



Title	レンズ状媒質のゆらぎによるガウス型光ビーム波の姿態変換
Author(s)	菊池, 尚一; Kikuchi, Syōichi; 今井, 正明 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 53, 181-199
Issue Date	1969-03-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/40941">https://hdl.handle.net/2115/40941</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	53_181-200.pdf



# レンズ状媒質のゆらぎによるガウス型 光ビーム波の姿態変換

菊池 尚一\*

今井 正明\*

松本 正\*

(昭和43年12月2日受理)

## Mode Conversion of Gaussian Beams Propagating Through a Random Lens-Like Medium

Syōichi KIKUCHI

Masaaki IMAI

Tadashi MATSUMOTO

(Received December 2, 1968)

### Abstract

The mean-square value of a mode conversion coefficient was analytically obtained for a gaussian light beam propagating through a lens-like medium, i. e., a gas lens, that is considered as a focusing element for a laser beam waveguide in which the dielectric-constant varies essentially with quadratic law but has a term varying at random.

The mode conversion coefficient is evaluated by calculating the scalar-field propagating through a lens-like medium with fluctuations by means of a perturbation method and then by expanding at any point in the medium the scattered-field in terms of the scalar-field in the absence of fluctuations.

Here, assuming that the randomly homogeneous medium has gaussian covariance of the dielectric-constant fluctuations, the mode conversion coefficient is obtained as a mean-square value.

In such a realistic guiding medium with aberrations, the conversion into parasitic modes increases a diffraction loss, and it influences the efficiency of a heterodyne system.

The mode conversion caused by a gaussian light beam scintillation in the atmosphere was also discussed.

### 目 次

1. ま え が き .....	182
2. ランダム媒質中の電磁界 .....	183
3. レンズ状媒質のゆらぎによる姿態変換 .....	184

---

\* 電子工学科 電波伝送講座

4. 大気屈折率のゆらぎによる姿態変換 .....	192
5. む す び .....	195
文 献 .....	195
付 録 .....	196

## 1. ま え が き

レーザが1960年に発明されて以来、光領域のコヒーレントな電磁波を用いた光通信の研究が盛んになり広帯域性を利用した大容量情報伝送の可能性がでてきたが、そのためには長距離にわたって安定で低損失な伝送路が必要である。良質で安定な光の導波伝送については、光の周波数が $10^{14}$  Hz とミリ波より $10^3$  オーダが高くなり、したがって工作精度と伝送路の損失の問題から金属管による導波管は不适当である。その結果、現在考えられている伝送路として大きく分類すると線路を使用する形式と、伝搬するにつれ発散する光ビーム波を周期的にレンズ等を配列して集束させる形式(ビーム導波系)が考えられている。光線路として誘電体導波管、薄膜表面波線路等がある。誘電体導波管は中心部の屈折率を高くしてエネルギーを集ませて伝送させる方法であるが、誘電体による散乱吸収損失が大きく、薄膜表面波線路は誘電体損をさけるため誘電体を薄膜にして表面波線路にしたものであるが大部分の光エネルギーが自由空間を伝搬し、そのエネルギーは直進する性質を有するため曲りにおいて輻射損失が異常に増大する。またビーム導波系として光学レンズ導波系、ガスレンズ導波系が考えられている。光学レンズ導波系は反射防止膜により反射損失を低くすることができて、ビームのずれに対しては自動ビーム光路安定器やGMF<sup>1)</sup>等が考えられている。ガスレンズ導波系は気体の屈折率変化を用いて収束作用をもたせるため光学レンズや反射鏡にくらべて低損失であるが気体の性質上不安定となる。

そこで本論文ではガスレンズについて不安定性の原因であるレンズ状媒質がランダムに微小変動している場合に生ずるガウス波の姿態変換について考察した。ガスレンズにおいて媒質の誘電率分布が理想的な自乗分布である場合には、軸ずれ、傾きを有する任意のガウス波が入射しても姿態変換は生じないが、自乗変化項の外に4乗、6乗、…などの高次変化項を含んでいるとビームスポットは歪んで姿態変換して、ビーム行路は変動する<sup>2),3)</sup>。また理想媒質においてもガスレンズの曲りが急な場合は姿態変換を生じる<sup>4)</sup>。一方光学レンズにおいても製作上の誤差によるレンズ表面のランダムな不完全さ“polishing errors”により光ビーム波は歪み、基本姿態である準TEM<sub>00</sub>波から他の準TEM<sub>nm</sub>波へ姿態変換する<sup>5)</sup>。ここではレンズ状媒質が空間的にランダムに微小変動している場合の電磁界分布を摂動法により求めて、その媒質のゆらぎにより生じた二次電磁界をゆらぎのないレンズ状媒質の電磁界で展開して、その時の姿態変換係数を統計的自乗平均値として求めた。ここで媒質のゆらぎ分布はガウス型共分散を有するものと仮定した。次に上の結果を用いてレンズ作用をもたない大気屈折率のゆらぎによる光ビーム波の姿態変換について考察した。このように伝送されるガウスビーム波が媒質のゆらぎ

やレンズ表面の不完全さにより高次姿態であるエルミートガウス波に姿態変換されると、ガスレンズ(または光学レンズ, 反射鏡等)の大きさが有限であるために回折損失を増大させる。また姿態変換の増加は受信方法の選択に影響を及ぼし、特にヘテロダイン検波においては局発波と信号波のスポット幅, 偏波面及び波面が検波面で一致する必要があるから光ビーム波が長距離を伝送されて姿態変換をおこすとこれらがずれて信号出力は低下し  $S/N$  を劣化させる<sup>6)</sup>。

## 2. ランダム媒質中の電磁界

レンズ状媒質の誘電率分布を

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}) &= \varepsilon(0) \{1 - (g_1 x)^2 - (g_2 y)^2 + \delta\varepsilon(\mathbf{r})\} \\ \delta\varepsilon(\mathbf{r}) &\ll (g_1 x)^2, (g_2 y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

とする。ただし  $\varepsilon(0)$  は中心軸上の誘電率であり,  $\mathbf{r}$  は  $x, y, z$  成分を総括したものである。また  $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$  は誘電率分布が収束作用をする理想的自乗分布より微小に変動している成分(ゆらぎ成分)をあらわしており, その平均値は  $\langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \rangle \equiv 0$  である。この時スカラー界  $\Phi(\mathbf{r})$  は次の波動方程式を満足する。

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) - \mu\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

光ビーム波の中心部は平面波の性質に近いので  $z$  軸方向へ伝搬する角周波数  $\omega$  なる単色のビーム波  $\Phi(\mathbf{r})$  は次のように表わされる。

$$\Phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \exp\{j(\omega t - kz)\} \quad (3)$$

ここで波数  $k = \omega\sqrt{\varepsilon(0)\mu} = \omega n_0/c_0$  で,  $c_0$  は真空中の光速である。 $\phi(\mathbf{r})$  や  $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$  が光波長に比べてゆるやかに変動していると,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(\mathbf{r}) \right| \ll 2k \left| \frac{\partial}{\partial z} \phi(\mathbf{r}) \right| \quad (4)$$

なる近似が成り立ち, したがって式(3)を式(2)に代入すると  $\phi(\mathbf{r})$  は次の微分方程式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} L[\phi(\mathbf{r})] &= -k^2 \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \\ L &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial}{\partial z} - k^2((g_1 x)^2 + (g_2 y)^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)の解  $\phi(\mathbf{r})$  をゆらぎのない時の界  $\phi_{00}(\mathbf{r})$  からの摂動と考えて解く。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \phi_{00}(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r}) \\ |\phi_{00}(\mathbf{r})| &\gg |\delta\phi(\mathbf{r})| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とおくと,  $\delta\phi(\mathbf{r})$  は媒質のゆらぎによる二次電磁界である。式(6)の近似により, 入射ガウス波が媒質のゆらぎによって高次姿態へ変換される電力は非常に小さいので, 高次姿態に変換された

