HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	台湾省蘭陽渓における月流量時系列の解析
Author(s)	張, 玉田; 平山, 健一; 岸, 力
Citation	北海道大學工學部研究報告, 53, 1-34
Issue Date	1969-03-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40946
Type	departmental bulletin paper
File Information	53_1-34.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

台湾省蘭陽溪における月流量時系列の解析

張　玉田*
平山健一**
岸　力**

(昭和43年12月2日受理)

Statistical Analysis of the Monthly Runoff for the Ran Young River, Formosa

CHANG Yu Tien
Ken-ichi HIRAYAMA
Tsutomu KISHI

(Received December 2, 1968)

Abstract

The sequence of the monthly runoff for the Ran Young River, Formosa observed from 1950 to 1966 was analyzed by the theory of stationary time series.

The mathematical structures of the sequence and the possibility of the statistical prediction are discussed.

The sequence was first separated into the periodic deterministic component and the stochastic component. Then, four mathematical models were applied for the stochastic component to compare the efficiency of analysis, i.e., (1) a purely random process, (2) the lst order Markov process, (3) the 2nd order Markov process and (4) the moving average scheme (which is equal to the 6th order Markov process in the present example).

The following facts were found from the results of calculation:

a) For the periodic component, 12, 6 and 4 month periods were detected at 95% level of confidence by means of the auto-correlation analysis.

b) Mathematically speaking, the correlogram of the stochastic component did not indicate pure randomness, but showed a weak persistency of the process.

c) The efficiencies of analysis were 11% for the 1st order Markov process, 12% for the 2nd order Markov process and 13% for the moving average scheme, respectively.

目　次

1. 緒　言 …… 4
2. 蘭陽溪の水文気象学的特性 …… 5
2.1 流　域 …… 5

* 中華民国省立成功大学工学院
** 土木工学科　河川工学研究室

2. 2 雨　　量 …… 5
2. 3 流　　量 …… 6
2. 4 年平均流量とその長期変動 (Trend) の検討 …… 8
3. コレログラムによる周期成分の分離 …… 11
3. 1 自己相関関数 (Auto-correlation Function) とコレログラム …… 11
3. 2 周期関数の自己相関関数 …… 11
3. 3 ランダム変動と規則的な変動との合成波の自己相関関数 …… 12
3. 4 相関係数の有意性の検討 …… 13
3. 5 蘭陽渓における月流量コレログラムと周期成分の分離 …… 13
3. 6 周期成分の分離によるコレログラムの変化 …… 15
4. 定常時系列理論と確率変動過程の解析… …… 17
4. 1 定常時系列理論の概要 …… 17
4. 2 自己回帰過程の解析理論 …… 19
4. 3 移動平均過程の解析理論 …… 21
5. 蘭陽渓における月流量時系列の
確率変動成分 (Stochastic component) の解析 …… 22
5. 1 確率変動成分の近似解 …… 22
5. 2 時系列の定常化と確率変動成分の解析 …… 26
5. 3 自己回帰過程としての確率変動成分の解析 …… 28
5. 4 移動平均過程としての確率変動成分の解析 …… 32

記 号 表

A_k: フーリエ解析の際の k 番目の高調波の係数 (Fourier coefficient of the k th harmonic)

a_j: 重み係数

a: 回帰線の定数項

a_i: 自己回帰過程の係数 (autoregressive coefficient)

$\hat{a}$: a の最確値

α: 信頼水準 (Confidence level)

B_k: フーリエ解析の際の k 番目の高調波の係数 (Fourier coefficient of the k th harmonic)

b: 回帰線の傾き

b_i: 移動平均型の係数 (coefficient of moving average scheme)

$\hat{b}$: b の最確値

c: クラス番号

$C_K(k)$: K 年移動平均をした場合の k 年周期成分の振幅変化率

$E\{\cdot\}$: 期待値 (Mathematical Expectation)

$E\{X_c(t)\}$: $X(t)$ の予測値の期待値，添字 c は条件付確率を示す

ε_t: 確率変動成分 (Stochastic component)

ε: 確率変動値

K^2: $X(t)$ の分散と $\eta(t)$ の分散の比

$1-K^2$: 解析効果 (Efficiency of analysis)

k: running index

m: $\bar{X}$ の期待値

$L_N(\rho)$: 系列の長さの効果を示す係数

$m(t)$: 平 均 値

ξ: 誤差分布における積分の上限値

N, n: 資料の個数

n_α: 信頼水準 α により定まる係数

P_t: 周期成分 (Periodic component)

ρ_k: k 次の母系列相関係数

Q_t: 任意時刻 t における河川流量

R_m: 流域平均雨量

$R(\tau)$: 自己相関関数

r_k: k 次の系列相関係数 (標本値)

$\bar{r}_k$: k 次の相関係数の信頼限界

S_t: 各月の流量の平均値に対する標本標準偏差

S^2: 系列分散 (Serial variance)

σ^2: 母系列の分散

$\sigma^2_{\bar{X}}$: 系列平均 $\bar{X}$ の分散

T_t: 傾向成分 (Trend component)

t_i: 時　　刻

X_t: Trend 成分を除いた系列

$X(t)$: 定常な確率過程

$\bar{X}$: $X(t)$ の平均値

x_i: X_t の実現値

$x(t)$: $X(t)$ の実現値，定常な時系列標本

$x_1(t)$: ランダムに変動する成分

$x_2(t)$: 規則的に変動する成分

$Y(t)$: 規準化された確率過程

y_t: $\eta(t)$ の実現値

$\eta(t)$: 純偶発成分 (purely random component)

1. 緒　　言

河川の流況をあらわすため，発電水力では流量継続曲線 (Discharge-Duration Curve) が用いられる。これは流量の大きさだけに着目し，発生の時間的な順序は考慮しない表示方法である。この表示方法は，貯水池あるいは調整池をもたない水路式発電所に対しては，発電所の規模と発生電力量の関係をしらべるのに非常に便利である。しかし，河川の水を農業用水，工業用水などに利用する場合には，単に大きさだけに着目して年間の発生日数をしらべることは不充分である。例えば農業用水においては，作物の種類によって水不足が表面化する日数が違うけれども，1日あるいは2日という短期間の渇水が作物の生育に重大な影響を及ぼすことは少ないであろう。もう少し長い期間にわたる平均的な流量が重要であろう。従って，若しある河川の低流量が適当な間隔をおいて，間歇的に発生するのであれば，その河川の利用可能流量は，農業用水としては大きいことになる。これと対照的に，若しその河川を工業用水源として利用しようとすれば，間歇的に発生する低流量が利用可能限度を制限してしまうことになる。この場合も，若し同一程度の低流量がある時期に集中して継続的に発生するのであれば，工業用水としてはさらに利用度が高いと考えられる。継続的な低水期を工業設備の保守，修理の期間に当てることが可能であるからである。

上述の例のように河川の水を資源として高度に利用しようとすれば，単に流量の大きさばかりでなく，流量の時間的変化すなわちハイドログラフ (Hydrograph) そのものが必要になってくる。特に河川に貯水池を設けて，洪水防止と利水目的を同時に達成しようとする多目的ダムにおいては，計画のために過去の統計的な水資料が必要なばかりでなく，ダムの効率的な運営のために，将来あらわれるであろうハイドログラフの予測が必要である。

河川流量の予測も目的によって性質が異なっている。洪水防止のための出水予測であれば比較的短期の予測であり，降雨の推定も不可能ではないから，降雨と流出量との関係を用いることが可能である。このような短期の予測ばかりでなく，月を単位とするような中期予測も重要である。前述の農業，工業などの利水目的や，大規模な多目的貯水池の運営などにおいてはむしろ，中期予測の必要性が大きい。

しかし，中期予測では降雨の予測が現在では不可能であるから，降雨と流出量の関係を用いることはできない。そこで，本文では物理的な立場をはなれて，全く統計的に河川流量の中期予測の可能性を考察してみた。河川流域は，降雨を平滑化する一種のフィルターの機能をもつと考えられる。若し河川流量の中に占める過去からの持越し分 (carry-over) が小さくなければ統計的な予測の可能性がでてくるのである。

本文では，蘭陽渓における月流量を例にとり，河川流量の時系列解析を行なった結果を述べている。

2. 蘭陽渓の水文気象学的特性

2.1 流　域

蘭陽渓は中華民国台湾省の次高山脈に源を発し，東北に向って流れ蘭陽平野に入り太平洋にそそぐ本省主要河川の1つである。流域形状は図2-1にみられるように羽状で，流域面積は820.69 km² である。

