HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	上昇する一様な流れの中にある対称加熱物体の後流について
Author(s)	福迫，尚一郎；木谷，勝；有江，幹男
Citation	北海道大學工學部研究報告，53，53-68
Issue Date	1969-03-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40944
Type	departmental bulletin paper
File Information	53_53-68.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

上昇する一様な流れの中にある対称加熱物体の後流について

福迫尚一郎*
木谷勝*
有江幹男*

(昭和43年11月30日受理)

The Effects of Buoyancy on the Velocity and Temperature Distributions in a Vertical Wake of a Heated Body

Shoichiro FUKUSAKO
Masaru KIYA
Mikio ARIE

(Received November 30, 1968)

Abstract

The effects of buoyancy on the laminar and turbulent wakes of a heated body placed in a vertically ascending flow of an incompressible fluid are described on the basis of similarity solutions. By applying Prandtl's mixing length hypotheses, a closed solution was obtained for the turbulent wake, while a closed solution for the laminar wake was obtained only when Prandtl number σ was equal to unity.

The buoyancy was found to give a considerable effect on the flow in the wake.

It was found from the present analysis that the width of the laminar wake increases in proportion to $x_1^{1/2}$, x_1 being the longitudinal distance from the heated body for both two-dimensional and axisymmetric cases. In the case of a turbulent wake, on the other hand, the width increases in proportion to x_1 (two-dimensional) and $x_1^{2/3}$ (axisymmetric).

The decrease of temperature excess on the axis of the laminar wake will be proportional to $x_1^{-1/2}$ (two-dimensional) and to x_1^{-1} (axisymmetric), and that of the turbulent wake to x_1^{-1} (two-dimentional) and to $x_1^{-4/3}$ (axisymmetric).

The maximum velocity-defect on the wake axis was found to change in proportion to $x_1^{1/2}$ (two-dimensional) and to x_1^0 (axisymmetric) for the laminar case, and to x_1^0 (two-dimensional) and to $x_1^{-1/3}$ (axisymmetric) for the turbulent case.

* 機械工学科　流体工学第一講座

目 次

1. 緒 論 …… 54
記 号 …… 54
2. 層流後流 …… 55
2.1 基礎方程式 …… 55
2.2 二次元後流 …… 56
2.3 軸対称後流 …… 57
3. 乱流後流 …… 59
3.1 基礎方程式 …… 59
3.2 二次元後流 …… 62
(a) $\overline{Lu_2}=kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min})$ の場合 …… 62
(b) $\overline{Lu_2}=l^2|\partial\bar{U}_1/\partial X_2|$ の場合 …… 63
3.3 軸対称後流 …… 64
(a) $\overline{Lu_2}=kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min})$ の場合 …… 64
(b) $\overline{Lu_2}=l^2|\partial\bar{U}_1/\partial X_2|$ の場合 …… 65
4. 結 論 …… 67
参考文献 …… 68

1. 緒 論

加熱された物体を垂直方向に一様な流れがよぎるとき，物体のうしろには，物体の存在によって速度の欠損された部分すなわち後流が生ずる。物体近傍の流体は一定温度に加熱された物体から熱エネルギーを獲得するため後流内の流体は物体から遠く離れた部分の流体より温度が高くなり，温度差による密度の差を生じて浮力を得ることになる。浮力を考慮しない場合の加熱された物体の後流の解析は G. I. Taylor[1], A. Fage & V. M. Falkner[2] らによって行なわれているが，Taylor の解は温度分布が後流の端で kink を有しているなど物理的に不自然な面がないとはいえない。Grashof 数が Reynolds 数の 2 乗程度となる流れでは慣性力と同程度の浮力が生じ，かかる流れに対しては浮力を考慮した解を求めねばならない。

本論文は浮力を伴った非圧縮性と考えても支障のない定常後流流れを層流および乱流の場合について取扱い相似解の存在を仮定できる領域における解を求めたものである。乱流後流の場合には渦粘性係数を Prandtl[3),4)] の仮定にもとずいて導入するとともに，乱流 Prandtl 数を 1 とおいてあり，解析は二次元および軸対称流の場合について行なってある。

記 号

c: 比例定数
g: 重力の加速度
k: 比例定数
l: Prandtl の混合距離

p, $\bar{p}$: 圧　　力
D: 代 表 長 さ
T, $\bar{T}$: 後流内の温度
T_∞: 近寄り流れの温度
U_1, U_2: 速 度 成 分
U_∞: 近 寄 り 速 度
$\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$: 平均速度成分
$\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_1$: 速 度 欠 損 量
X_1, X_2: 直 交 座 標 (二次元流のとき)
　　円 筒 極 座 標 (軸対称流のとき)
X_{2e}: 後流端の X_2 座標
β: 体積膨張係数
κ: ν/σ
ν: 動 粘 性 係 数
ρ: 密　　度
σ: Prandtl 数
τ: 剪 断 応 力
Λ: 比 例 定 数