波が再びもとの基本姿態  $\phi_{00}(\mathbf{r})$  に変換される (再変換) 効果は無視した。式 (6) を式 (5) に代入して摂動の一次オーダーまで考えると、

$$\left. \begin{aligned} L[\phi_{00}(\mathbf{r})] &= 0 \\ L[\delta\phi(\mathbf{r})] &= -f(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = k^2 \delta z(\mathbf{r}) \phi_{00}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。式 (7) より  $\phi_{00}(\mathbf{r})$  が求まれば摂動解  $\delta\phi(\mathbf{r})$  は Green 関数法を用いて得られ、

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (8)$$

となる。ここで Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  は<sup>7)</sup>

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \begin{cases} \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{4\pi \sqrt{\sin g_1(z-z_1) \sin g_2(z-z_1)}} \\ \times \exp \left\{ j \frac{2zx_1 - (x^2 + x_1^2) \cos g_1(z-z_1)}{2w_{01}^2 \sin g_1(z-z_1)} + j \frac{2yy_1 - (y^2 + y_1^2) \cos g_2(z-z_1)}{2w_{02}^2 \sin g_2(z-z_1)} \right\} \\ \quad ; z < z_1 \\ 0 \quad ; z > z_1 \end{cases} \quad (9)$$

と与えられるから (付録 A), これを式 (8) に代入するとゆらぎによる電磁界の歪み成分  $\delta\phi(\mathbf{r})$  は計算できる。ここでは  $\delta\phi(\mathbf{r})$  を入射基本姿態  $\phi_{00}(\mathbf{r})$  から他の高次姿態  $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  への姿態変換として評価した。すなわち  $\delta\phi(\mathbf{r})$  を理想媒質内にエルミート・ガウス波が入射した場合の応答電磁界  $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  で展開すると、

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(z) \phi_{nm}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

となる。ここで、 $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  が規格化されていると媒質のゆらぎによる歪み成分  $\delta\phi(\mathbf{r})$  の電力は

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\delta\phi(\mathbf{r})|^2 dx dy = |C_{00}|^2 + \sum_{\substack{n=0 \\ n+m \neq 0}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |C_{nm}|^2 \quad (11)$$

となり、右辺の第二項目は入射基本姿態 (ガウス波) から他の高次姿態 (エルミート・ガウス波) へ変換される電力を表わす。ここでは媒質のゆらぎ分布は統計的にのみ与えられているので姿態変換係数も自乗平均値  $\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle$  を求めた。

### 3. レンズ状媒質のゆらぎによる姿態変換

式 (10) の応答電磁界  $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  は、レンズ状媒質に入射したビーム波を理想誘電率分布を有する媒質の固有姿態で展開し任意の点で合成することにより求まる<sup>8)</sup>。すなわち入射ビーム波として次のようなレーザ光源の基本姿態であるスポットサイズ  $s_i$ , 曲率半径  $l_i (i=1, 2)$  なるガウス分布を考える。

$$\phi_{00}(x, y, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi s_1 s_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s_1^2} - j \frac{k}{l_1} \right) x^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s_2^2} - j \frac{k}{l_2} \right) y^2 \right\} \quad (12)$$

この時入射面より距離  $z$  だけ離れた面上の応答電磁界は

$$\begin{aligned} \phi_{00}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi w_1 w_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{w_1^2} + j \frac{k}{R_1} \right) x^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w_2^2} + j \frac{k}{R_2} \right) y^2 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ j \frac{1}{2} (\tan^{-1} F_1 + \tan^{-1} F_2) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。入射ビーム波が高次姿態であるエルミート・ガウス波であるとその応答電磁界  $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  は同様にして次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_{nm}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi w_1 w_2}} H_n \left( \frac{x}{w_1} \right) H_m \left( \frac{y}{w_2} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{w_1^2} + j \frac{k}{R_1} \right) x^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w_2^2} + j \frac{k}{R_2} \right) y^2 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ j \left( n + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} F_1 + j \left( m + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} F_2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{cases} w_i = s_i \sqrt{\left( \cos g_i z - \frac{\sin g_i z}{g_i l_i} \right)^2 + \left( \frac{w_{0i}}{s_i} \right)^4 \sin^2 g_i z} \\ R_i = k w_{0i}^2 \frac{\left( \cos g_i z - \frac{\sin g_i z}{g_i l_i} \right)^2 + \left( \frac{w_{0i}}{s_i} \right)^4 \sin^2 g_i z}{\left( \frac{w_{0i}}{s_i} \right)^4 \cos g_i z \sin g_i z - \left( \sin g_i z + \frac{\cos g_i z}{g_i l_i} \right) \left( \cos g_i z - \frac{\sin g_i z}{g_i l_i} \right)} \\ F_i = \frac{\left( \frac{w_{0i}}{s_i} \right)^2 \sin g_i z}{\cos g_i z - \frac{\sin g_i z}{g_i l_i}} \end{cases} \quad (15)$$

式(14)を式(10)、式(8)に代入してエルミート・ガウシアン関数の直交性を考慮すると展開係数  $C_{nm}(z)$  は求まるが、ここでは計算の便宜上 Green 関数を  $\phi_{nm}(\mathbf{r})$  と  $\phi_{nm}^*(\mathbf{r}_1)$  の積の形で展開してみる。すなわち、

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{nm}(\mathbf{r}) \phi_{nm}^*(\mathbf{r}_1) \quad (16)$$

ただし \* 印は複素共役をとることを意味する。

とにおいて右边を計算すると、

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \begin{cases} jC \frac{1}{2\pi w_{01} w_{02}} \frac{1}{\sqrt{\sin g_1(z-z_1) \sin g_2(z-z_1)}} \\ \quad \times \exp \left\{ j \frac{2xx_1 - (x^2 + x_1^2) \cos g_1(z-z_1)}{2w_{01}^2 \sin g_1(z-z_1)} + j \frac{2yy_1 - (y^2 + y_1^2) \cos g_2(z-z_1)}{2w_{02}^2 \sin g_2(z-z_1)} \right\} \\ \quad ; z > z_1 \\ 0 \quad ; z < z_1 \end{cases} \quad (17)$$

式(17)と式(9)を比較することにより展開係数  $C$  は決定されて、

$$C = -j \frac{1}{2k} \quad (18)$$

したがって Green 関数は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \begin{cases} -j \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{nm}(\mathbf{r}) \phi_{nm}^*(\mathbf{r}_1) & ; z > z_1 \\ 0 & ; z < z_1 \end{cases} \quad (19)$$

ゆえに姿態変換係数  $C_{nm}(z)$  は式 (19), 式 (10) および式 (8) より

$$C_{nm}(z) = -j \frac{k}{2} \int \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \phi_{00}(\mathbf{r}_1) \phi_{nm}^*(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (20)$$

となる。いまレンズ状媒質のゆらぎ分布  $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$  は確率変数でその平均値は  $\langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}) \rangle \equiv 0$  であるが共分散関数として今まで考えられていて物理的にも妥当なガウス型を考えた<sup>††</sup>。

$$\langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \cdot \delta\varepsilon(\mathbf{r}_2) \rangle \equiv \langle \delta\varepsilon^2 \rangle \exp \left\{ - \left( \frac{x_1 - x_2}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{y_1 - y_2}{a_2} \right)^2 - \left( \frac{z_1 - z_2}{a_3} \right)^2 \right\} \quad (21)$$