図2—1　蘭陽渓（ランヤンヒー）流域平面図

2.2 雨　量

蘭陽渓流域内の雨量資料は，図2-1に示した P_{20}, P_{12}, P_5, P_2 の4地点において1960年から1966年の7年間の観測資料がある。この4観測点を用いて流域を Thiessen 分割し，図2-1に示したように①～④までの4区域に分けた。それぞれの面積は280.3 km², 264.9 km², 147.5 km², 126.0 km² である。流域平均雨量を (2-1) によって算出した。

$$R_m = 0.342\,R_{20} + 0.323\,R_{12} + 0.180\,R_5 + 0.154\,R_2 \qquad (2\text{-}1)$$

ただし

R_m: 流域平均雨量

R_{20}, R_{12} …: 各々観測点 P_{20}, P_{12} … の雨量

各観測地点の平均年雨量を表2-1に示したが，(2-1) によって計算した流域平均年雨量は2515.9 mm である。

1960年から1966年迄雨量観測地点 P_{20}, P_{12}, P_5, P_2 の平均月雨量を表2-2に示した。

表2—1　年　雨　量

No.	地　名	平均年雨量 (mm)	資料期間
P_{20}	宜蘭県員山郷尚徳村	2293	1960～1965
P_{12}	宜蘭県大同郷楽水村	2928	1960～1966
P_5	宜蘭県大同郷土場村	2493	1960～1966
P_2	宜蘭県大同郷南山村	2212	1960～1966

表 2—2 平 均 月 雨 量 (mm)

月 / No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_{20}	139.73	113.20	89.23	89.62	196.05	204.57	122.05	301.67	343.73	250.12	282.30	101.75
P_{12}	81.47	66.44	94.84	85.84	204.31	311.30	409.95	443.55	647.71	393.39	196.81	104.54
P_5	69.2	68.94	85.77	66.93	201.01	381.63	258.53	422.44	582.90	252.12	117.21	80.21
P_2	88.37	91.48	108.2	61.02	174.97	204.51	209.87	266.24	499.11	244.20	152.60	115.58

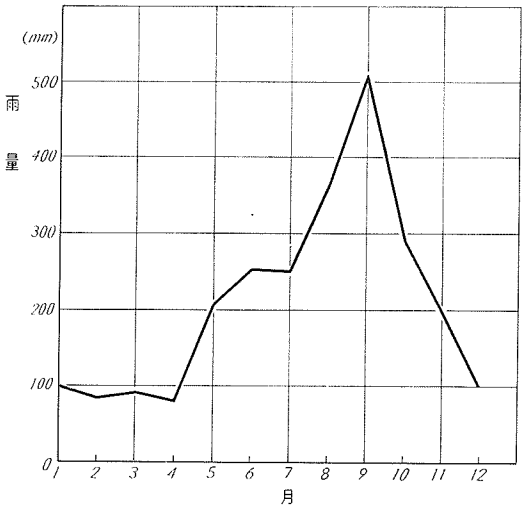

図 2—2 蘭陽渓平均月雨量

表 2-2 の資料を使って (2-1) によって流域平均月雨量を求めて図 2-2 に示した。

2.3 流 量

流量は蘭陽大橋の記録が 1950 年から 1966 年迄 17 カ年あるが，雨量に対応させるために 1960 年から 1966 年迄の記録を取り出し，表 2-3 に示した。これから 7 年間の平均月流量を求め図 2-3 に示した。8～11 月の間が豊水期で 9 月

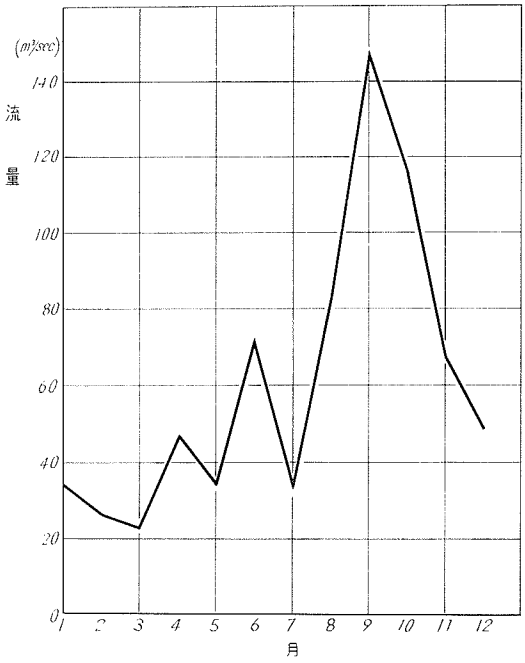

図 2—3 蘭陽渓平均月流量 (1960～1966)

表 2—3 月 平 均 流 量 (m^3/sec)

月 / 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1960	47.62	45.87	18.24	25.84	58.78	127.94	30.09	240.94	143.52	130.70	54.54	30.87
1961	22.57	16.93	29.74	19.97	85.92	45.51	18.21	51.98	201.98	115.56	85.87	41.89
1962	52.53	24.01	28.24	29.45	18.07	50.96	19.21	142.08	250.46	209.81	59.08	39.35
1963	11.31	8.26	7.37	64.24	4.32	14.47	58.81	15.23	207.75	73.02	40.24	97.6
1964	43.5	41.8	28.3	155.5	13.1	43.5	12.00	33.50	28.40	211.00	126.00	57.70
1965	42.65	26.78	29.13	15.93	25.29	77.9	60.69	85.03	38.92	41.65	74.19	35.99
1966	24.33	18.76	18.83	18.81	21.88	146.34	23.82	11.35	171.45	33.69	29.83	33.84
平 均	34.93	26.02	22.84	47.11	34.48	72.37	33.12	82.87	148.93	116.49	67.11	48.18