2. 層 流 後 流

2.1 基 礎 方 程 式

加熱された物体の層流後流の基礎方程式は，連続の方程式，運動方程式およびエネルギー方程式の三つであって [Schlichting[6]]

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(X_2^j U_1)+\frac{\partial}{\partial X_2}(X_2^j U_2)=0 \tag{2.1}$$

$$U_1\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial X_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_1}+\nu X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j\frac{\partial U_1}{\partial X_2}\right)+g\beta(T-T_\infty) \tag{2.2}$$

$$\sigma\left(U_1\frac{\partial T}{\partial X_1}+U_2\frac{\partial T}{\partial X_2}\right)=\nu X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j\frac{\partial T}{\partial X_2}\right) \tag{2.3}$$

である。(2.2) 式の $g\beta(T-T_\infty)$ は浮力を表わす項である。X_1 は主流方向，X_2 はそれと直角方向の座標であって，U_1 および U_2 はそれぞれ対応する方向の速度成分である。ただし，$j=0$ は二次元流，$j=1$ は軸対称流を表わす。

いま近寄り速度を U_∞ とし，さらに後流内の速度欠損量を $\tilde{U}_1$ とすると，

$$U_1=U_\infty-\tilde{U}_1 \tag{2.4}$$

と書ける。物体から十分離れた位置においては $\tilde{U}_1$, $U_2\ll U_\infty$ であり，またこの領域では圧力が一定なものと考えられるから，(2.4) 式を (2.2) および (2.3) 式に代入し，$\tilde{U}_1$, U_2 の二次の項

を省略すれば

$$U_\infty \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1} = \nu X_2^{\,j} \frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\right) - g\beta (T - T_\infty) \tag{2.5}$$

$$\sigma\left(U_\infty \frac{\partial T}{\partial X_1}\right) = \nu X_2^{\,j} \frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j \frac{\partial T}{\partial X_2}\right) \tag{2.6}$$

が得られる。

いま簡便のためつぎのごとき無次元数を導入する。

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\tilde{U}_1}{U_\infty} \\ x_1 &= \frac{X_1}{D} \\ x_2 &= X_2 \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu D}} \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \frac{D}{U_\infty^2} g\beta T_\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

(2.7) 式を (2.5) および (2.6) 式に代入すると,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_2^{\,j} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^j \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) - \theta \tag{2.8}$$

$$\sigma\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) = x_2^{\,j} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^j \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right) \tag{2.9}$$

となる。速度分布および温度分布は物体中心線上で対称と考えられるから, (2.8) および (2.9) 式に対する境界条件は

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 0 \ :\ & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \\ x_2 = \infty :\ & u_1 = \theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

である。

2.2 二次元層流後流の場合

つぎのごとき相似変数を導入する。ただし, 温度に関する記号は欠損量を正にしていることによる。

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1, \zeta) &= x_1^{\alpha} f(\zeta) \\ \theta(x_1, \zeta) &= -x_1^{n} h(\zeta) \\ \zeta &= x_2 x_1^{m} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

ただし, α, m, n は後に決定さるべき定数である。(2.11) 式を (2.8) および (2.9) 式に代入し, それらの方程式が ζ に関する常微分方程式となるべき条件から,

$$\alpha f(\zeta) + m\zeta \frac{df}{d\zeta} = \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + h(\zeta) \tag{2.12}$$

$$\sigma\left\{ n h(\zeta) + m\zeta \frac{dh}{d\zeta}\right\} = \frac{d^2 h}{d\zeta^2} \tag{2.13}$$

$$2m+1=0, \quad n-\alpha+1=0 \tag{2.14}$$

が得られる。未知数は3個であるから，(2.14) 式からただちに定数 α, m, n を決定することはできない。しかるに，流れと直角な任意断面において流体の有しているエネルギーは一定であるから，(2.13) 式の両辺に $d\zeta$ を乗じ，0から ∞ の間で積分すると，

$$(n-m)\int_0^\infty \sigma\, h(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{2.15}$$

となる。しかるに $h(\zeta)$ は常に正の値を取るから，(2.15) 式が成立するためには，

$$n-m=0 \tag{2.16}$$

でなければならない。したがって

$$\alpha=\frac{1}{2}, \quad m=-\frac{1}{2}, \quad n=-\frac{1}{2} \tag{2.17}$$

であって，(2.11) 式は

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1,\ \zeta) &= x_1^{1/2} f(\zeta) \\ \theta(x_1,\ \zeta) &= -x_1^{-1/2} h(\zeta) \\ \zeta &= x_2\, x_1^{-1/2} \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

