.512	-0.637	0.636	-0.641	0.758	-0.643	0.880	-0.644	1.000
-0.696	0.510	-0.700	0.634	-0.703	0.757	-0.705	0.879	-0.706	1.000
-0.760	0.508	-0.763	0.632	-0.765	0.756	-0.767	0.878	-0.768	1.000
-0.823	0.506	-0.826	0.631	-0.828	0.755	-0.829	0.878	-0.830	1.000
-0.887	0.505	-0.889	0.630	-0.891	0.754	-0.892	0.877	-0.892	1.000
-0.951	0.504	-0.952	0.629	-0.954	0.753	-0.955	0.877	-0.955	1.000
-1.014	0.504	-1.015	0.628	-1.016	0.753	-1.017	0.876	-1.017	1.000
-1.077	0.503	-1.078	0.628	-1.079	0.752	-1.080	0.876	-1.080	1.000
-1.141	0.502	-1.142	0.627	-1.143	0.752	-1.143	0.876	-1.143	1.000
-1.205	0.502	-1.205	0.627	-1.206	0.751	-1.207	0.876	-1.207	1.000
-1.268	0.502	-1.269	0.627	-1.269	0.751	-1.270	0.876	-1.270	1.000
-1.332	0.501	-1.333	0.626	-1.333	0.751	-1.333	0.876	-1.333	1.000
-1.396	0.501	-1.396	0.626	-1.396	0.751	-1.397	0.875	-1.397	1.000

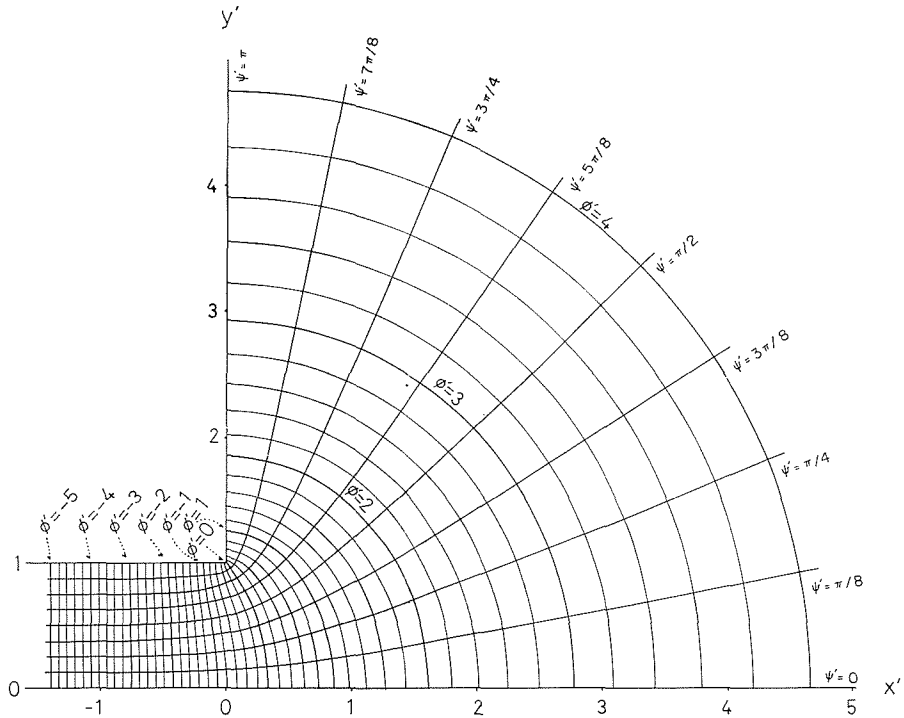


図-6 表-1 から作図した流線と速度 potential 線

隔は逆にせまくなり、また速度 potential 線の間隔も小さくなり、流速は急激に加速される。流出後の流線はやがて放射状となり、流速は ϕ' の全域で減少し、 $\phi' \rightarrow \infty$ では 0 に近づく。

この辺の状況は $|dw/dz|$ の値から察することができる。すなわち (10) 式と (11) 式とから

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{Q}{b} \left(\frac{dz'}{dw'} \right)^{-1} = \frac{Q}{b} (e^{w'} + 1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{Q}{b} \left\{ (e^{\phi'} \cos \phi' + 1)^2 + (e^{\phi'} \sin \phi')^2 \right\}^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-i \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{e^{\phi'} \sin \phi'}{e^{\phi'} \cos \phi' + 1} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