ここで  $a_i (i=1, 2, 3)$  は  $i$  方向の相関強度が  $1/e$  に低下する相関距離を表わす。

したがって姿態変換係数  $C_{nm}(z)$  の自乗平均値は式 (20), 式 (21) より次のようになる (付録 B)。

$$\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle = \sqrt{\pi} \langle \delta\varepsilon^2 \rangle \left( \frac{k}{2} \right)^2 \left( \frac{a_1}{s_1} \right) \left( \frac{a_2}{s_2} \right) a_3 \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} \int_0^z dz_+ F(z_+) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで,} \\ F(z_+) = & \frac{\left\{ \left( \cos g_1 z_+ - \frac{\sin g_1 z_+}{g_1 l_1} \right)^2 + \left( \frac{w_{01}}{s_1} \right)^4 \sin^2 g_1 z_+ \right\}^n}{\left[ \left( \frac{a_1}{s_1} \right)^2 + 2 \left\{ \left( \cos g_1 z_+ - \frac{\sin g_1 z_+}{g_1 l_1} \right)^2 + \left( \frac{w_{01}}{s_1} \right)^4 \sin^2 g_1 z_+ \right\} \right]^{n+1/2}} \\ & \times \frac{\left\{ \left( \cos g_2 z_+ - \frac{\sin g_2 z_+}{g_2 l_2} \right)^2 + \left( \frac{w_{02}}{s_2} \right)^4 \sin^2 g_2 z_+ \right\}^m}{\left[ \left( \frac{a_2}{s_2} \right)^2 + 2 \left\{ \left( \cos g_2 z_+ - \frac{\sin g_2 z_+}{g_2 l_2} \right)^2 + \left( \frac{w_{02}}{s_2} \right)^4 \sin^2 g_2 z_+ \right\} \right]^{m+1/2}} \end{aligned} \quad (23)$$

ただし

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

特に入射ビーム波のスポットサイズが固有スポットサイズに等しく ( $s_i = w_{0i}$ ), 波面が平面 ( $l_i \rightarrow \infty$ ) であるとき,

$$\begin{aligned} \langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle \Big|_{s_i = w_{0i}} &= \sqrt{\pi} \langle \delta\varepsilon^2 \rangle \left( \frac{k}{2} \right)^2 \left( \frac{a_1}{w_{01}} \right) \left( \frac{a_2}{w_{02}} \right) a_3 z \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} \\ & \times \frac{1}{\left\{ 2 + \left( \frac{a_1}{w_{01}} \right)^2 \right\}^{n+1/2} \left\{ 2 + \left( \frac{a_2}{w_{02}} \right)^2 \right\}^{m+1/2}} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。以下式 (22) の姿態変換係数の自乗平均値について考察する。いまもっとも簡単なモデルとしてレンズ状媒質の定数  $g_1 = g_2 = g$ ,  $w_{01} = w_{02} = w_0 (= 1/\sqrt{kg})$ , 入射ガウス波のスポットサイズ  $s_1 = s_2 = s$ , 曲率半径  $l_1 = l_2 = l$  とした。また媒質のゆらぎの状態は径方向では等方均質と

† 実際は相関距離  $a_i$  も  $r$  の関数と考えられるが, ここでは零次近似として式 (21) のような形を考えた。  
 †† 光学レンズ導波系においてもレンズ表面のランダムな不完全さにより光ビーム波の位相は変化するが, その共分散関数としてガウス型が考えられている<sup>5)</sup>。

仮定して  $a_1 = a_2 = a$  とおいた。その結果式 (22), 式 (23) は

$$\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle = \sqrt{\pi} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle \left( \frac{k}{2g} \right)^2 \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} \bar{a}_3 \left( \frac{a}{s} \right)^2 \int_0^{\bar{z}} F(\bar{z}_1) d\bar{z}_1 \quad (25)$$

$$F(\bar{z}_+) = \frac{\left\{ \left( \cos \bar{z}_+ - \frac{\sin \bar{z}_+}{\bar{l}} \right)^2 + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right\}^{n+m}}{\left[ \left( \frac{a}{s} \right)^2 + 2 \left\{ \left( \cos \bar{z}_+ - \frac{\sin \bar{z}_+}{\bar{l}} \right)^2 + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right\} \right]^{n+m+1}} \quad (26)$$

ただし

$$\bar{z}_+ = gz_+, \quad \bar{z} = gz, \quad \bar{a}_3 = ga_3, \quad \bar{l} = gl$$

レンズ状媒質に入射するガウス波の波面を平面とすると,  $l \rightarrow \infty$  であるから式 (26) は

$$F(\bar{z}_+) = \frac{\left\{ \cos^2 \bar{z}_+ + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right\}^{n+m}}{\left[ \left( \frac{a}{s} \right)^2 + 2 \left\{ \cos^2 \bar{z}_+ + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right\} \right]^{n+m+1}} \quad (27)$$

となる。 $\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle$  を規格化して次のようにおく。

$$P_{nm} = \frac{\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle}{\sqrt{\pi} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle \left( \frac{k}{2g} \right)^2 \bar{a}_3} \quad (28)$$

ここで物理的に重要な同じ伝搬定数をもつ縮退した姿態の組を考慮して<sup>5)</sup>,

$$r = n + m \quad (29)$$

とおくと規格化された姿態変換係数の自乗平均値は

$$P_r = \int_0^{\bar{z}} K(\bar{z}_+) d\bar{z}_+ \quad \left. \vphantom{P_r} \right\} \quad (30)$$

$$K(\bar{z}_+) = \left( \frac{a}{s} \right)^2 \frac{\left\{ 2 \left( \cos^2 \bar{z}_+ + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right) \right\}^r}{\left\{ \left( \frac{a}{s} \right)^2 + 2 \left( \cos^2 \bar{z}_+ + \left( \frac{w_0}{s} \right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right) \right\}^{r+1}}$$

と表わされる。姿態整合されている場合,  $s = w_0$  とおくと積分することができて,

$$P_r = \frac{2^r \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \bar{z}}{\left\{ 2 + \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \right\}^{r+1}} \quad (31)$$

となる。姿態整合されていない任意の入射ビーム波の場合は式 (30) をガウスの公式 (付録 C) を用いて数値積分した (ただし分割数  $n=16$ )。)

### a) 固有ガウス波の姿態変換

Fig. 1~3 に入射ガウス波が姿態整合されている場合 ( $s/w_0=1.0$ ) のガウスビーム波の姿態変換の分布を示している。Fig. 1 により固有ガウス波は伝搬距離  $z$  に比例して姿態変換は増加して規格化された全姿態変換量  $P_r$  は式 (31) より,

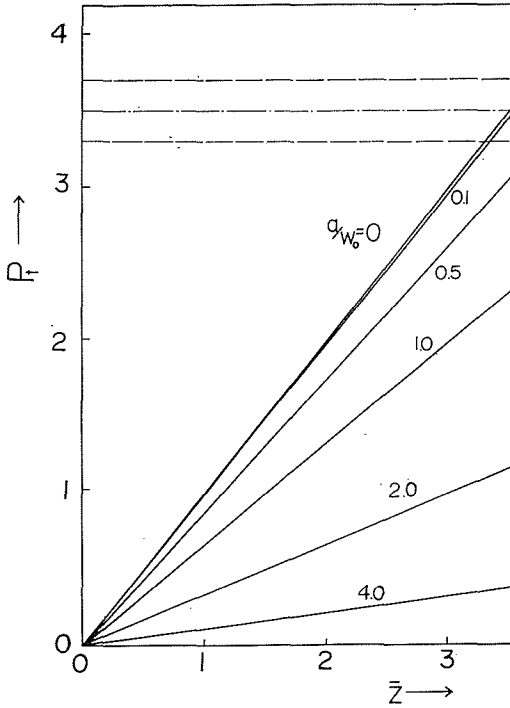


Fig. 1. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized propagation length ( $\bar{z}=gz$ ) for the intrinsic gaussian beam.