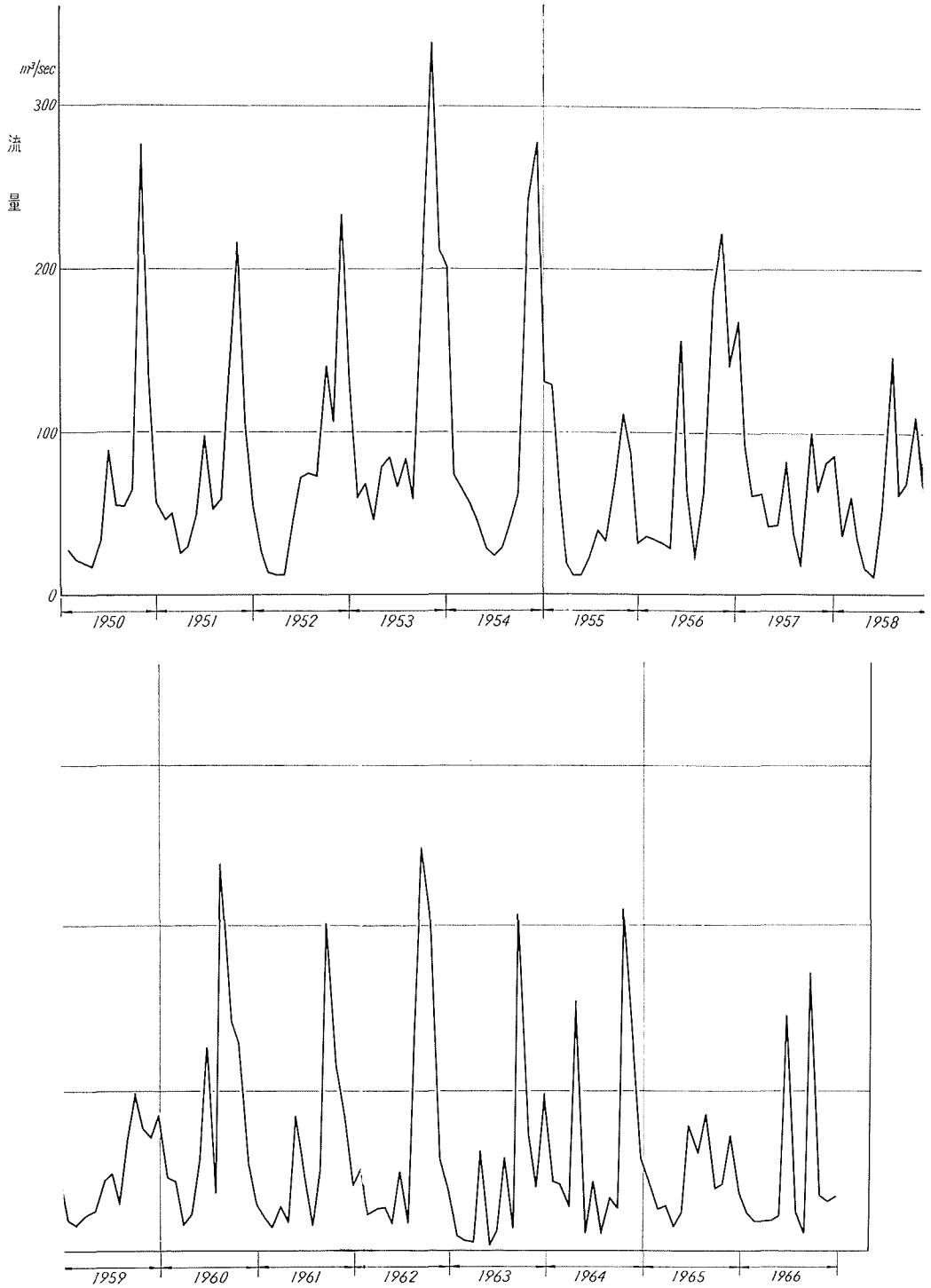

図2—4 蘭陽渓月流量変化図

が最も大きく，1～5月が低水期である。また，1950年から1966年の17年間の流量の月変化は図2-4に示されている。

7年間の平均月雨量と平均月流量はともに図2-2，図2-3にみられるように9月が最大であるが，17年間の平均月流量変化は図2-5に示されているように10月に最大流量を記録している。観測期間（1950～1966年）の前期と後期で月流量の分布に幾分の変化があった事を想像させる。

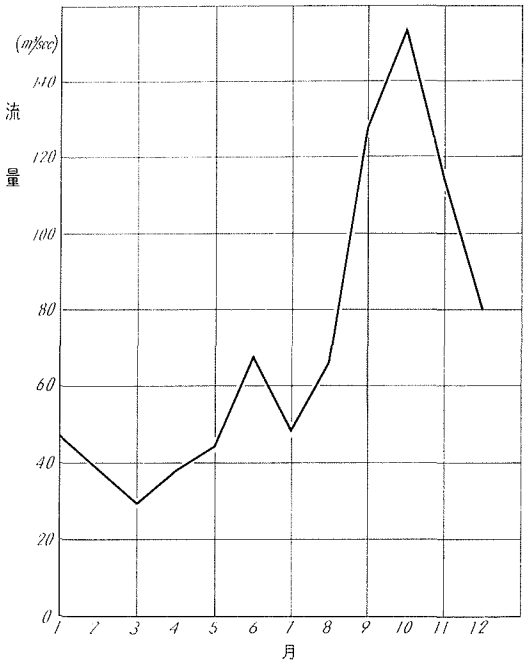

図2—5　蘭陽渓平均月流量（1950～1966）

蘭陽渓の流量の年変化の特長は，日本の河川にくらべて雨期と乾期が比較的明瞭に分かれていることである。日本の河川では梅雨期と台風期，あるいは融雪期と台風期のように2回の豊水期があり，したがって，それぞれの中間に2回の低水期をもつ例が多いのであるが，蘭陽渓では2月から7月の間の流量が余り大きくなく，年間に豊水期，低水期がそれぞれ1度ずつ存在している。

2.4　年平均流量とその長期変動（Trend）の検討

確率系列のもつ平均，分散などの特性量が時点 t に対して一定でない場合，長期傾向（Trend）をもつといい，定常化が必要となる。単に長期傾向といえば平均値の長期傾向を指し，ここでも年平均流量を対象にする。図2-6は蘭陽渓の年平均流量を示したものであるが，年々の値はかなり大きく変動しており，正しい判断のさまたげとなっている。細かい不規則変動を除去して平滑化し，長期変動だけをとり出すために加重移動平均が用いられる。

いま時系列標本を x_1, x_2, $x_3 \cdots x_i \cdots x_n$ とするときに一般に $(2S+1)$ 年間の加重移動平均は (2-2) で与えられる。

$$y_i = \sum_{j=-S}^{S} a_j x_{i+j} \qquad i = S+1,\ S+2,\ \cdots n-S \tag{2-2}$$

特に重み係数 $a_j = 1/(2S+1)$ のとき y_i の系列は算術移動平均である。

周期 k_0, k_1, $\cdots k_s$ 年なる周期成分（正弦波）の振幅をそれぞれ C_0, C_1, C_2, $\cdots C_s$ 倍するためには，(2-3) の如く対称な係数をもつ $(2S+1)$ 年移動平均法による。

$$y_i = a_0 x_i + \sum_{j=1}^{S} a_j \left\{ x_{i-j} + x_{i+j} \right\} \tag{2-3}$$

従って K 年周期成分を消去するための最も簡単な移動平均は

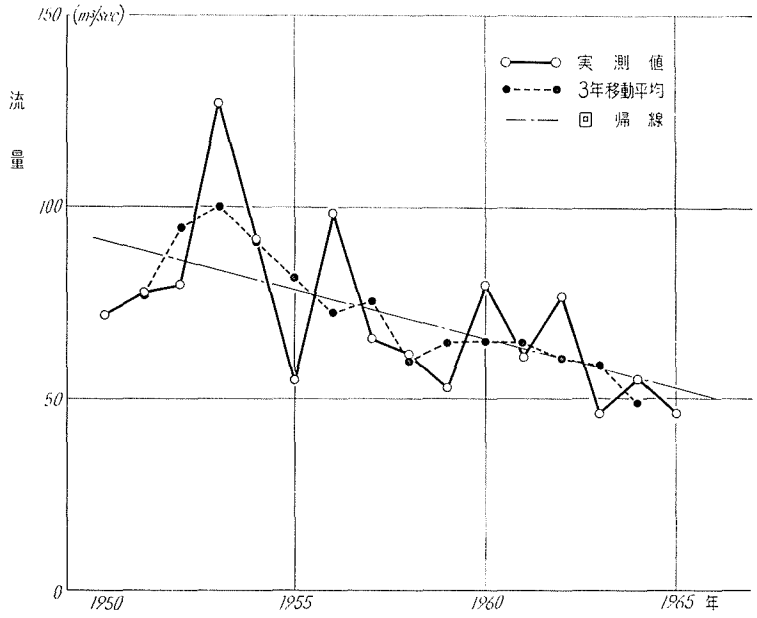

図 2—6　蘭陽渓年平均流量の変化

$$y_{K,i} = a_1 x_{i-1} + a_0 x_i + a_1 x_{i+1} \tag{2-4}$$

$$a_1 = \frac{1}{2\{1-\cos(2\pi/K)\}} \qquad a_0 = \frac{-\cos(2\pi/K)}{1-\cos(2\pi/K)}$$

で与えられる。種々の K に対する重み係数 a_1, a_0 を表 2-4 に示した。

表 2—4

K	2	3	4	5	6
a_1	1/4	1/3	1/2	0.724	1
a_0	1/2	1/3	0	−0.448	−1

また (2-4) の移動平均によって K 年周期成分が消去されると同時に，その他の周期成分も影響をうけ，一般に k 年間周期成分の振幅は (2-4) の移動平均の結果 (2-5) に示すような倍率で変化することになる。

$$C_K(k) = \frac{\cos(2\pi/k)-\cos(2\pi/K)}{1-\cos(2\pi/K)} \tag{2-5}$$

(2-5) の振幅変化率 $C_K(k)$ の値を計算した結果を表 2-5，図 2-7，図 2-8 に示した。

表 2-4 の $K=3$ の場合の重み係数を用いて計算した結果を図 2-6 の破線で示した。破線によれば原系列はかなり平滑化され，やや右下りの長期傾向が示されている。

次に統計的に長期傾向の有無を判定するためには回帰係数が用いられる。X_t が各 t について一定の分散 σ^2 をもって平均値

$$m(t) = a+bt$$

の周りに互に独立に正規分布しているときは a, b の最確値 $\hat{a}$, $\hat{b}$ は

表 2—5

k	$C_2(k)$	$C_3(k)$	$C_4(k)$	$C_5(k)$	$C_6(k)$
2	0	−0.333	−1.000	−1.894	−3.000
3	0.250	0	−0.500	−1.171	−2.000
4	0.500	0.333	0	−0.447	−1.000
5	0.655	0.539	0.309	0	−0.382
6	0.750	0.667	0.500	0.276	0
8	0.854	0.805	0.707	0.576	0.414
10	0.905	0.873	0.809	0.724	0.618
15	0.957	0.942	0.914	0.875	0.827
20	0.976	0.967	0.951	0.929	0.902