となる。したがって u_1, θ を決定すべき方程式は

$$\frac{d^2f}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\zeta\frac{df}{d\zeta}+h(\zeta)=\frac{1}{2}f(\zeta) \tag{2.19}$$

$$\frac{d^2h}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\sigma\left\{\zeta\frac{dh}{d\zeta}+h(\zeta)\right\}=0 \tag{2.20}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\zeta=0 \ : \ \frac{df}{d\zeta}=\frac{dh}{d\zeta}=0 \\ &\zeta=\infty : \ f(\zeta)=h(\zeta)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

である。(2.20) 式は (2.21) 式の条件のもとにただちに積分できて

$$h(\zeta)=\exp\left(-\frac{1}{4}\sigma\zeta^2\right) \tag{2.22}$$

となる。特別な場合として Prandtl 数 $\sigma=1$ なるときは，(2.19) 式も積分できて，

$$f(\zeta)=\exp\left(-\frac{1}{4}\zeta^2\right) \tag{2.23}$$

が得られる。

2.3　軸対称層流後流の場合

(2.11) 式を (2.2) および (2.3) 式に代入すれば相似解が存在すべき条件から基礎方程式は

$$\alpha f(\zeta)+m\zeta\frac{df}{d\zeta}=\frac{1}{\zeta}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{df}{d\zeta}\right)+h(\zeta) \tag{2.24}$$

$$\sigma\left\{n\,h(\zeta)+m\zeta\frac{dh}{d\zeta}\right\}=\frac{1}{\zeta}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta\frac{dh}{d\zeta}\right) \tag{2.25}$$

$$2m+1=0,\quad n-\alpha+1=0 \tag{2.26}$$

となる。二次元層流後流と全く同ようの理由から (2.25) 式の両辺に $2\pi\zeta d\zeta$ を乗じ，ζ に関して0から ∞ まで積分すると

$$(2m-n)\int_0^\infty \sigma\,\zeta\,h(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{2.27}$$

となる。しかるに $h(\zeta)$ は常に正であるから，(2.27) 式が成立するためには

$$2m-n=0 \tag{2.28}$$

でなければならない。したがって，(2.26) および (2.28) 式からただちに

$$\alpha=0,\quad m=-\frac{1}{2},\quad n=-1 \tag{2.29}$$

が得られ，軸対称層流後流の場合 (2.11) 式は

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1,\,\zeta)&=x_1^0 f(\zeta)\\ \theta(x_1,\,\zeta)&=-x_1^{-1}h(\zeta)\\ \zeta&=x_2\,x_1^{-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

となる。したがって，u_1, θ を決定すべき方程式は

$$\frac{d^2f}{d\zeta^2}+\left(\frac{1}{2}\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\frac{df}{d\zeta}+h(\zeta)=0 \tag{2.31}$$

$$\frac{d^2h}{d\zeta^2}+\left(\frac{1}{2}\sigma\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\frac{dh}{d\zeta}+\sigma\,h(\zeta)=0 \tag{2.32}$$

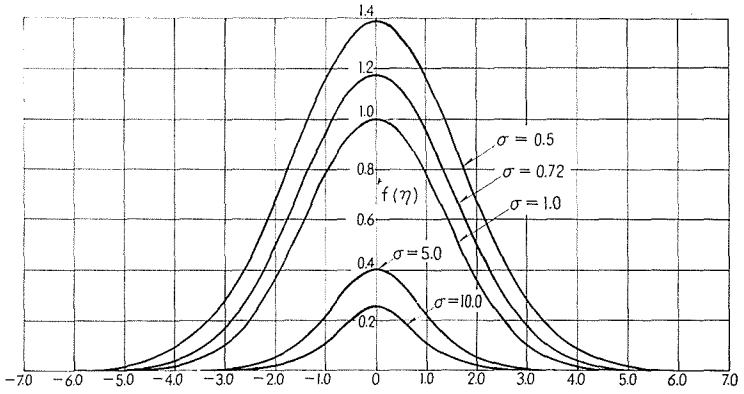
であって，f および h に対する境界条件は

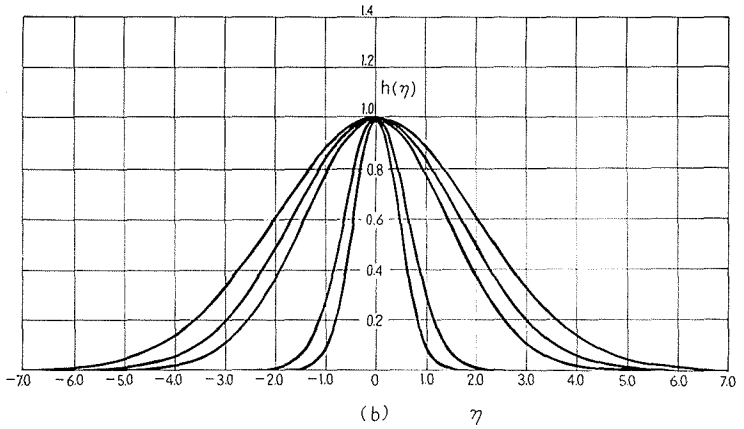
$$\left.\begin{aligned} \zeta=0&:\ \frac{df}{d\zeta}=\frac{dh}{d\zeta}=0\\ \zeta=\infty&:\ f(\zeta)=h(\zeta)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