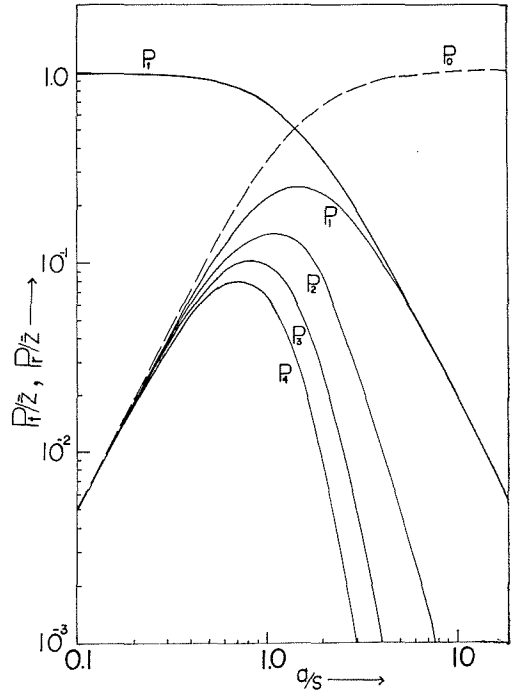


Fig. 2. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized correlation length ( $a/s$ ) for the intrinsic gaussian beam.

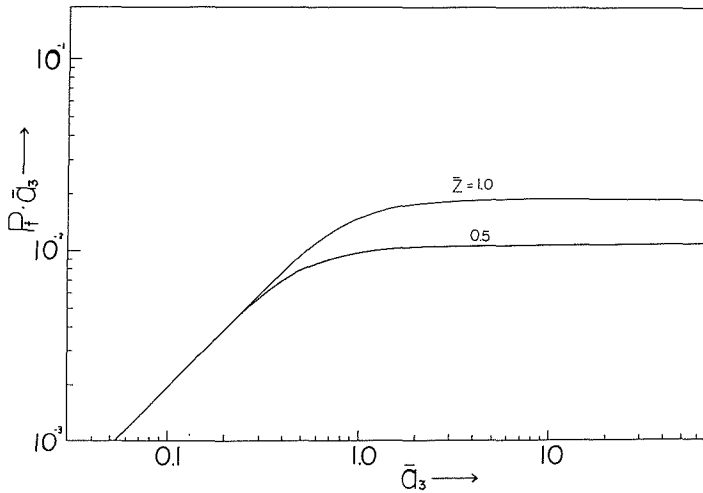


Fig. 3. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized longitudinal correlation length ( $a_3=ga_3$ ) for  $a/w_0=10.0$ .

$$P_t = \sum_{r=1}^{\infty} P_r = \frac{2}{2 + \left(\frac{a}{w_0}\right)^2} \bar{z} \quad (32)$$

となる。また径方向の相関半径  $a$  と姿態変換の関係は Fig. 2 に示してある。固有ガウス波は伝搬方向に関しては  $z$  に比例して増加しているので  $a$  と  $P_r, P_t$  の関係は  $z$  のあらゆる点で同じ傾向を示す。Fig. 2 によると各々の高次姿態の発生量は  $a/w_0 = \sqrt{2/r}$  なる相関半径の時最大となっている。すなわち  $r=1, 2, 3, 4, \dots$  なる高次姿態に対してはそれぞれ  $a/w_0 = \sqrt{2}, 1, \sqrt{2/3}, 1/\sqrt{2}, \dots$  の時最大となっているが、 $P_t$  は  $a$  の減少と共に急激に増加している。相関半径が  $a < w_0$  でレンズ状媒質がビームスポットの内部でもゆらいでいる場合は各々の高次姿態の発生量も大きくなっているが、 $a \ll w_0$  でビーム内部でのゆらぎが非常に細かい場合はガウスビーム波は各高次姿態へ同程度に変換され  $a$  に比例して増加している。また  $a > w_0$  でゆらぎの相関半径がビームスポットサイズにくらべて大きい場合は各高次姿態への姿態変換量は  $(a/w_0)^{-2r}$  の傾きで減少しているが、特に  $a \gg w_0$  で径方向のゆらぎがビームスポットサイズにくらべて非常にゆるやかな場合は  $P_t$  は  $r=1$  姿態にのみ依存して  $(a/w_0)^{-2}$  の傾きで減少している。ビーム波の歪み成分  $\delta\phi$  のうち基本姿態  $P_0$  の変化は、点線で示したように  $a/w_0 = \sqrt{2}$  で  $P_t$  と対称になり  $a$  と共に単調増加している。Fig. 3 は  $z$ -方向の相関距離  $a_3$  と姿態変換の関係を示している。式 (25) より  $a_3 \ll z$  では  $a_3$  に比例して姿態変換は増加しているが、ここでは近似を用いる前の式 (B3) より姿態整合されている場合の全姿態変換量は

$$P_t \cdot \bar{a}_3 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{a}{w_0}\right)^2}{\left\{2 + \left(\frac{a}{w_0}\right)^2\right\}^2} \bar{z} \int_0^{\bar{z}} e^{-\left(\frac{\bar{z}}{\bar{a}_3}\right)^2} \frac{\cos \bar{z}_- - \frac{2}{2 + \left(\frac{a}{w_0}\right)^2}}{1 - \frac{4}{2 + \left(\frac{a}{w_0}\right)^2} \cos \bar{z}_- + \left\{ \frac{2}{2 + \left(\frac{a}{w_0}\right)^2} \right\}^2} d\bar{z}_- \quad (33)$$

となる。この結果  $z$ -方向の相関距離がレンズ長より小さい場合は ( $a_3 < z$ )、 $a_3$  に比例して姿態変換は増加し、それより大きくなるとほぼ一定となっている。

### b) 任意のガウス波の姿態変換

Fig. 4~9 にスポットサイズ  $s$  なる任意のガウス波が入射した場合の姿態変換の分布を示している。式 (30) により任意のガウス波の規格化された全高次姿態への姿態変換量  $P_t$  は

$$P_t = \int_0^{\bar{z}} \frac{2 \left( \cos^2 \bar{z}_+ + \left(\frac{w_0}{s}\right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right)}{\left(\frac{a}{s}\right)^2 + 2 \left( \cos^2 \bar{z}_+ + \left(\frac{w_0}{s}\right)^4 \sin^2 \bar{z}_+ \right)} d\bar{z}_+ \quad (34)$$

となる。Fig. 4, 5 をみるとわかるように相関半径  $a$  が小さい程姿態変換量は増加し、 $a/s \rightarrow 0$  となると入射ガウス波のスポットサイズにかかわらず  $z$  に比例して姿態変換量は増加している。また  $a$  が大きくなると  $P_t$  は周期  $\pi/g$  で振動しながら増加し、 $a$  が大きい程振動の振幅は大きくなっている。これは式 (34) の被積分関数を調べることにより理解される。この振動の現象はビ

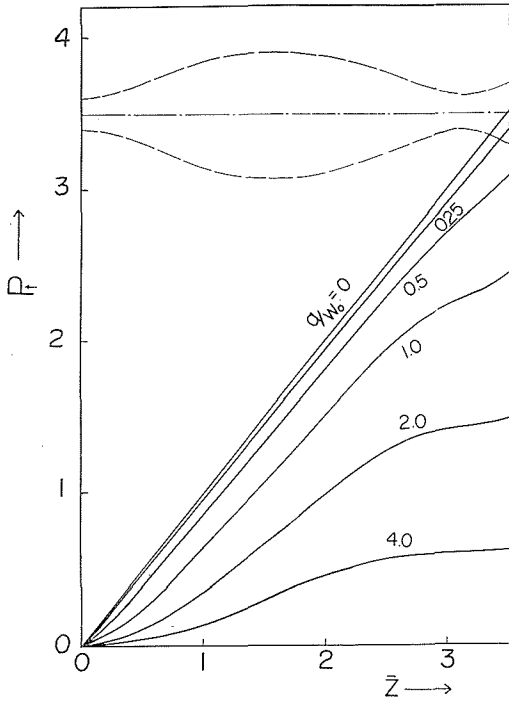


Fig. 4. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized propagation length ( $\bar{z}=gz$ ) for the beam of  $s/w_0=0.5$ .