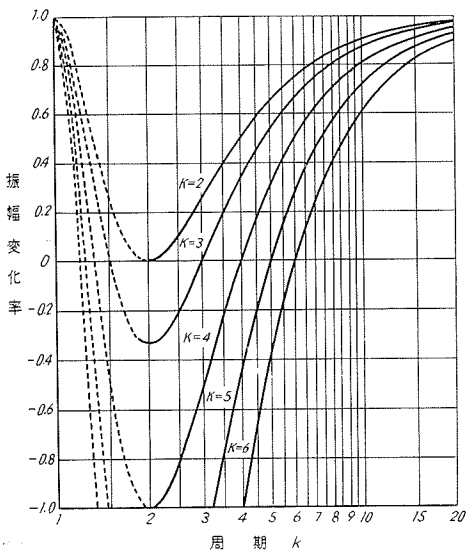

図 2—7　3年移動平均による周期成分の振幅変化率 $C_K(k)$

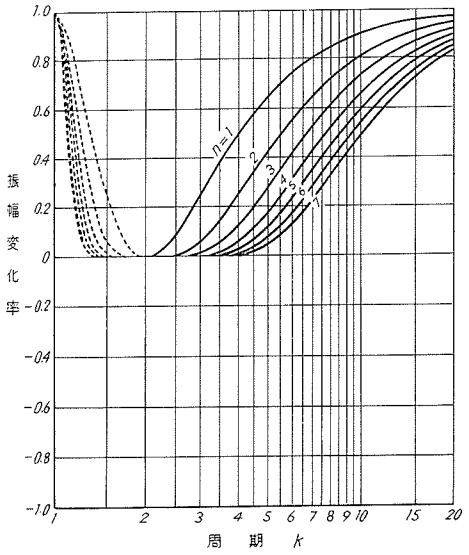

図 2—8　$K=2$ の3年移動平均をくりかえして行なう場合の周期成分の振幅変化率 $\{C_2(k)\}^n$

$$\hat{a} = \bar{x} - \hat{b}\bar{t} \qquad \text{ただし} \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i/N$$

$$t = (N+1)/2$$

$$\hat{b} = \sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})(x_i - \bar{x}) / \sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2 \tag{2-6}$$

そして平方和 $S = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{a} - \hat{b}t_i)^2$ を $(N-2)$ で割ったものを σ^2 の推定値として

$$t = (\hat{b} - b)/S_b \qquad (\text{自由度 } N-2)$$

$$S_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\{x_i - \hat{a} - \hat{b}t_i\}^2}{(N-2)\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2} \tag{2-7}$$

を自由度 $N-2$ の t-分布表の値として有意性を検定することができる。信頼係数 $1-\alpha$ なる b の信頼限界は $\hat{b}\pm t\cdot S_b$ でたとえば $b=0$ (長期傾向がない) という仮説もそれが上述の範囲内に含まれるか否かによって検定される。

蘭陽渓の 16 年間の年平均流量について (2-6) をあてはめてみると $\hat{a}=93.7$, $\hat{b}=-2.573$ となり，図 2-6 に一点鎖線で示す直線になる。次に (2-7) によって S_b を求めれば $S_b=0.988$ である。自由度 $16-2=14$ の t-分布表より信頼係数 0.95 で $t=2.144$ を得れば，信頼限界は

$$-2.573-2.144\times 0.988 < b < -2.573+2.144\times 0.988$$

$$-4.691 \quad < b < \quad -0.455$$

となる。この範囲内に $b=0$ が含まれていないから $b=0$ という仮説は棄却され，蘭陽渓の年平均流量が経年的に減少傾向をもつことが統計的に結論される。しかし，水文現象では 20 年以上の長周期変動が見出されている報告も多く，図 2-6 の 3 年移動平均をみると，この資料が約年 26 周期変動の一部とも考えられる。長期傾向を判断するには 16 年という資料年数は不足であるから，本文では長期傾向を特に考慮しないで以下の解析を行なうことにする。今後の研究課題の一つとして，一応最近における年平均流量の減少傾向を指摘しておく。

3. コレログラムによる周期成分の分離

3.1 自己相関関数 (Auto-correlation Function) とコレログラム

時間的に変動する量を $x(t)$ であらわし，その自己相関関数 $R(\tau)$ を (3-1) で定義する。

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt \tag{3-1}$$

すなわち，$R(\tau)$ はある時刻 t における量 $x(t)$ と，それから τ だけ経過した時刻 $(t+\tau)$ における量 $x(t+\tau)$ との積を，t のあらゆる値について合計したものの平均値である。換言すれば $R(\tau)$ は $x(t)$ とそれから τ だけ離れた時刻における $x(t+\tau)$ との相関の程度を示すものである。

相関関数 $R(\tau)$ のグラフすなわち τ と $R(\tau)$ の関係を示す曲線をコレログラム (Correlogram) といい，時系列解析の基本となるものである。$R(\tau)$ は一般につぎのような特性をもっている。

a. 原点 $(\tau=0)$ における自己相関関数の値は，変動 $x(t)$ の 2 乗平均を与え，平均値が零のときには，その分散を与える。

b. 変動 $x(t)$ の中に周期成分を含まないときには，τ が無限大に近づくとき，自己相関関数の値は零に近づく (但し，系列平均が零のとき)。

c. 自己相関関数は原点において最大値をもつ。

3.2 周期関数の自己相関関数

水文量の時系列解析では，系列の中に含まれる周期的な変動成分を見出すのにコレログラ

ムを用いる。最も簡単な例として (3-2) であらわされる変動を考える。

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{3-2}$$

これを (3-1) へ代入すれば

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega t+\phi)\cdot A\cos\left\{\omega(t+\tau)+\phi\right\} dt \\ &= \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\cos\omega\tau + \cos(2\omega t+\omega\tau+2\phi)\right\} dt \\ &= A^2\cos\omega\tau/2 \end{aligned} \tag{3-3}$$

若し変動が (3-2) であらわされる周期関数であれば，$R(\tau)$ も原変動と同じ周期をもつ周期関数になるのである。また (3-3) によれば $R(\tau)$ の中には原変動の位相角 ϕ は含まれていない。従って周期と振幅が同一の三角関数では，位相角が異なっても自己相関関数は同一になることがわかる。$R(\tau)$ の振幅は原変動の振幅 A に対して $A^2/2$ になる。

変動が (3-4) で与えられるフーリエ級数であらわされる場合には $R(\tau)$ は (3-5) になる。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t) \tag{3-4}$$

$$R(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos n\omega\tau \tag{3-5}$$

(3-5) にみられるように，変動がフーリエ級数であらわされる場合にも $R(\tau)$ は原変動と同じ基本周期をもつフーリエ級数になる。

3.3 ランダム変動と規則的な変動との合成波の自己相関関数

ランダムに変動する成分を $x_1(t)$，規則的に変動する成分を $x_2(t)$ とし，その合成変動 $x(t)$ を考える。

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{3-6}$$

$x(t)$ の自己相関関数 $R(\tau)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)\cdot x_1(t+\tau)\,dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)\cdot x_2(t+\tau)\,dt \\ &+ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_2(t)\cdot x_1(t+\tau)\,dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_2(t)\cdot x_2(t+\tau)\,dt \end{aligned} \tag{3-7}$$

(3-7) において右辺の第1項は $x_1(t)$ の自己相関関数 $R_1(\tau)$ であり，同じく第4項は $x_2(t)$ の自己相関関数である。第2項と第3項は $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の相関をあらわし相互相関関数 (Cross-correlation function) と呼ばれそれぞれ $R_{12}(\tau)$，$R_{21}(\tau)$ と書く。これらの記号を用いると (3-7) は (3-8) になる。

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau) + R_2(\tau) \tag{3-8}$$

(3-8) にみられるように，一般に合成変動の自己相関関数は，成分変動ばかりでなく成分間の相互相関にも依存しているから合成変動のコレログラムから，直ちに成分変動，例えば周期変動を見出すことは出来ない。しかし，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ が全く独立に生ずる変動で，さらに $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の平均値が零である場合には $R_{12}(\tau)=R_{21}(\tau)=0$ になる。したがって (3-9) の関係が成立する。