である。Prandtl 数が1のときは，境界条件 (2.33) を使用することにより (2.31) および (2.32) 式はただちに積分できて

$$f(\zeta)=h(\zeta)=\exp\left(-\frac{1}{4}\zeta^2\right) \tag{2.34}$$

となる。$\sigma\neq1$ のときは closed form の解は得られず，数値積分によって解を求めねばならない。第1図 (a) および (b) には，σ の種々の値に対する速度分布および温度分布が示してある。計算は Runge-Kutta-Gill 法により有効数値4桁の精度で行なった。





第 1 図　軸対称加熱物体の後流 (層流)
(a) 速 度 分 布　(b) 温 度 分 布

3. 乱 流 後 流

3.1 基 礎 方 程 式

加熱された物体の乱流後流の基礎方程式は，連続の方程式，運動方程式およびエネルギー方程式の三つであって

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(X_2^j \bar{U}_1)+\frac{\partial}{\partial X_2}(X_2^j \bar{U}_2)=0 \tag{3.1}$$

$$\bar{U}_1\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_1}+\bar{U}_2\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial X_2}$$
$$+X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j \nu \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_2}+\overline{Lu_2}X_2^j\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_2}\right)+g\beta(\bar{T}-T_\infty) \tag{3.2}$$

$$\bar{U}_1\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_1}+\bar{U}_2\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_2}=X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\kappa X_2^j\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_2}+\overline{Lu_2}X_2^j\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_2}\right) \tag{3.3}$$

である。後流が完全に発達した乱流のときは，運動方程式およびエネルギー方程式において，

それぞれ粘性項および拡散項を無視することができる [Goldstein[5]]。さらに X_1 方向の圧力勾配が存在しないものと仮定すれば，(3.2) および (3.3) 式は

$$\bar{U}_1\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial X_1}+\bar{U}_2\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial X_2}=X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(X_2^j\overline{Lu_2}\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial X_2}\right)+g\beta(\bar{T}-T_\infty) \tag{3.4}$$

$$\bar{U}_1\frac{\partial\bar{T}}{\partial X_1}+\bar{U}_2\frac{\partial\bar{T}}{\partial X_2}=X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\overline{Lu_2}X_2^j\frac{\partial\bar{T}}{\partial X_2}\right) \tag{3.5}$$

となる。ただし，層流後流を取り扱った場合と同様に，$j=0$ は二次元流，$j=1$ は軸対称流を表わす。

$\overline{Lu_2}$ は渦粘性係数であるが，これを表現する関係式としては Prandtl[3),4)] によってつぎの二つの仮定が提案されている。すなわち，

$$\overline{Lu_2}=kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min}) \tag{3.6}$$

$$\overline{Lu_2}=l^2|\partial\bar{U}_1/\partial X_2| \tag{3.7}$$

ただし，k は定数であり，B は後流の幅を表わす尺度，$\bar{U}_{1max}$, $\bar{U}_{1min}$ は後流内の最大速度，最小速度，l は混合距離である。

いま後流内の速度欠損量を $\tilde{U}_1$ として

$$\bar{U}_1=U_\infty-\tilde{U}_1 \tag{3.8}$$

とおく。層流後流の場合と同ように，$\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2\ll U_\infty$ と仮定して，これらの二次の項を無視することとすれば，渦粘性係数の形によってつぎの二つの場合を取り扱うことになる。

(a) $\overline{Lu_2}=kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min})$ の場合

(3.6), (3.8) 式を (3.4) および (3.5) 式に代入すると

$$U_\infty\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial X_1}=X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left\{kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min})X_2^j\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial X_2}\right\}-g\beta(\bar{T}-T_\infty) \tag{3.9}$$

$$U_\infty\frac{\partial\bar{T}}{\partial X_1}=X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left\{kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min})X_2^j\frac{\partial\bar{T}}{\partial X_2}\right\} \tag{3.10}$$

となる。簡便のために，無次元数

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_1&=\frac{\tilde{U}_1}{U_\infty}\\ x_1&=\frac{X_1}{D}\\ x_2&=\frac{X_2}{D\sqrt{A}}\\ \bar{\theta}&=\frac{\bar{T}-T_\infty}{T_\infty}\frac{D}{U_\infty^2}g\beta T_\infty\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