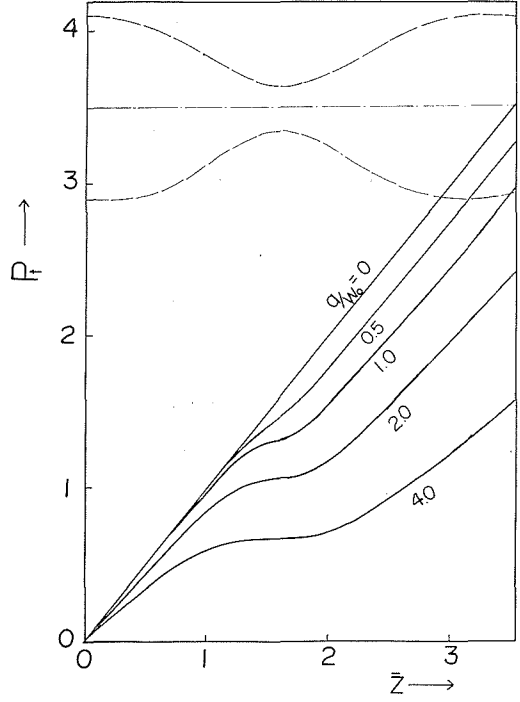


Fig. 5. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized propagation length ( $\bar{z}=gz$ ) for the beam of  $s/w_0=4.0$ .

ームスポットサイズの変動と関係づけられている<sup>9)</sup>。すなわち屈折率が自乗分布をもった理想媒質中では、固有 Gauss 波に対してはスポットサイズは変化せず一定であるが任意の Gauss ビーム波のスポットサイズは周期  $\pi/g$  で振動する。また  $0 < z < \pi/2g$  では  $s/w_0 < 1.0$  なるビーム波に対しては増加し  $s/w_0 > 1.0$  なるビーム波では減少して、 $\pi/2g < z < \pi/g$  では上記の関係は逆になっている (Fig. 1, Fig. 4, Fig. 5 の点線はビームスポットの変動を表わす)。したがって Fig. 4, 5 よりビームが収束状態にある時  $a/s$  が相対的に大きくなり、Gauss ビーム波のゆらぎは弱められて姿態変換の増加する割合は減少し、またビーム波が発散状態にある時は  $a/s$  の値が相対的に小さくなり、Gauss ビーム波のゆらぎが強められて姿態変換の増加する割合が大きくなっていることがわかる。これは大気中の Gauss ビーム波の伝搬と同様な結果となっている。すなわち収束ビーム波が大気中を伝搬するとその焦点付近ではビーム波のゆらぎは弱められて姿態変換の増加する割合は減少し、相関半径  $a$  が大きい程その傾向は著しくなっている (次章参照)。この結果ガスレンズの長さを  $s/w_0 < 1.0$  のビーム波に対しては  $z = \pi/g$ 、 $s/w_0 > 1.0$  のビーム波に対しては  $z = \pi/2g$  とするとともにゆらぎの影響を少なくすることができる。径方向の相関半径と姿態変換の関係は Fig. 6~8 に示してあるが、Fig. 6 によると光ビーム波の伝搬距離が短かく  $z < 0.1/g$  では入射ビーム波のスポットサイズにかかわらず姿態整合された場合

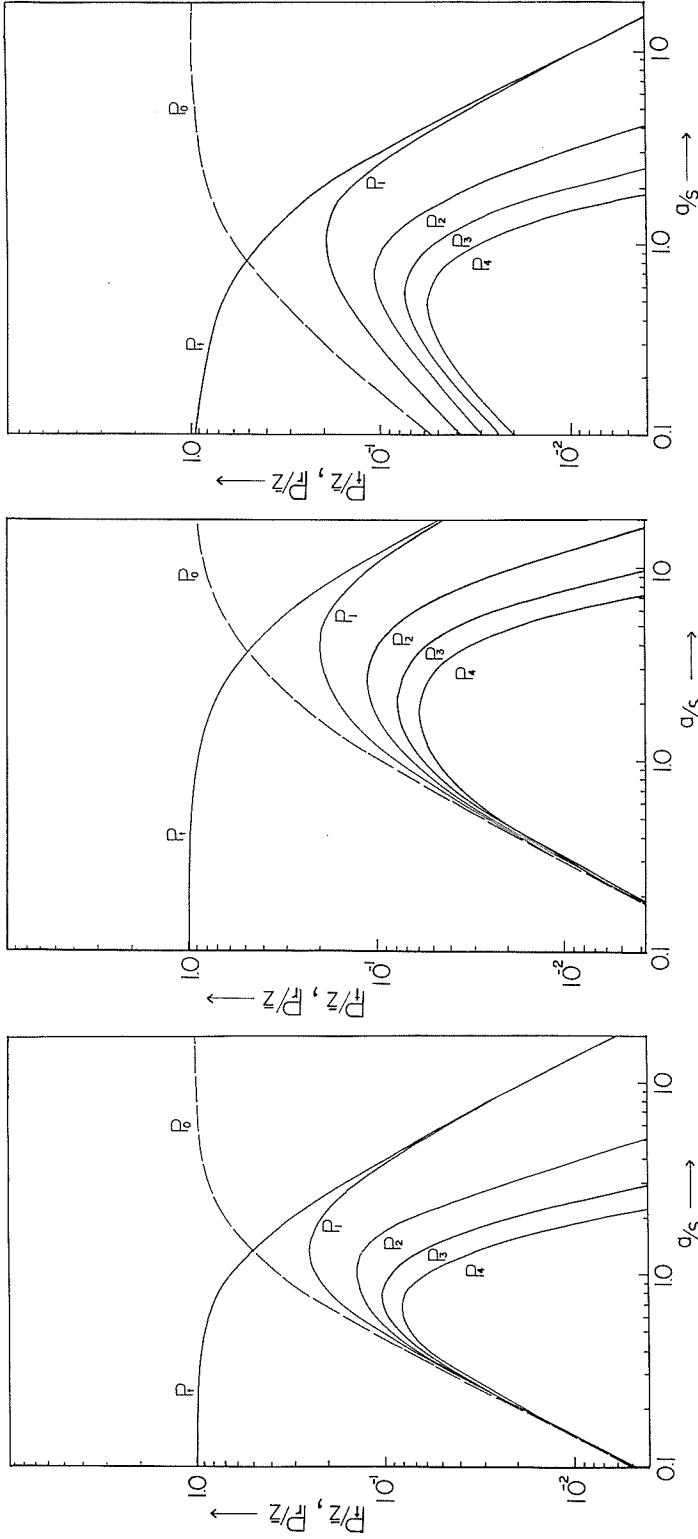


Fig. 6. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized correlation length ( $a/s$ ) for the arbitrary gaussian beam at  $gz = \pi/2$ .

Fig. 7. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized correlation length ( $a/s$ ) for  $s/aw_0 = 0.5$  at  $gz = \pi/2$ .

Fig. 8. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized correlation length ( $a/s$ ) for  $s/aw_0 = 4.0$  at  $gz = \pi/2$ .