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) \tag{3-9}$$

(3-9) の関係が成立する場合であれば，合成変動のコレログラムを調べることによって，その中に含まれる周期的変動を見出すことができるのである。

3.4 相関係数の有意性の検定

コレログラムを用いて，時系列の中から周期変動成分を分離する際，フーリエ級数の項数は相関係数の有意性の検定によって定められる。Roesner & Yevdjevich は正規分布に従う母集団から抽出した N 個のエレメントからなる時系列に対し，K 次の自己相関係数の信頼限界を (3-10) で与えた。

$$\bar{r}_K = \frac{-1 \pm n_\alpha \sqrt{N-K-2}}{N-K-1} \tag{3-10}$$

n_α は信頼水準 (Confidence level) α によって定まる係数で (3-11) の値をとる。

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 90\% & n_\alpha = 1.645 \\ \alpha = 95\% & n_\alpha = 1.960 \\ \alpha = 99\% & n_\alpha = 2.326 \end{array}\right\} \tag{3-11}$$

水文統計における有意性の検定には $\alpha=95\%$ が一般に用いられている。$\alpha=95\%$ とすれば，(3-11) は (3-12) となる。

$$\bar{r}_K = \frac{-1 \pm 1.960 \sqrt{N-K-2}}{N-K-1} \tag{3-12}$$

コレログラムに (3-12) による信頼限界線を記入し，すべての $r_K(K \geq 1)$ が信頼限界線の範囲に入れば，統計的に有意な周期成分が分離されたものと判断するのである。

3.5 蘭陽渓における月流量コレログラムと周期成分の分離

離散的な変量 (Discrete variable) に対する相関関数は (3-1) の代りに (3-13) が用いられる

$$R(K) = \frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^{N-K} (x_i - \bar{x})(x_{i+K} - \bar{x}) \tag{3-13}$$

N: 観測した資料の数
x_i: 任意の観測値
$\bar{x}$: 資料の平均値
K: 0, 1, 2, … $(N-1)$

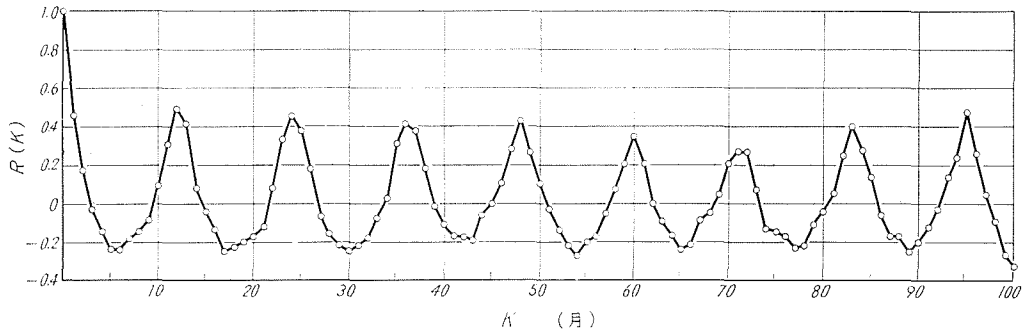

図3—1　蘭陽渓月流量変動のコレログラム

蘭陽渓において1950年から1966年までの月流量を用いて (3-13) によって相関関数を計算し，さらに相関係数を求めた。計算は $K=203$ まで行なったが，図3-1には $K=100$ までの範囲を示してある。図によると先ず目につくのは12カ月周期の振動でさらにコレログラムは山がとがり，谷が扁平な形であるから高調波である6カ月周期，4カ月周期等の成分が存在するであろうと推察される。また K の小さい範囲をみると，この変動にはランダム成分が含まれていて，周期変動に起因する分散とランダム変動に起因する分散とが同じ程度の大きさをもつことがわかる。

流量時系列は一般に (3-14) に示され，傾向成分，周期成分及び確率変動成分に分解される。

$$Q_t = T_t + P_t + \varepsilon_t \tag{3-14}$$

Q_t：　任意時刻 t における河川流量
T_t：　傾向成分 (Trend component)
P_t：　周期成分 (Periodic component)
ε_t：　確率変動成分 (Stochastic component)

このうち傾向成分は若し存在すれば移動平均によって，その成分を見出し原系列から除去することが出来る (2.4 参照)。傾向成分を除いた系列を X_t と書く。

$$X_t = Q_t - T_t = P_t + \varepsilon_t$$

周期成分 P_t は図3-1によれば12カ月を基本周期とする Fourier 級数であらわされると考えられる。そこで周期成分を (3-15) のようにおく。

$$P_t = \bar{x} + \sum_{k=1}^{6} A_k \cos \frac{2\pi k}{12} t + \sum_{k=1}^{6} B_k \frac{2\pi k}{12} t \tag{3-15}$$

最小2乗法によれば係数 A_k，B_k は (3-16) によって計算される。$\bar{x}$ は平均値である。

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t \cos \frac{2\pi k}{12} t \\ B_k &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t \sin \frac{2\pi k}{12} t \end{aligned}\right\} \tag{3-16}$$

n：　資料の総数 (=204)

蘭陽渓の資料による $\bar{x}$, A_k 及び B_k の計算は (3.4) で述べた方法で周期変動と認められた成分まで行ない P_t の計算式は (3-17) になった。

$$P_t = 71.2 + 18.98\cos\frac{2\pi}{12}t - 42.78\sin\frac{2\pi}{12}t - 5.68\cos\frac{2\pi}{6}t - 21.27\sin\frac{2\pi}{6}t - 12.49\cos\frac{2\pi}{4}t + 5.06\sin\frac{2\pi}{4}t \quad (3\text{-}17)$$

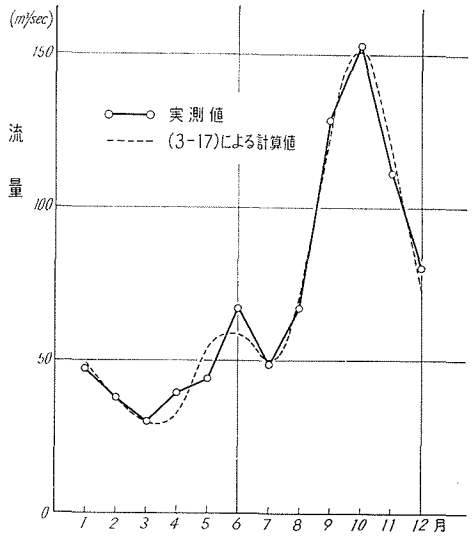

図 3—2

実測の P_t と (3-17) による計算値を比較して図 3-2 に示した。また 1950 年から 1956 年の間の流量記録と周期成分を対比し図 3-3 に示した。

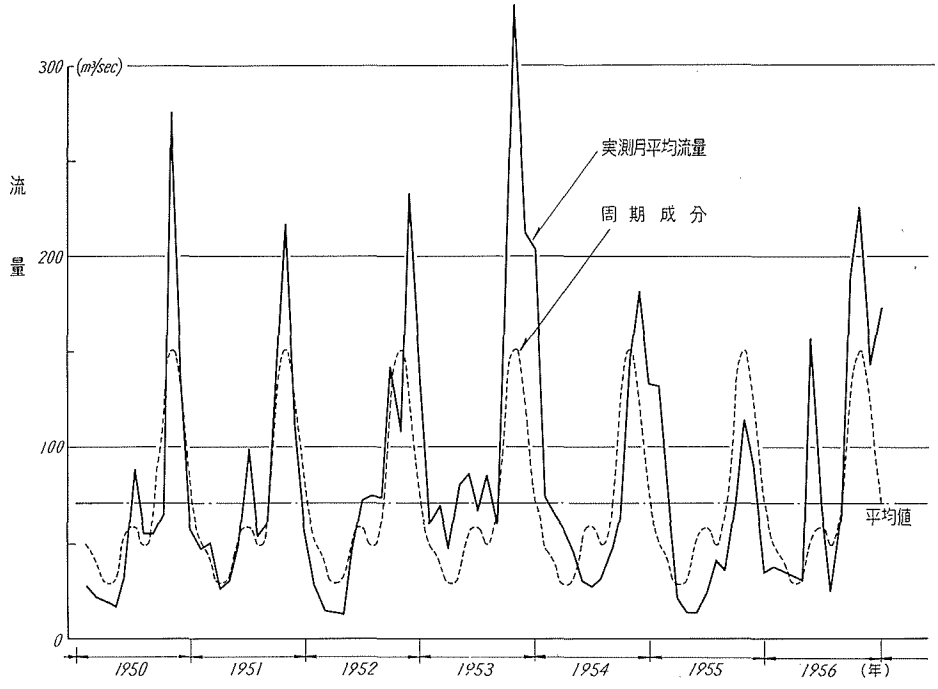

図 3—3

3.6 周期成分の分離によるコレログラムの変化

蘭陽渓の月流量資料のコレログラムから 12 カ月周期成分，6 カ月周期成分及び 4 カ月周期成分を順次分離した場合のそれぞれのコレログラムを図 3-4 a)～c) に示した。図 3-4 a)～c)