を導入すれば，後流の幅 B および後流内の最大速度と最小速度の差は

$$\left.\begin{aligned}B&\sim Dx_1^{-m}\\ \bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min}&\sim U_\infty x_1^{\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

と書くことができる。ただし，α, m は後に決定されるべき定数である。したがって，A を実験によって決められるべき定数とすれば

$$kB(\bar{U}_{1\max}-\bar{U}_{1\min}) = A\,D\,U_\infty\,x_1^{\alpha-m} \tag{3.13}$$

とおくことができるから，(3.9), (3.10) 式に，それぞれ (3.11) および (3.13) 式を代入すると

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = x_2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2^j x_1^{\alpha-m}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\right\}-\bar{\theta} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1} = x_2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2^j x_1^{\alpha-m}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2}\right\} \tag{3.15}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &x_2=0 \;:\; \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2}=1\\ &x_2=\infty :\; \bar{u}_1=\bar{\theta}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

である。

(b)　$\overline{Lu_2}=l^2\left|\bar{u}\bar{U}_1/\partial X_2\right|$ の場合

後流においては，$\partial U_1/\partial X_2>0\,(X_2>0)$ であるから，$Lu_2=l^2(\partial \bar{U}_1/\partial X_2)$ となる。したがって，(3.7), (3.8) 式を (3.4) および (3.5) 式に代入すると

$$U_\infty\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_1} = -X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left\{X_2^j\,l^2\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_2}\right)^2\right\}-g\beta\,(\bar{T}-T_\infty) \tag{3.17}$$

$$U_\infty\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_1} = -X_2^{-j}\frac{\partial}{\partial X_2}\left\{X_2^j\,l^2\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_2}\frac{\partial \bar{T}}{\partial X_2}\right\} \tag{3.18}$$

となる。(a) の場合と同ように無次元変数

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\bar{U}_1}{U_\infty}\\ x_1 &= \frac{X_1}{D}\\ x_2 &= \frac{X_2}{D\sqrt[3]{c^2}}\\ \bar{\theta} &= \frac{\bar{T}-T_\infty}{T_\infty}\frac{D}{U_\infty^2}\,g\beta\,T_\infty \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

を導入し，さらに Prandtl の混合距離を

$$l = c\,D\,x_1^{-m} \tag{3.20}$$

とおく。ただし，c は実験によって定めらるべき定数である。(3.17), (3.18) 式にそれぞれ (3.19) および (3.20) 式を代入すると

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = -x_2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2^j\,x_1^{-2m}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}-\bar{\theta} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_1} = -x_2^{-j}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2^j\,x_1^{-2m}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2}\right\} \tag{3.22}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 0 &: \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} = 0 \\ x_2 = w &: \quad \bar{u}_1 = \bar{\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

である。w は後流の端の x_2 座標であって，x_1^{-m} に比例する。また m は後に決定さるべき定数である。

3.2 二次元乱流後流

(a) $\overline{Lu_2} = kB(U_{1\max} - U_{1\min})$ の場合

いまつぎのごとき相似変数を導入する。ただし，温度に関する符号は欠損量を正にしていることによる。

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1(x_1, \xi) &= x_1^{\alpha} F(\xi) \\ \bar{\theta}(x_1, \xi) &= -x_1^{n} H(\xi) \\ \xi &= x_2 x_1^{m} \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

ただし，α, m, n は後に決定される定数である。

(3.24) 式を (3.14) および (3.15) 式に代入し，それらの方程式が ξ に関する常微分方程式となる条件から

$$\alpha F(\xi) + m\xi \frac{dF}{d\xi} = \frac{d^2F}{d\xi^2} + H(\xi) \tag{3.25}$$

$$n H(\xi) + m\xi \frac{dH}{d\xi} = \frac{d^2H}{d\xi^2} \tag{3.26}$$

$$\alpha + m + 1 = 0, \quad n - \alpha + 1 = 0 \tag{3.27}$$

を得る。未知数は 3 個であるから，(3.27) 式からただちに定数 α, m, n を決めることはできない。ところが，後流の任意断面において流体の有しているエネルギーは一定であるから，エネルギー方程式からもう一つの条件が得られる。すなわち，(3.26) 式の両辺に $d\xi$ を乗じ ξ に関して 0 から ∞ まで積分すると

$$(n-m)\int_0^{\infty} H(\xi)\, d\xi = 0 \tag{3.28}$$

となる。しかるに，$H(\xi)$ は常に正の値を取るから，(3.28) 式が成立するためには

$$n - m = 0 \tag{3.29}$$

でなければならない。したがってただちに (3.27) 式から

$$\alpha = 0, \quad m = n = -1 \tag{3.30}$$

であるから，(3.24) 式は

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1(x_1, \xi) &= x_1^{0} F(\xi) \\ \bar{\theta}(x_1, \xi) &= -x_1^{-1} H(\xi) \\ \xi &= x_2 x_1^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