と同様に  $a/s = \sqrt{2/r}$  なる相関半径の時各々の高次姿態はもっとも多く発生していて全姿態変換量  $P_t$  も固有ガウス波の場合と同様の傾向を示している。しかしながら任意のガウス波は伝搬するにつれて振動するので最大値をとる相関半径の値は変化する。Fig. 7, 8 には  $z = n\pi/2g$  ( $n=1, 2, \dots$ ) なる点での  $s/w_0 = 0.5, 4.0$  の入射ビーム波の  $P_t, P_r$  と  $a/w_0$  の関係を示している。その結果  $s/w_0 < 1.0$  なるビーム波では  $a/s|_{\max} > \sqrt{2/r}$ ,  $s/w_0 > 1.0$  では  $a/s|_{\max} < \sqrt{2/r}$  となり、したがって  $P_t$  は入射ビーム波が姿態整合されている場合が  $a/w$  の増加に対してもっとも早く減少している。また  $a \gg s$  なる相関半径の時は  $P_t$  は  $(a/s)^{-2}$  の傾きで減少している。Fig. 9 には  $z = n\pi/2g$  ( $n=1, 2, \dots$ ) なる点での  $s/w_0$  と  $P_t$  の関係を示してあるが、固有ガウス波の時姿態変換は最小となり  $a$  が大きい程減少の傾向は大きくなっている。

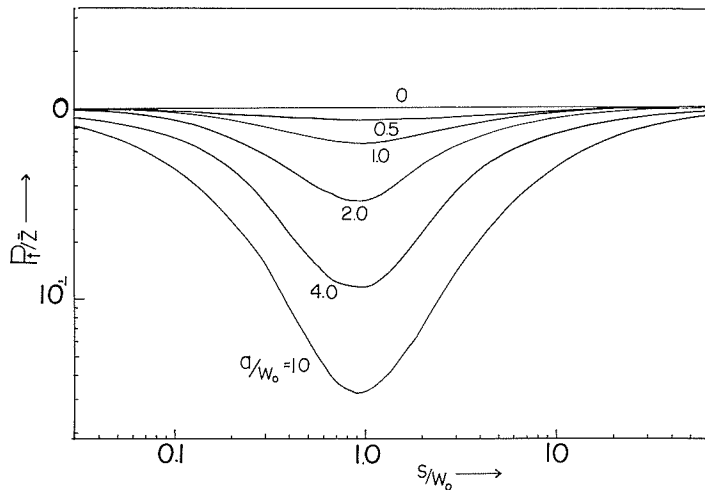


Fig. 9. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized spot-size  $s/w_0$  for an incident gaussian beam at  $gz = \pi/2$ .

#### 4. 大気屈折率のゆらぎによる姿態変換

3.の結果を用いると大気中を伝搬するレーザービーム波がうける姿態変換についても考察することができる。すなわち大気は気象状態の変動により屈折率に部分的にランダムな変動(ゆらぎ)が存在するのでレーザー光が乱れのある大気中を伝搬するとコヒーレントな性質が損われビーム波の形は歪んでくる。またしゃへいされた光学レンズ導波系においてもレンズ間の気体の屈折率がランダムに微小変動するとビーム波は姿態変換する<sup>5)</sup>。そこで大気中の誘電率分布がランダムに微小変動する成分  $\delta\epsilon(\mathbf{r})$  がガウス形共分散をもつと仮定すると<sup>†</sup>, ガウス型ビーム

† 大気の屈折率の乱れは一般に構造関数 (structure function) で定義され屈折率の変化が局所的に一様で等方性と考えられる時は構造関数は Kolmogorov 型となり二点間の距離  $r$  の  $2/3$  乗に比例するが、特に無限大のスケールまで乱れが一様であると考えられる時は構造関数としてガウス型共分散を考えることもできる。

波が光源面より距離  $z$  だけ離れた面上での姿態変換係数の統計的自乗平均値は式 (22), 式 (23) において  $g_i (i=1, 2) \rightarrow 0$  とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \langle |C_{nm}(z)| \rangle &= \sqrt{\pi} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle \left( \frac{k}{2} \right)^2 \left( \frac{a_1}{s_1} \right) \left( \frac{a_2}{s_2} \right) a_3 \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} \int_0^z d\bar{z}_+ F(\bar{z}_+) \\ F(\bar{z}_+) &= \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{\bar{z}_+}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}_+}{ks_1^2} \right)^2 - \frac{2\bar{z}_+}{l_1} \right\}^n \left\{ 1 + \left( \frac{\bar{z}_+}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}_+}{ks_2^2} \right)^2 - \frac{2\bar{z}_+}{l_2} \right\}^m}{\left[ \left( \frac{a_1}{s_1} \right)^2 + 2 \left\{ 1 + \left( \frac{\bar{z}_+}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}_+}{ks_1^2} \right)^2 - \frac{2\bar{z}_+}{l_1} \right\} \right]^{n+1/2} \cdot \left[ \left( \frac{a_2}{s_2} \right)^2 + 2 \left\{ 1 + \left( \frac{\bar{z}_+}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{\bar{z}_+}{ks_2^2} \right)^2 - \frac{2\bar{z}_+}{l_2} \right\} \right]^{m+1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

いま波源のスポットサイズ  $s_1 = s_2 = s$ , 曲率半径  $l_1 = l_2 = l$  でランダム媒質の相関半径  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  とすると式 (35) は

$$\left. \begin{aligned} \langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle &= 2\sqrt{\pi} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle \left( \frac{ka}{2} \right)^3 \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} \int_0^{\bar{z}} F(\bar{z}_+) d\bar{z}_+ \\ F(\bar{z}_+) &= \frac{[(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}]^{n+m}}{[1 + 2(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}]^{n+m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし

$$\bar{z}_+ = \frac{z_+}{ka^2}, \quad \bar{z} = \frac{z}{ka^2}, \quad \bar{l} = \frac{l}{ka^2}$$

となる。ここでは  $\langle \delta \varepsilon^2 \rangle$  と相関半径  $a$  が一定なガウス型ランダム媒質中を伝搬する光ビーム波の姿態変換について考察する。まず  $\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle$  を次のように規格化する。

$$P_{nm} = \frac{\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle}{2\sqrt{\pi} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle \left( \frac{ka}{2} \right)^3} \quad (37)$$

前章と同様に縮退した姿態の組を考慮して,  $r = n + m$  とおくと規格化された姿態変換係数の自乗平均値  $P_r$  は式 (36) より

$$\left. \begin{aligned} P_r &= \int_0^{\bar{z}} K(\bar{z}_+) d\bar{z}_+ \\ K(\bar{z}_+) &= \frac{[2(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}]^r}{[1 + 2(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}]^{r+1}} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

となる。したがって全高次姿態への姿態変換量  $P_t$  は

$$P_t = \int_0^{\bar{z}} \frac{2(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}}{1 + 2(s/a)^2 \{1 + (\bar{z}_+/l)^2 + (\bar{z}_+/(s/a)^2)^2 - 2(\bar{z}_+/l)\}} d\bar{z}_+ \quad (39)$$

Fig. 10, 11 に曲率半径  $l = ka^2$  ( $\bar{l} = 1.0$ ) なる収束型ガウスビーム波の姿態変換の分布を示した。Fig. 10 によると  $z < l$  では  $s/a$  の大きいビーム波の方が姿態変換は大きい。  $z = l$  付近ではその増加の割合が急激に減少している。  $z > l$  ではビームスポットサイズに関係なく  $z$  に比例して姿態変換は増加している。 Fig. 11 は  $P_t$  を平面波の姿態変換係数の自乗平均値  $P_{t,p}$  で規格

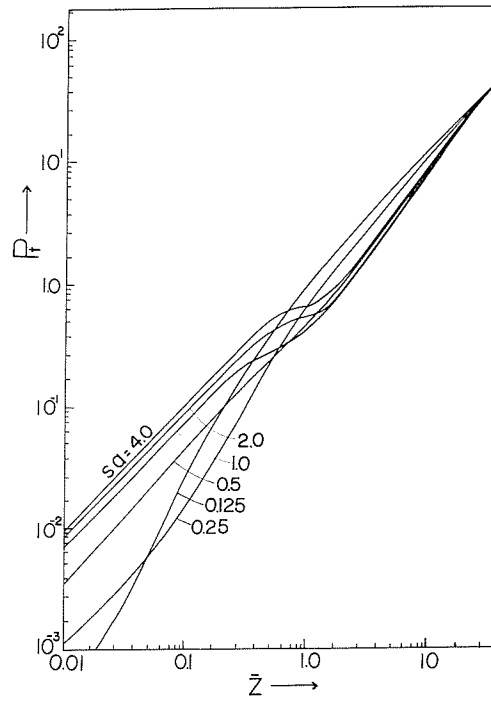


Fig. 10. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized propagation length ( $\bar{z}=z/ka^2$ ) for the collimated beam of  $l=ka^2$ .