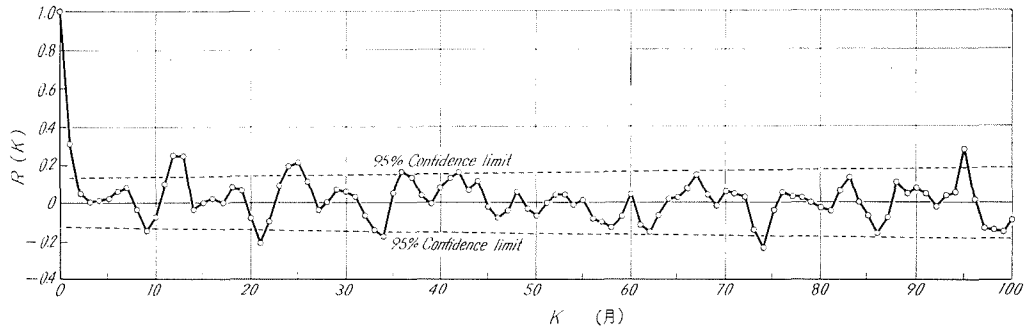

図3—4 a)

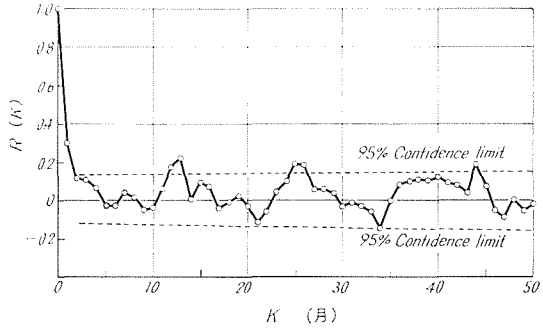

図4—3 b)

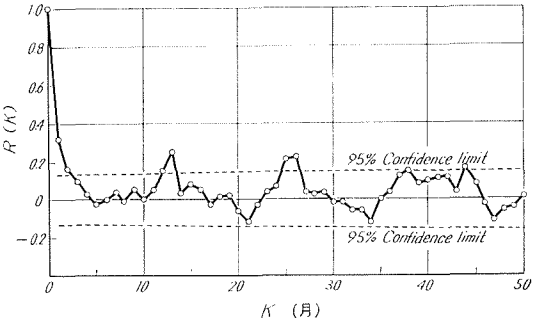

図3—4 c)

には (3-10) による信頼限界線を記入したが，4 カ月周期成分の分離によって有意な周期変動成分はすべて分離されたことがわかる。原変動から周期変動成分を除いた時系列は確率変動過程 (Random Process) と呼ばれる。

次に標準偏差について，各月の値を経年の資料から計算して，これを Fourier 級数で表わし (3-18) をえた。

$$\begin{aligned} S_t = {} & 43.93 + 8.69\cos\frac{2\pi}{12}t - 23.57\sin\frac{2\pi}{12}t \\ & - 1.58\cos\frac{2\pi}{6}t - 13.30\sin\frac{2\pi}{6}t \\ & - 0.76\cos\frac{2\pi}{4}t + 2.67\sin\frac{2\pi}{4}t \\ & - 2.64\cos\frac{2\pi}{3}t + 0.41\sin\frac{2\pi}{3}t \\ & + 0.41\cos\frac{2\pi}{2.4}t + 0.82\sin\frac{2\pi}{2.4}t \\ & + 2.79\cos\frac{2\pi}{2}t \end{aligned} \qquad (3\text{-}18)$$

4. 定常時系列理論と確率変動過程の解析

4.1 定常時系列理論の概要

一般に偶然に支配される変動成分を含んだ時系列を確率過程 (Stochastic Process) という。われわれが観測する時系列の実現値，例えば月流量時系列は，系列に含まれる偶然変動成分がある特定の値をとったときの一つの標本時系列というべきものである。時系列理論では，標本時系列からその母集団 (population) である確率過程の性質を研究し，また将来値の予測と確率論的に行なうことを目的としている。若し時刻 t_1, t_2, … t_n … における時系列の値 $X(t_1)$, $X(t_2)$, … $X(t_n)$ … が完全に独立で純偶発的 (purely random) であれば，独立事象に対する統計理論を適用すればよいので，時系列としての特別な特徴はない。これに対して $X(t_1)$, $X(t_2)$ … $X(t_n)$ … が独立でなくある種の確率的依存関係を持つ場合も多くこのような依存関係が時系列論の主な対象になるのである。

確率法則が時間によらない確率過程を定常 (Stationary) であるという。定常確率過程では多くの場合，時系列の統計量の時間平均と集合平均 (ensemble mean) とはほとんど等しい。この性質をエルゴード性 (ergodicity) という。時系列の特性量として次の諸量を定義する。

系列平均値 (Serial mean):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i/N \tag{4-1}$$

系列分散 (Serial variance):

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2/N \tag{4-2}$$

系列相関係数 (Serial correlation coefficient):

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x}_1)(x_{i+k} - \bar{x}_2)/S_1 S_2 \tag{4-3}$$

ただし

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{N-k} x_i/(N-k) \qquad \bar{x}_2 = \sum_{i=k+1}^{N} x_i/(N-k) \tag{4-4}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x}_1)^2 \\ S_2^2 &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^{N} (x_i - \bar{x}_2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{4-5}$$

実際にわれわれが取り扱う時系列は，有限の長さのもので，無限の長さの母系列からとった一つの標本系列と考えられる。(4-1)～(4-5) において系列の長さ N の効果は次式であらわされる。

$$E(\bar{X}) = m \tag{4-6}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 L_N(\rho)/N \tag{4-7}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 [1 - L_N(\rho)/N] \tag{4-8}$$

ここに

m：　母集団平均値

σ_X：　系列平均値 $\bar{X}$ の分散

σ_2：　母系列の分散

$$L_N(\rho) = 1 + 2\left\{\frac{N-1}{N}\rho_1 + \frac{N-2}{N}\rho_2 + \cdots + \frac{1}{N}\rho_{N-1}\right\} \tag{4-9}$$

$$\rho_k = \lim_{N\to\infty} r_k \quad \text{(母系列の系列相関係数)}$$

われわれが扱う時系列は必ずしも定常過程とは限らない。しかし，平均値および分散が時間によらないとき，その過程を弱定常 (stationary in wide sense) といい，定常時系列の理論の適用が許される。

一般に時系列は (3-14) に示した如く，傾向成分，周期成分，確率変動成分の 3 成分からなるが，傾向成分の存在の有無をしらべ，もしその存在が統計的に有意と判断された場合は，時系列から傾向成分を取り除かねばならない。さらに残った系列について定常化の操作を行ない時系列理論をあてはめることになる。

定常な時系列のコレログラムは一般に図 4-1 の 3 種に分類される。コレログラムが図 4-1 a) に示すように減衰振動 (Damped oscillation) の形をとる場合および図 4-1 a′) のような減衰曲線 (Decay curve) の型をとる場合には時系列は (4-11) の定差方程式 (Difference equation) を満たす。

$$X(t) + a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) + \cdots\cdots + a_h X(t-h) = \eta(t) \tag{4-11}$$

係数 a_1, a_2, $\cdots$ a_h は自己相関関数によって決定される。(4-11) を自己回帰型 (Autoregressive scheme)，または h 次の Markov 過程 (Markov process) という。(4-11) において η(t) は純偶

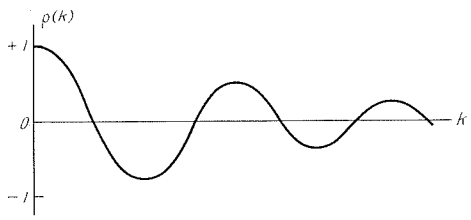

図 4—1 a)

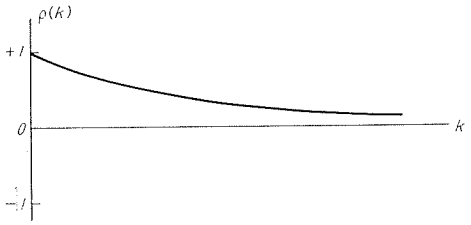

図 4—1 a′)