となり，さらに (3.25) および (3.26) 式は

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\xi\frac{dF}{d\xi}+H(\xi)=0 \tag{3.32}$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}+\xi\frac{dH}{d\xi}+H\xi)=0 \tag{3.33}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\xi=0\ :\ \frac{dF}{d\xi}=\frac{dH}{d\xi}=0\\&\xi=\infty:\ F(\xi)=H(\xi)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

である。したがって，(3.32), (3.33) 式は境界条件 (3.34) の下にただちに積分できて

$$F(\xi)=H(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \tag{3.35}$$

が得られる。

(b)　$\overline{Lu_2}=l^2\,|\partial U_1/\partial X_2|$ の場合

つぎのごとき相似変数を導入する。

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_1(x_1,\ \eta)&=x_1^{\alpha}F(\eta)\\\bar{\theta}(x_1,\ \eta)&=-x_1^{n}H(\eta)\\\eta\ &=x_2\,x_1^{m}\end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

(3.36) 式を (3.21) および (3.22) 式に代入し，それらが η に関する常微分方程式であることから

$$\alpha\,F(\eta)+m\,\eta\frac{dF}{d\eta}=-2\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\eta^2}+H(\eta) \tag{3.37}$$

$$n\,H(\eta)+m\,\eta\frac{dH}{d\eta}=-\left(\frac{d^2F}{d\eta^2}\frac{dH}{d\eta}+\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2H}{d\eta^2}\right) \tag{3.38}$$

$$\alpha+m+1=0,\quad n-\alpha+1=0 \tag{3.39}$$

前述したと同ようの理由から，(3.28) 式の両辺に $d\eta$ を乗じ，η に関して 0 から 1 まで積分すると，満足すべきエネルギー方程式の積分式は

$$(n-m)\int_0^1 H(\eta)\,d\eta=0 \tag{3.40}$$

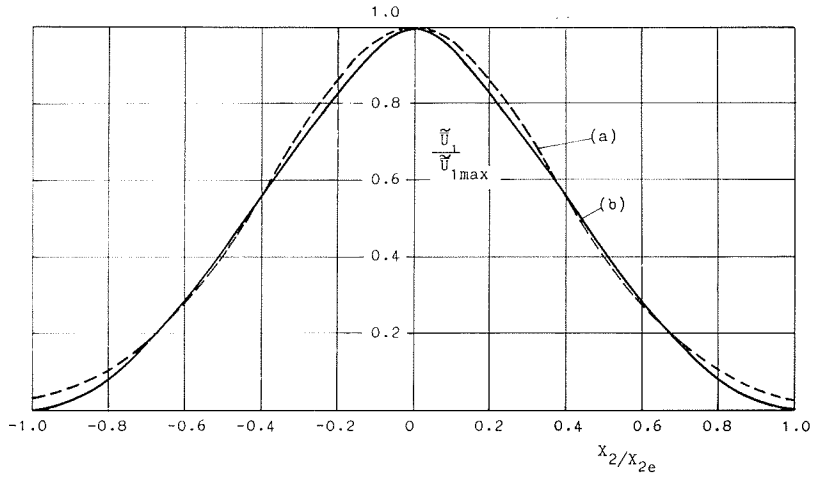
となる。$H(\eta)$ は常に正であるから，(3.40) 式が成立するために

$$n-m=0 \tag{3.41}$$

でなければならない。よって (3.39) 式からただちに

$$\alpha=0,\quad m=n=-1 \tag{3.42}$$

が得られる。したがって，(3.36) 式は



第 2 図 二次元後流中の速度および温度分布 (乱流)
(a) (3.35) 式, (b) (3.47) 式

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1(x_1, \eta) &= x_1^0 F(\eta) \\ \bar{\theta}(x_1, \eta) &= -x_1^{-1} H(\eta) \\ \eta &= x_2 x_1^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

となり, さらに (3.37) および (3.38) 式は

$$2\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\eta^2} - \eta\frac{dF}{d\eta} = H(\eta) \tag{3.44}$$

$$\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2H}{d\eta^2} + \frac{d^2F}{d\eta^2}\frac{dH}{d\eta} = H(\eta) + \eta\frac{dH}{d\eta} \tag{3.45}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0: \quad \frac{dF}{d\eta} = \frac{dH}{d\eta} = 0 \\ &\eta = 1: \quad F(\eta) = H(\eta) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