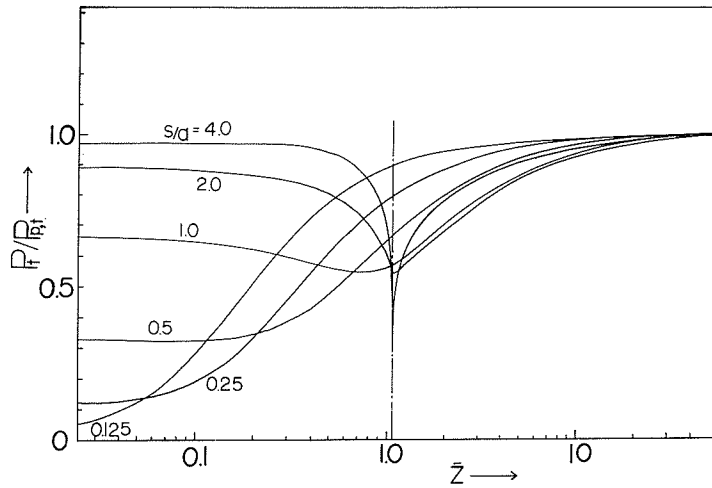


Fig. 11. Normalized mode conversion coefficient versus the normalized propagation length ( $\bar{z}=z/ka^2$ ) for the collimated beam of  $l=ka^2$ . The coefficient is normalized by one of a plane wave.

化した分布である。 $P_{t,p}$  は式 (39) において  $s \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$  とすると,

$$P_{t,p} = \bar{z} \quad (40)$$

となり  $z$  に比例して増加している。Fig. 11 によると光ビーム波の姿態変換は  $z < l$  では平面波と同様の傾向を示すが、 $z = l$  付近では  $s/a > 1.0$  なるビーム波に対しては減少しビームスポットサイズが大きい程減少の傾向は著しくなっている。また  $z > l$  では  $s/a$  の小さいビーム波の方が姿態変換は大きくなっているが、 $z \gg l$  となるとビームスポットサイズに関係なく平面波の姿態変換量と同じになっている。この結果、ビーム波の焦点付近に受光面をおくとゆらぎの影響をもっとも小さくすることができる。また  $P_t$  は文献 (10), (11) で定義されている対数振幅ゆらぎと位相ゆらぎの自乗平均値を加えたものと同様の傾向を示している。

## 5. む す び

レンズ状媒質が空間的に微小変動している場合のガウス形ビーム波の姿態変換について考察し、つぎの結論をえた。

(1) 固有ガウス波の姿態変換は  $z$  に比例して増加するが、任意のガウス波に対しては周期  $\pi/g$  で振動しながら増加する。

(2) 任意のガウス波に対してはビーム波が収束状態にある時姿態変換の増加する割合が減少している。また相関半径  $a$  が大きい程その傾向は著しくなっている。

(3) 径方向の相関半径  $a$  が大きくなると姿態変換は減少するが、特に  $a \gg s$  の時は高次姿態のうち  $r=1$  姿態にほとんど変換され  $(a/s)^{-2}$  の傾きで減少する。また  $a \ll s$  でビーム内部でのゆらぎが非常に細かい場合はビーム波は各々の高次姿態へ同程度に変換される。

(4) レンズ長が  $z = n\pi/2g$  ( $n=1, 2, \dots$ ) の時は固有ガウス波が姿態変換は最小となっているが相関半径  $a$  が大きい程その傾向が著しくなる。

(5) 伝搬方向の相関距離  $a_3$  に関しては  $a_3 < z$  の時は  $a_3$  に比例して姿態変換は増加している。しかし  $a_3$  が  $z$  に等しくなると姿態変換はほぼ一定値に近づく、

これらの考察はランダムに微小変動しているレンズ状媒質中を伝搬する光ビーム波の性質を知るのに役立つ、姿態変換が問題となるヘテロダイン検波器を設計する際に有用であろう。

**謝辞** 最後にこの論文に対して有益な御討論、御助言をいただいた本学科伊藤助教授、またゆらぎについて懇切丁寧にお教えいただいた日立中研木下康昭氏に深い感謝の意を表わします。

## 文 献

- 1) 末松安晴・他：信学誌，51-B (昭43-4)，p. 133.
- 2) 今井正明・他：信学会マイクロ波研資，昭43-6.
- 3) 末松安晴・他：信学誌，49 (昭41-9)，p. 1645.
- 4) 今井正明・他：工学部研究報告，47，(昭和43-3)，p. 57

- 5) Gloge, D.: Bell Syst. tech. J., 46 (1967-12), p. 2467.
- 6) Miller, S. E. and Tillotson, L. C.: Proc. IEEE, 54 (1966-10), p. 1300.
- 7) 菊池尚一・他: 信学会マイクロ波研資, 昭43-7.
- 8) 末松安晴・他: 信学誌, 48 (昭40-10), p. 1684.
- 9) 今井正明・他: 信学誌, 51-B (昭43-5), p. 185.
- 10) 木下康昭・他: 信学誌, 50 (昭42-11), p. 2146.
- 11) 木下康昭・他: 応用物理, 37 (昭43-5), p. 440.
- 12) Erdélyi, A. et al: Tables of integral transforms II, pp. 288~291, McGraw-Hill, New York.

## 付 録 A

Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  は次の微分方程式を満足する。

$$L[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] = -\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z-z_1) \quad (\text{A } 1)$$

ここで  $\delta$  はデルタ関数を表わしている。

レンズ状媒質内の電磁界の境界条件を考慮して式 (A 1) の  $\delta$  関数を展開する。すなわち  $\delta(z-z_1)$  はフーリエ積分表示して、

$$\delta(z-z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{j\kappa(z-z_1)} \quad (\text{A } 2)$$

また  $\delta(x-x_1)$  はエルミート・ガウシアン関数で展開して、

$$\left. \begin{aligned} \delta(x-x_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1) H_n\left(\frac{x}{w_{01}}\right) e^{-\frac{x^2}{2w_{01}^2}} \\ w_{01} &= 1/\sqrt{k(0)g_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 3)$$

展開係数  $C_n(x_1)$  はエルミート・ガウシアン関数の直交性を利用して求められて、

$$C_n(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w_{01} 2^n n!} H_n\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right) e^{-\frac{x_1^2}{2w_{01}^2}} \quad (\text{A } 4)$$

となる。したがって式 (A 3) は

$$\delta(x-x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w_{01}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_n\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right) e^{-\frac{x^2+x_1^2}{2w_{01}^2}} \quad (\text{A } 5)$$

同様に  $\delta(y-y_1)$  も求めて、

$$\delta(y-y_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w_{02}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} H_m\left(\frac{y_1}{w_{02}}\right) H_m\left(\frac{y}{w_{02}}\right) e^{-\frac{y^2+y_1^2}{2w_{02}^2}} \quad (\text{A } 6)$$

ただし  $w_{02} = 1/\sqrt{k(0)g_2}$

となる。そこで Green 関数も同じ形で展開すると、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) &= -\frac{k\sqrt{g_1 g_2}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{j\kappa(z-z_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm\kappa}(\mathbf{r}_1) \\ &\quad \times H_n\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_m\left(\frac{y}{w_{02}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x}{w_{01}}\right)^2 + \left(\frac{y}{w_{02}}\right)^2\right\}} \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

式 (A 2), 式 (A 5), 式 (A 6) および式 (A 7) を式 (A 1) に代入して展開係数  $C_{nm\kappa}(\mathbf{r}_1)$  を求めると,

$$C_{nm\kappa}(\mathbf{r}_1) = \frac{H_n\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right) H_m\left(\frac{y_1}{w_{02}}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{w_{02}}\right)^2\right\}\right]}{k\left\{\kappa - \left(n + \frac{1}{2}\right)g_1 - \left(m + \frac{1}{2}\right)g_2\right\} 2^{n+m+1} n! m!} \quad (\text{A } 8)$$