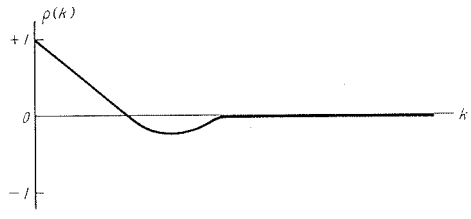

図 4—1 b)

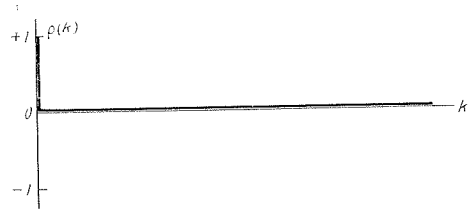

図 4—1 c)

発成分 (purely random component) である。コレログラムが図 4-1 b) のように有限の ρ_h までは 0 でないが $k>h$ に対して $\rho_k=0$ となる場合には時系列は (4-12) によってあらわされる。(4-12) を移動平均型 (Moving average scheme) という。

$$X(t)=\eta(t)+b_1\eta(t-1)+b_2\eta(t-2)+\cdots\cdots+b_h\eta(t-h) \tag{4-12}$$

係数 b_1, b_2, $\cdots$ b_h は自己相関関数によって決定され (4-11) の a_1, a_2 $\cdots$ a_h と関数関係がある。

コレログラムが図 4-1 c) のように $k>1$ のとき $\rho_k=0$ とみなされる場合は純偶発的変動である。周期成分と確率変動成分をそれぞれ特異過程 (Singular process) および正常過程 (Regular process) と呼ぶことがある。これは周期成分のスペクトル (spectrum) が離散的な線スペクトル (Line spectrum) となり，確率変動成分のスペクトルは連続スペクトル (Continuous spectrum) となる事実に立脚した分類である。(4-12) は (4-11) を書きなおした 1 つの変形である。(4-12) で t の代りに $(t+k)$ を代入すれば

$$X(t+k)=\eta(t+k)+b_1\eta(t+k-1)+b_2\eta(t+k-2)+\cdots \tag{4-13}$$

(4-11) と (4-13) を乗じて平均をとれば，平均値 0 の時系列であれば (4-14) の関係より (4-15) がえられる。

$$\left.\begin{aligned} &r_k=\frac{1}{N-k}\sum X(t)\cdot X(t+k)\\ &\sum\eta(t)\cdot\eta(t+k)=0,\qquad k=1,\ 2,\ 3\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

$$r_k+a_1r_{k-1}+a_2r_{k-2}+\cdots=0 \tag{4-15}$$

また (4-11) の係数 a_k と (4-12) の係数 b_k との間には (4-16) の関係がある。

$$a_k+b_1a_{k-1}+b_2a_{k-2}+\cdots\cdots+b_{k-1}a_1+b_k=0 \tag{4-16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{ただし}\qquad a_0=b_0=1\\ &\qquad\qquad a_{-k}=b_{-k}=0\qquad k=1,\ 2,\ 3\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

4.2 自己回帰過程の解析理論

(4-15) の最初の h 項をとった連立方程式

$$\left.\begin{aligned} &r_1+a_1+a_2r_1+\cdots\cdots+a_hr_{h-1}=0\\ &r_2+a_1r_1+a_2+\cdots\cdots+a_hr_{h-2}=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_h+a_1r_{h-1}+a_2r_{h-2}+\cdots\cdots+a_h=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-18}$$

において r_1, r_2 $\cdots$ は既知であるから (4-18) は a_1, a_2 $\cdots$ a_h に対する連立一次方程式である。これをといて $a_k(k=1,\ 2,\ \cdots\ h)$ を求める。項数 h が妥当であれば (4-15) で $k=h+1, h+2, \cdots$ とおいて得られる r_{h+1}, r_{h+2} $\cdots$ は時系列標本で計算された系列相関と近似的に一致するはずである。

自己回帰型で最も簡単な例は (4-18) で $h=1$ とおいた (4-19) である。

$$X(t)+a_1X(t-1)=\eta(t) \tag{4-19}$$

(4-18) によれば $a_1=-r_1$ であるから

$$X(t)=r_1X(t-1)+\eta(t) \tag{4-20}$$

(4-20) は単純マルコフ過程 (Simple Markov Process) または1次のマルコフ過程 (1st-order Markov Process) と呼ばれる。(4-18) で $h=2$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} r_1+a_1+a_2r_1&=0\\ r_2+a_1r_1+a_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{4-21}$$

したがって係数 a_1, a_2 は (4-22) で与えられる

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{r_1(r_2-1)}{1-r_1^2}\\ a_2&=\frac{r_1^2-r_2}{1-r_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{4-22}$$

$h=2$ とおいた過程 (4-23) を2次の Markov 過程という。

$$X(t)+a_1X(t-1)+a_2X(t-2)=\eta(t) \tag{4-23}$$

係数 a_k が求められると正常過程 $X(t)$ の分散 $S^2(X)$ に対する $X(t)$ の中の純偶発成分 $\eta(t)$ の分散 $S^2(\eta)$ の比 K^2 が (4-24) によって求められる。

$$K^2\equiv S^2(\eta)/S^2(X)=1+a_1r_1+a_2r_2+\cdots\cdots+a_kr_k \tag{4-24}$$

1次の Markov 過程ならば

$$K^2=1-r_1^2 \tag{4-25}$$

2次の Markov 過程ならば

$$K^2=\frac{1-a_2}{1+a_2}\left\{(1+a_2)^2-a_1^2\right\} \tag{4-26}$$

一般に (4-24) は時系列解析の適合度の判定に用いられる。(4-24) を参照して

$$1-K^2=\left\{S^2(X)-S^2(\eta)\right\}\Big/S^2(X) \tag{4-27}$$

を考えると，これは正常過程の中に含まれる規則性の程度 (あるいは deterministic な成分の大きさ) をあらわすので，この量を解析効果 (Efficiency of analysis) と呼ぶ。若し $1-K^2$ が1に近ければ系列の中に含まれる純偶発成分は小さいのであるから，実用的な意味での予測の可能性がでてくるのである。

自己回帰過程によって予測を行なうには (4-13) を用いる。(4-13) を再記すれば

$$\begin{aligned} X(t+k)=&\eta(t+k)+b_1\eta(t+k-1)+b_2\eta(t+k-2)+\cdots\cdots\\ &+b_{k-1}\eta(t+1)+b_k\eta(t)+b_{k+1}\eta(t-1)+b_{k+2}\eta(t-2)+\cdots\cdots \end{aligned}$$

であるが，このうち $\eta(t)$, $\eta(t-1)$, $\eta(t-2)$ …… などは実現値として既知の値である。従って

予測式は $\eta(t)$, $\eta(t-1)$ …… などが特定の値 y_t, y_{t-1} … などをとった場合の条件づき確率 (conditional probability) を考え, $X(t+k)$ の平均値を予測値とする。すなわち予測値は (4-28) になる。

$$E\left\{X_c(t+k)\right\} = b_k y_t + b_{k+1} y_{t-1} + b_{k+2} y_{t-2} + \cdots\cdots \tag{4-28}$$

ここに y_t は時系列 $X(t)$ の実現値を x_t と書いて (4-29) で与えられる。

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots\cdots + a_h x_{t-h} \tag{4-29}$$

(4-28) は書き直すと (4-30) の形でもあらわされる。

$$E\left\{X_c(t+k)\right\} = -a_1 E\left\{X_c(t+k-1)\right\} - \cdots\cdots - a_{k-1} E\left\{X_c(t+1)\right\} - a_k x_t - a_{k+1} x_{t-1} - \cdots\cdots - a_h x_{t-h+k} - \cdots\cdots \tag{4-30}$$

(4-28) または (4-30) による予測の精度は条件づき分散によって測られ, 外挿値の分散は (4-31) で求められる。

$$E\left[\left\{X_c(t+k) - E(X_c(t+k))\right\}^2\right] = (1 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots\cdots + b_{k-1}^2)\, S^2(\eta) \tag{4-31}$$

ここに

$$S^2(\eta) \fallingdotseq K^2 S^2(x) = (1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots\cdots + a_h r_h)\, S^2(x) \tag{4-32}$$

ただし　$S^2(x)$: 時系列 $X(t)$ の実現値 x_t の分散

4.3 移動平均過程の解析理論

方程式 (4-33) を考える

$$r_h x^h + r_{h-1} x^{h-1} + \cdots\cdots + r_1 x + 1 + r_1/x + r_2/x^2 + \cdots\cdots + r_h/x^h = 0 \tag{4-33}$$