である。(3.44) および (3.45) 式はただちに積分できて

$$F(\eta) = H(\eta) = \frac{1}{9}(1-\eta^{3/2})^2 \tag{3.47}$$

となる。

したがって後流の幅の拡がり, 軸中心上の速度変化および温度変化は, Prandtl の渦粘性係数に関するいずれの仮定を採用しても全く同一となることがわかる。さらに, 第 2 図に示すように後流内の速度分布および温度分布も二つの仮定のうちいずれを採用してもほとんど同一の形状となる。

3.3 軸対称乱流後流

(a) $\overline{Lu_2} = kB(\bar{U}_{1max} - \bar{U}_{1min})$ の場合

(3.24) 式と同ようの相似変数を導入して，(3.14) および (3.15) 式に代入し，それらが ξ に関する常微分方程式となるべき条件から

$$\alpha F(\xi)+m\xi\frac{dF}{d\xi}=\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dF}{d\xi}\right)+H(\xi) \tag{3.48}$$

$$nH(\xi)+m\xi\frac{dH}{d\xi}=\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dH}{d\xi}\right) \tag{3.49}$$

$$\alpha+m+1=0,\quad n-\alpha+1=0 \tag{3.50}$$

を得る。さらに後流の任意断面において流体の有するエネルギーは一定であることを考慮し，(3.49) 式の両辺に $2\pi\xi d\xi$ を乗じ，ξ に関して 0 から ∞ まで積分すれば

$$(2m-n)\int_0^\infty \xi H(\xi)\,d\xi=0 \tag{3.51}$$

が得られる。しかるに，$H(\xi)$ は常に正であるから，(3.51) 式が成立するためには

$$2m-n=0 \tag{3.52}$$

でなければならない。(3.50) 式から

$$\alpha=-\frac{1}{3},\quad m=-\frac{2}{3},\quad n=-\frac{4}{3} \tag{3.53}$$

を得るから，相似解は

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_1(x_1,\ \xi)&=x_1^{-1/3}F(\xi)\\ \bar{\theta}(x_1,\ \xi)&=-x_1^{-4/3}H(\xi)\\ \xi&=x_2\,x_1^{-2/3}\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

となる。したがって，(3.48) および (3.49) 式は

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\left(\frac{2}{3}\xi+\frac{1}{\xi}\right)\frac{dF}{d\xi}+\frac{1}{3}F(\xi)+H(\xi)=0 \tag{3.55}$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}+\left(\frac{2}{3}\xi+\frac{1}{\xi}\right)\frac{dH}{d\xi}+\frac{4}{3}H(\xi)=0 \tag{3.56}$$

となり，$F(\xi)$, $H(\xi)$ に関する境界条件は

$$\left.\begin{aligned}\xi=0\ :&\quad \frac{dF}{d\xi}=\frac{dH}{d\xi}=0\\ \xi=\infty:&\quad F(\xi)=H(\xi)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

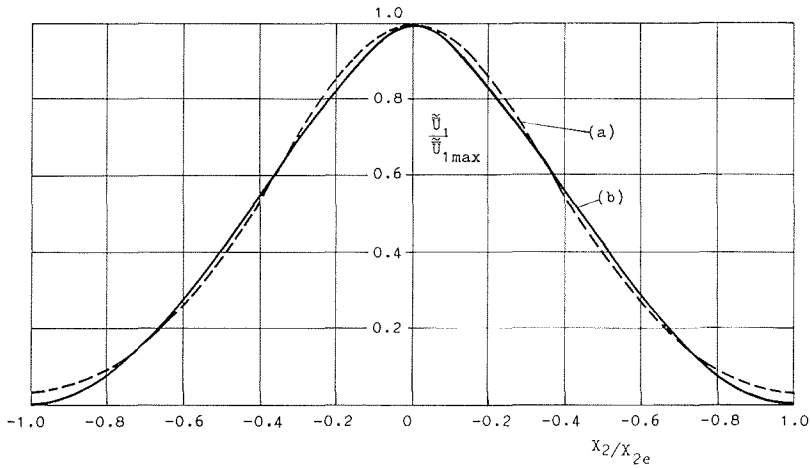
である。境界条件 (3.57) のもとに，(3.55) および (3.56) 式はただちに積分できて

$$F(\xi)=H(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{3}\xi^2\right) \tag{3.58}$$