故に流速の絶対値を q とすれば

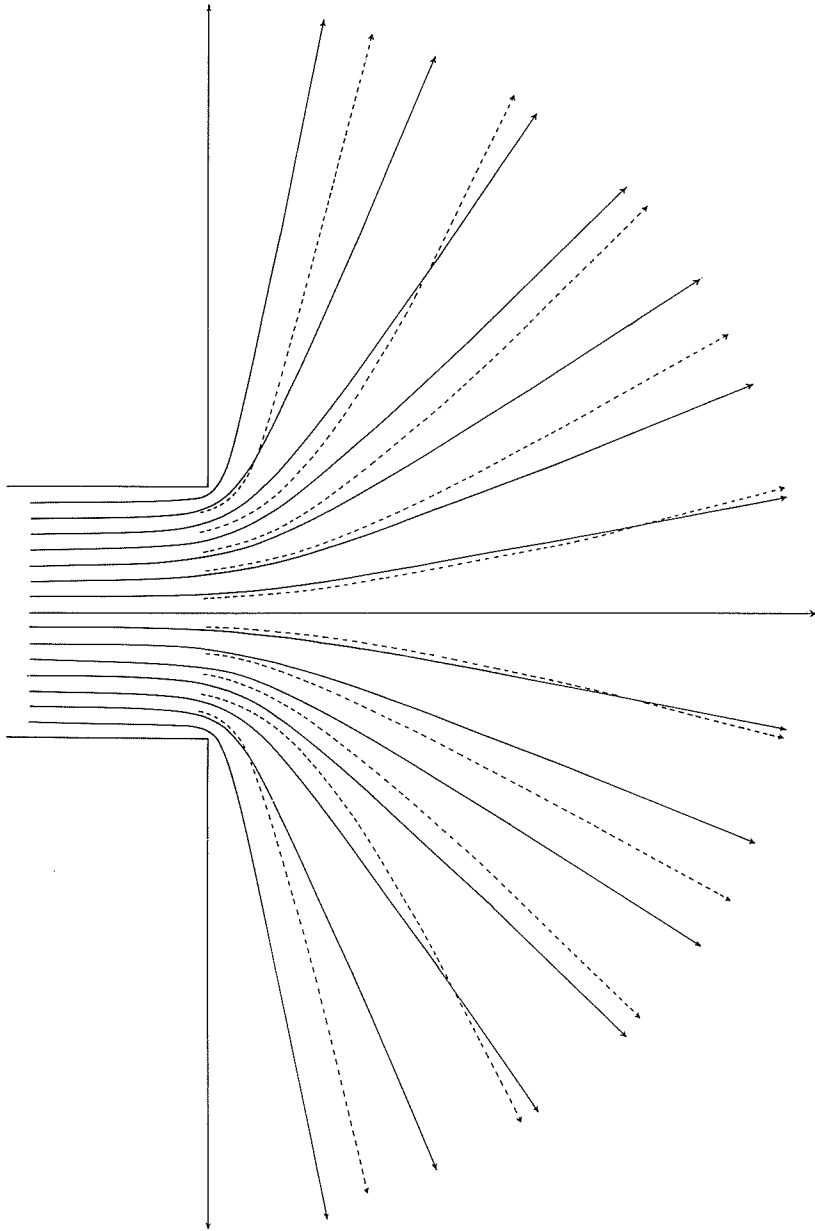
$$\begin{aligned} q &= \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{Q}{b} \left\{ (e^{\phi'} \cos \phi' + 1)^2 + (e^{\phi'} \sin \phi')^2 \right\}^{-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{Q}{b} (e^{2\phi'} + 1 + 2e^{\phi'} \cos \phi')^{-\frac{1}{4}} \quad (14) \end{aligned}$$

この式から水路の上流部では、 $\phi' \rightarrow -\infty$ とおけるから流速は ϕ' の値に無関係に $q = Q/b$ となって一定であり、逆に流出後は ϕ' が次第に大きくなるが $\phi' \rightarrow \infty$ とすればやはり ϕ' に関係なく $q = 0$ となることが判る。またそのときの流向は (13) 式の exponential term において $\phi' \rightarrow \infty$ とおけば得られるが、各流線は究極的に x 軸と $\phi'/2$ の角度をなし直線的に放射状に拡がっていくことが理解できる。

$\phi' = 0$ は outlet の点である。流速は $q = (Q/b) \cdot \{2(1 + \cos \phi')\}^{-1/4}$ で与えられ、流線によっ

て流速はかなり異なり、 $\psi'=0$ で最もおそく $q=(1/\sqrt{2})Q/b$ であるが、 ψ' が大きくなるに従って大となり $\psi'=\pi$ では無限大になることが示される。

このような流線の pattern と流速の分布が密度流型二層流の流出 pattern と比較したときに、どのような相異あるいはどのような一致を示すかという点がこの論文の中心であり節をあらためて述べてみたい。



図—7 単一理想流体と実験から得られた A 型密度流との流線の比較

3. 密度流的ひろがりとの比較

はじめに述べたように、例えば海面に河川が静かに流出するような場合、密度差のために淡水が塩水の上へのりあげてひろがるが、その流れかたは大体5つの pattern に分けられる。そのうちで流速がおそく密度差が大きいときに現れやすい A 型と称するもの (図-2 の写真参照) は流線の形状が一見して前節に述べた単一理想流体の流出 pattern と似ている。

いま両者を図上で比較すると図-7のとおりになる。点線は A 型密度流の流線である。この流線は水槽実験に現われた A 型密度流の写真の一つを転写したものであるが、残りの写真の流線もほぼ類似の形状を示している。実線は前節の計算による単一流体の流線である。