したがって Green 関数は

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) &= -\frac{\sqrt{g_1 g_2}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\kappa(z-z_1)}}{\kappa - \left(n + \frac{1}{2}\right)g_1 - \left(m + \frac{1}{2}\right)g_2} \\ &\quad \times \frac{1}{2^{n+m+1} n! m!} H_n\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_m\left(\frac{y}{w_{02}}\right) H_n\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right) H_m\left(\frac{y_1}{w_{02}}\right) \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{x^2+x_1^2}{2w_{01}^2} - \frac{y^2+y_1^2}{2w_{02}^2}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A } 9)$$

式 (A 9) の  $\kappa$  に関する実軸上の積分を物理的に意味があるように複素平面上の積分に変換すると  $\kappa$  に関する積分は留数の定理を用いて次のようになる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{j\kappa(z-z_1)}}{\kappa - \left(n + \frac{1}{2}\right)g_1 - \left(m + \frac{1}{2}\right)g_2} = \begin{cases} 2\pi j \exp\left[j\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)g_1 + \left(m + \frac{1}{2}\right)g_2\right\}(z-z_1)\right] & ; z > z_1 \\ 0 & ; z < z_1 \end{cases} \quad (\text{A } 10)$$

したがって Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \begin{cases} -\frac{j\sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} H_n\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_n\left(\frac{x_1}{w_{01}}\right) H_m\left(\frac{y}{w_{02}}\right) H_m\left(\frac{y_1}{w_{02}}\right) \\ \quad \times \exp\left[j\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)g_1 + \left(m + \frac{1}{2}\right)g_2\right\}(z-z) - \frac{x^2+x_1^2}{2w_{01}^2} - \frac{y^2+y_1^2}{2w_{02}^2}\right]; & z > z_1 \\ 0 & ; z < z_1 \end{cases} \quad (\text{A } 11)$$

ここでエルミート・ガウシアン関数の和の公式

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{2^p p!} H_p(x) H_p(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left\{\frac{2xyz - (x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\} \quad (\text{A } 12)$$

を用いると式 (9) が導かれる。

## 付 録 B

式 (20) より姿態変換係数の統計的自乗平均値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle &= \left(\frac{k}{2}\right)^2 \iint_0^z dz_1 dz_2 \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \iint_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 \\ &\quad \times \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \cdot \delta\varepsilon(\mathbf{r}_2) \rangle \phi_{00}(\mathbf{r}_1) \phi_{00}^*(\mathbf{r}_2) \phi_{nm}^*(\mathbf{r}_1) \phi_{nm}(\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (\text{B } 1)$$

式 (B 1) に式 (13), 式 (14) および式 (21) を代入しエルミートガウシアン関数の積分公式<sup>12)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n^2(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(\alpha x) H_n(\beta x) dx = \sqrt{\pi} 2^n (2n-1)!! (\alpha\beta)^n$$

ただし  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

(B 2)

を用いて  $x_1, x_2$  および  $y_1, y_2$  に関する積分をおこなうと次のようになる。

$$\langle |C_{nm}(z)|^2 \rangle = \langle \delta z^2 \rangle \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{(2n-1)!! (2m-1)!!}{n! m!} a_1 a_2 \delta_1^{2n} \delta_2^{2m}$$

$$\times \int_0^z dz_1 dz_2 \exp\left[-\left(\frac{z_1 - z_2}{a_3}\right)^2\right] F(z_1, z_2)$$
(B 3)

ここで、

$$F(z_1, z_2) = \frac{\left\{ \left( \cos g_1 z_1 - \frac{\sin g_1 z_1}{g_1 l_1} \right) \left( \cos g_1 z_2 - \frac{\sin g_1 z_2}{g_1 l_1} \right) + \left( \frac{\tau \omega_{01}}{s_1} \right)^4 \sin g_1 z_1 \sin g_1 z_2 - j \left( \frac{\tau \omega_{01}}{s_1} \right)^4 \sin g_1 (z_1 - z_2) \right\}^n}{\left[ a_1^2 + \delta_1^2 \left\{ \left( \cos g_1 z_1 - \frac{\sin g_1 z_1}{g_1 l_1} \right)^2 + \left( \cos g_1 z_2 - \frac{\sin g_1 z_2}{g_1 l_1} \right)^2 + \left( \frac{\tau \omega_{01}}{s_1} \right)^4 (\sin^2 g_1 z_1 + \sin^2 g_1 z_2) \right\} \right]^{n+1/2}}$$

$$\times \frac{\left\{ \left( \cos g_2 z_1 - \frac{\sin g_2 z_1}{g_2 l_2} \right) \left( \cos g_2 z_2 - \frac{\sin g_2 z_2}{g_2 l_2} \right) + \left( \frac{\tau \omega_{02}}{s_2} \right)^4 \sin g_2 z_1 \sin g_2 z_2 - j \left( \frac{\tau \omega_{02}}{s_2} \right)^4 \sin g_2 (z_1 - z_2) \right\}^m}{\left[ a_2^2 + \delta_2^2 \left\{ \left( \cos g_2 z_1 - \frac{\sin g_2 z_1}{g_2 l_2} \right)^2 + \left( \cos g_2 z_2 - \frac{\sin g_2 z_2}{g_2 l_2} \right)^2 + \left( \frac{\tau \omega_{02}}{s_2} \right)^4 (\sin^2 g_2 z_1 + \sin^2 g_2 z_2) \right\} \right]^{m+1/2}}$$
(B 4)

ここで式(B 3)の  $z_1, z_2$  に関する積分を  $2z_+ = z_1 + z_2, 2z_- = z_1 - z_2$  と変数変換すると、 $F(z_+, z_-, z_+ - z_-)$  は  $|z_-| \leq a_3$  でゆるやかに変化する周期関数であるのに対して、 $\exp\{-(2z_-/a_3)^2\}$  は  $|z_-| \gg a_3$  では急激に零に近づくので式(B 3)の積分範囲は  $z \gg a_3$  なる範囲の時

$$\int_0^z dz_1 \int_0^z dz_2 \equiv 2 \int_0^z dz_+ \int_{-z/2}^{z/2} dz_- \simeq 2 \int_0^z dz_+ \int_{-\infty}^{\infty} dz_-$$
(B 5)

となる。したがって  $z_-$  に関する積分は  $F(z_+, z_-, z_+ - z_-)$  の虚数部は奇関数なので零になる。また  $F(z_+, z_-, z_+ - z_-)$  を  $z_-$  のまわりに展開すると、

$$F(z_+, z_-, z_+ - z_-) = F(z_+, z_+) + z_- \frac{\partial}{\partial z_-} F(z_+, z_-, z_+ - z_-) \Big|_{z_- = 0} + \dots$$
(B 6)

となり  $F(z_+, z_-, z_+ - z_-)$  は  $z_-$  に関してはゆるやかに変化する周期関数であり、その実数部は偶関数であるため第二項以下は零になる。ゆえに  $z_1, z_2$  に関する積分は

$$I = 2 \int_0^z dz_+ \int_{-z/2}^{z/2} dz_- \exp\{-(2z_-/a_3)^2\} F(z_+, z_-, z_+ - z_-)$$

$$\simeq 2 \int_0^z dz_+ \int_{-\infty}^{\infty} dz_- \exp\{-(2z_-/a_3)^2\} F(z_+, z_+)$$
(B 7)

となり  $z_-$  に関する積分は計算できて式 (B 7) は

$$I \simeq \sqrt{\pi} a_3 \int_0^z dz_+ F(z_+, z_+) \quad (\text{B 8})$$

式 (B 3), 式 (B 8) より式 (22), 式 (23) は求まる。

## 付 録 C

ガウスの積分公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

$$\text{ここで } \begin{cases} x_i: \text{ Legendre 多項式 } P_n(x)=0 \text{ の根} \\ w_i = \frac{2}{(1-x_i)^2 [P'_n(x_i)]^2} \\ n = 16 \end{cases}$$