として解が求められる。

(b)　$\overline{Lu_2}=l^2\,|\partial U_1/\partial X_2|$ の場合

(3.36) 式と同一の相似変数を導入し，前節と同ようの操作を行なえば



第 3 図 軸対称後流中の速度および温度分布 (乱流)
(a) (3.58) 式, (b) (3.69) 式

$$\alpha F(\eta)+m\eta\frac{dF}{d\eta}=-\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\eta\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2\right\}+H(\eta) \tag{3.59}$$

$$nH(\eta)+m\eta\frac{dH}{d\eta}=-\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\eta\frac{dF}{d\eta}\frac{dH}{d\eta}\right\} \tag{3.60}$$

$$\alpha+m+1=0, \quad n-\alpha+1=0 \tag{3.61}$$

を得る。エネルギー方程式の積分式は

$$(2m-n)\int_0^1\eta H(\eta)\,d\eta=0 \tag{3.62}$$

となるから, $H(\eta)>0$ であることを考慮すれば

$$2m-n=0 \tag{3.63}$$

でなければならない。よって (3.61) および (3.63) 式から

$$\alpha=-\frac{1}{3}, \quad m=-\frac{2}{3}, \quad n=-\frac{4}{3} \tag{3.64}$$

となり, 相似解は

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_1(x_1,\eta)&=x_1^{1/3}F(\eta)\\ \bar{\theta}(x_1,\eta)&=-x_1^{-4/3}H(\eta)\\ \eta&=x_2\,x_1^{-2/3}\end{aligned}\right\} \tag{3.65}$$

なる形をとる。したがって, (3.59) および (3.60) 式は

$$2\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2=\frac{2}{3}\eta\frac{dF}{d\eta}+\frac{1}{3}F(\eta)+H(\eta) \tag{3.66}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\eta\frac{dF}{d\eta}\frac{dH}{d\eta}\right\}=\frac{2}{3}\eta\frac{dH}{d\eta}+\frac{4}{3}H(\eta) \tag{3.67}$$

となる。さらに，境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0: \quad \frac{dF}{d\eta} = \frac{dH}{d\eta} = 0 \\ &\eta = 1: \quad F(\eta) = H(\eta) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

である。境界条件 (3.68) 式を満足する (3.66) および (3.67) 式の解は

$$F(\eta) = H(\eta) = \frac{2}{27}(1-\eta^{3/2})^2 \tag{3.69}$$

である。よって，二次元乱流後流の場合と同様に Prandtl の二つの仮定にもとずいて求められる後流の幅の変化，軸心上の速度および温度の変化は全く同一となる。さらに，(3.58) および (3.69) 式によって与えられる速度および温度分布はほとんど同一の形状となることは第3図に見る通りである。

4. 結　　論

上昇する一様流れの中におかれた対称加熱物体の後流に関して，浮力を考慮した解析を行ない次の結果を得た。

(1) 温度分布，速度分布

後流が層流の場合，Prandtl 数が1のときのみ温度分布，速度分布は一致し，二次元後流および軸対称後流いずれも $\exp\{-(1/4)\zeta^2\}$ である。乱流の場合は，二つの分布は常に一致し，渦粘性係数に関する仮定によって，それぞれ二次元後流のとき，$\exp\{-(1/2)\xi^2\}$, $(1/9)(1-\eta^{3/2})^2$, 軸対称後流のとき，$\exp\{-(1/3)\xi^2\}$, $(2/27)(1-\eta^{3/2})^2$ なる形を取る。

(2) 後流の幅

層流の場合，二次元および軸対称後流いずれも $x_1^{1/2}$ に比例して拡がり，浮力を伴わない一般の後流の場合の結果と一致している。乱流後流の場合は，二次元のとき x_1，軸対称のとき $x_1^{2/3}$ にそれぞれ比例して拡がる。

一方，一般の浮力を伴わない後流の場合の結果は，二次元のとき $x_1^{1/2}$，軸対称のとき $x_1^{1/3}$ にそれぞれ比例して拡がる。

(3) 軸心上の温度

層流後流では，二次元のとき $x_1^{-1/2}$，軸対称のとき x_1^{-1}，乱流後流では，二次元のとき x_1^{-1} 軸対称のとき $x_1^{-4/3}$ に比例して減少する。

(4) 軸心上の速度欠損量

層流後流では，二次元流のとき $x_1^{1/2}$，軸対称流のとき x_1^0，乱流後流では，二次元流のとき x_1^0，軸対称流のとき $x_1^{-1/3}$ に比例して変化する。

なお，浮力を伴わない一般の後流の場合の結果は，層流後流では，二次元流のとき $x_1^{-1/2}$，軸対称流のとき x_1^{-1}，乱流後流では，二次元流のとき $x_1^{-1/2}$，軸対称後流のとき $x_1^{-2/3}$ である。

参 考 文 献

1) Taylor, G. I.: Proc. Roy. Soc. A, 135 (1932), 685.
2) Fage, A. and Falkner, V. M.: Proc. Roy. Soc. A, 135 (1932), 695.
3) Prandtl, L.: Z. A. M. M, 22 (1942), 241.
4) Prandtl, L.: Z. A. M. M, 5 (1925), 136.
5) Goldstein, S.: Modern Development in Fluid Dynamics, Vol. 2., Dover Publications, Inc. (1965), 647.
6) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, 4ed., McGraw-Hill Book Co., Inc. (1960), 301.