両者はたしかに似てはいるが、若干の相違が見出される。顕著な点は密度流の方がひろがり方が大きいことであって、ことに両側に向かうに従って流線の不一致の度合が大きくなる。また密度流では outlet を出る際に慣性を持って少し前方に出てから急速に左右にひろがっているようである。流線形状の相違としては以上のようなものであって、その他では例えば流線が次第に放射状に直線的になっていく傾向など、かなり似た面が多い。しかし流速の点では両者の性質上の相違からみて当然とは思われるが、かなり異なる点がある。点線で示した密度流では平面的に流速分布を得ることは、流速自体がごく微弱であるために測定が現在の段階では不可能であって、わずかに流心に沿っての二、三の測定がやっと得られた段階であるが、その資料と、あるいは実際の河口における表面流の実測結果とから一流体の流速分布とのちがいを指摘することができる。根本的な相違点としては、密度流では outlet で流れが加速される事をあげることができる。これは室内実験でも野外観測でもたしかめられていることであるが、その原因は表層の軽い流体が流出するにあたっては急激にその厚みを減ずることによって生ずるものと考えられる。さらに密度流では沖へひろがって行く場合の流速の減少の仕方が一流体よりかなりおそいことも注目される点である。

このように流線形状は多少似ているが流速分布にはかなり相違点がある。この点について多少議論を試みよう。

現実の流れで粘性や渦動粘性を無視することは不適當であることが多いが、この問題のように一様水路から無限に広い領域に流出するような過渡状態に限っては、しばしばそれらを無視した力学的挙動が卓越するので、今はこれらを無視して取り扱ってみる。このように考えた二層の定常流では下層は静止しているものとして扱えるから上層の軽い流体の運動方程式と連続方程式だけを考えれば充分であろう。

運動方程式と連続方程式はつぎのように与えられる。

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \varepsilon g \nabla h = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \cdot (h \mathbf{V}) = 0 \quad (16)$$

ここに h は表層の厚さ、 \mathbf{V} は表層の流速ベクトルであり、 ε は上下二層の密度比を 1 から引い

たものである。

非回転運動を仮定すれば $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ であるから (15) 式左辺第1項は

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{1}{2} V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \frac{1}{2} V^2 \quad (17)$$

となる。

故に (15) 式は積分されてつぎのとおりになる。すなわち

$$\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon g h = \text{const.} \quad (18)$$

ここに $q = |\mathbf{V}|$ である。この式は理想流体の二層流について、Bernoulli の式と同様の表現である。

この式から、outlet を出て表層厚 h が減少するに従って流れは加速される事情を知ることができる。 h は流れに従って次第に減少し、遂には0になるから (18) 式により流速 q は本来加速されてある一定値に収束するはずであるが、現実には粘性、渦動粘性によってたえずエネルギーを失なうので outlet で一時加速されてもその後次第に減速し遂には0になると考えられる。

このように密度流の特性には上層の淡水厚が大きな役割を果たしているのもあって、しかも (16) 式の連続方程式の中にも淡水厚 h が入っていることが問題の解析を困難にしているように思われる。

(16) 式から流れ関数に相当する scalar 量 ϕ がつぎの形で存在することが判る。

$$\left. \begin{aligned} hu &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ hv &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

さらに非回転運動であるから、 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ なる速度 potential ϕ が存在するので (19) 式とあわせて考えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となり、Cauchy-Riemann の式と類似な表現を得る。しかし h が存在するために特別な場合を除いては正則性を有する複素 potential を定義できないのでこの問題に等角写像法を適用する試みは今の所難しいと思われる。ただし ϕ と ψ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

を満足しているので、それぞれの等値線が常に直交することは一流体の速度 potential と流れ関数の場合と同様である。

4. 結 論

密度流的性格の強い A 型 outflow pattern と、単一理想流体の pattern とを比較した。その結果、密度流の方がひろがり方がやや強く、outlet を出てしばらくしてから急速にひろがることを見出された。その他の点では流線はかなりよく傾向が合っている。

流速分布には相違点がいくつか見出されたが、とくに流心に沿っての流れでは一流体では次第に減少するのに対し、密度流では outlet の付近で一時加速されたのち減少するのが特徴的である。これは、密度流では上層流の厚さが密接に運動に関与しているためと考えられる。

上層流の厚さを考慮に入れた密度流の outflow pattern についての理論解はまだ求められていない。これは今後の問題に属するものであって、実験資料の充足と相まって発展させていきたい。

この論文中の数値計算に当っては工業数学講座加地郁夫教授に多大の御援助をいただいた。ここに厚く御礼申し上げる。

文 献

- 1) 柏村・吉田：密度流の研究 (第 2 報), 北大工学部研究報告第 43 号, 昭 42, 5 月.
- 2) 柏村・吉田：河口密度流の解析, 第 14 回海岸工学講演会講演集, 昭 42, 10 月.
- 3) M. Kashiwamura & S. Yoshida: Outflow pattern of fresh water issued from a river mouth, Coast. Eng. in Japan, Vol. 10, 1967.
- 4) 柏村・吉田：河口の flow pattern について, 第 12 回水理講演会講演集, 昭 43, 2 月.