この式の $2h$ 個の解のうち h 個は単位円の内部に (他の根は外部にある) あるから, それらを α_1, α_2, … α_h とする。

(4-12) における係数 b_k は (4-34) の係数として定められる。

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_h) \equiv x^h + b_1 x^{h-1} + b_2 x^{h-2} + \cdots\cdots + b_{h-1} x + b_h \tag{4-34}$$

係数 a_k は (4-16) で $k=1, 2, \cdots h$ とおけば順に求められる。

(4-34) の導き方で明らかなように

$$x_h + b_1 x^{h-1} + b_2 x^{h-2} + \cdots\cdots + b_{h-1} x + b_h = 0 \tag{4-35}$$

の根はすべて単位円の内部にある。(4-35) は a_h に関する定差方程式 (4-36) の特性方程式である。

$$a_k + b_1 a_{k-1} + b_2 a_{k-2} + \cdots\cdots + b_h a_{k-h} = 0 \tag{4-36}$$

しかも特性方程式の根がすべて単位円の内部にあるならば $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$ であり (4-11) の左辺の収束性が保証される。

係数 b_k が求められると (4-12) における $X(t)$ の分散 $S^2(X)$ に対する $\eta(t)$ の分散 $S^2(\eta)$ の比 K^2 は (4-37) で計算される。

$$K^2 \equiv S^2(\eta)/S^2(X) = 1/(1+b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_h^2) \tag{4-37}$$

予測式は (4-38) で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E\left\{X_c(t+k)\right\} &= b_k g_t + b_{k+1} y_{t-1} + \cdots\cdots + b_h y_{t-h+k} \\ &\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots h) \\ &= 0 \qquad (k=h+1,\ h+2,\ \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{4-38}$$

ただし y_t は $\eta(t)$ の実現値で (4-39) によって計算される。

$$y_t = x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots\cdots + a_h x_{t-h} \tag{4-39}$$

予測式の精度は予測値の分散で測られ (4-40) で計算できる。

$$\left.\begin{aligned} &E\left[\left\{X_c(t+k)-E(X_c(t+k))\right\}^2\right] \\ &\quad = (1+b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_{k-1}^2)\ S^2(\eta), \quad k=1,\ 2,\ \cdots h \\ &\quad = S^2(X), \quad k=h+1,\ h+2,\ \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4-40}$$

5. 蘭陽渓における月流量時系列の確率変動成分 (Stochastic component) の解析

Chapt. 3 において蘭陽渓の月流量時系列から周期成分を分離した経過を述べた。統計的に有意な成分として 12 カ月周期，6 カ月周期および 4 カ月周期の変動が分離された。原変動から周期成分を差引いた確率変動成分のコレログラムが図 3-4 c) に示されている。図 3-4 c) には相関係数の 95% 信頼限界曲線も記入してある。K=13 および 26 の点に極大値，K=21 および 34 に極小値があり，全体として 13 カ月周期の成分が残っているようにも見える。しかし，相関係数の値は正規分布系列の限界値に近く，この成分が統計的に有意であるかどうかは断定できない。本文では 13 カ月周期成分は標本時系列にあらわれた見掛け上の成分であると考えて，これを確率変動成分の中に含めた。このことの妥当性は後の 5.2 節で確かめられている。

5.1 確率変動成分の近似解

図 3-4 c) によればこのコレログラムは Chapt. 4 の図 4-1 に示した型のうち図 4-1 a′ の減衰曲線型または図 4-1 b) の移動平均型に属するとみられる。しかし，r_1=0.32，r_2=0.16 で現象の持続性は比較的小さい。そこで後に述べる自己回帰型の適用結果と比較するために，初めに確率変動成分を純偶発変動とみなして解析した。蘭陽渓の月流量時系列から周期成分を差引いた確率変動成分について，流量 5.0 m³/sec 刻みの度数分布をしらべ表 5-1 に示した。表 5-1 の分布を図示すれば図 5-1 のようになり −10 m³/sec にモード (mode) をもつ非対称分布である。

この分布の確率密度関係を定めるのに小河原，岸の方法を用いる。図 5-1 の流量度数分布

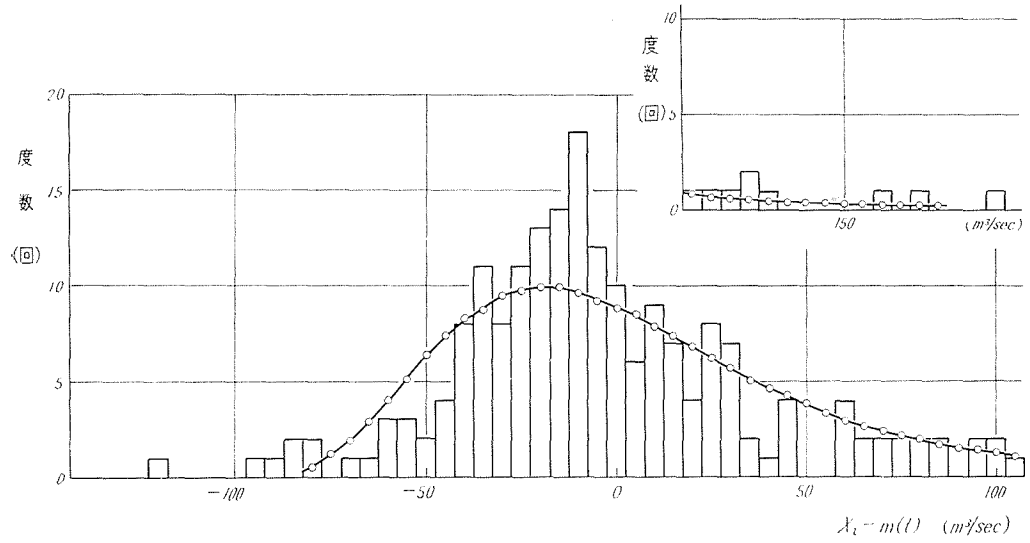

図5—1　渇　水　渓 (Choshui) R.

を対数変換によって正規分布にあてはめるのである。この操作は (5-1) によってあらわされる。

$$\int_{-\infty}^{c} q(c)\,dc = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2/2}\,d\xi = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\,d\xi \qquad (5\text{-}1)$$

ただし　　c:　流量のクラス番号 (連続変量と考える)

$q(c)$:　流量の度数密度，すなわち $q(c)\,dc$ が c と $c+dc$ の間の度数の全度数に対する比を与える。

c と ξ の変換関係を定めるため，表 5-1 で実測分布関数 $\int_{-\infty}^{c} q(c)\,dc$ の値を求め，誤差積分表によってそれに対応する ξ の値を計算する。表 5-1 の第 6 欄が $\int_{-\infty}^{c} q(c)\,dc$ の値の (%) であり，第 7 欄が ξ の数値である。図 5-1 の度数分布は Γ−分布に似ているので ξ と c との変換を (5-2) で近似した。

$$\xi = a\log c + b \qquad (5\text{-}2)$$

ただし　　a, b:　分布の定数

ξ と $\log c$ の関係を図 5-2 に示したが (5-2) による近似が成立することがわかる。分布の定数を計算し近似式として (5-3) を得た。

$$\xi = 6.193\log c - 8.500 \qquad (5\text{-}3)$$

(5-3) によって計算した流量の理論度数曲線が図 5-1 の実線である。理論曲線は実測度数にくらべモードの近くで多少差があるが，全体として実測値と理論値はよく合っていると認められる。

これから月平均流量の超過確率を計算すると再現期間 (Return period) T と ξ との関係は表 5-2 のようになる。

表 5—1

階級 c	確率変動成分	$\log c$	度数	累加度数	%	ξ	ξ' (計算値)	$E(\xi)$	累加度数	度数
1	−122.4～−117.5	0	1	1	0.49	−2.583	−8.500			
2	−117.4～−112.5	0.3010	0	1	〃	〃				
3	−112.4～−107.5	0.4771	0	1	〃	〃				
4	−107.4～−102.5	0.6021	0	1	〃	〃				
5	−102.4～− 97.5	0.6990	0	1	〃	〃				
6	− 97.4～− 92.5	0.7782	1	2	0.98	−2.334	−3.681	0.0001	0.02	
7	− 92.4～− 87.5	0.8451	1	3	1.47	−2.178	−3.267	0.0006		
8	− 87.4～− 82.5	0.9031	2	5	2.45	−1.968	−2.908	0.0019	0.39	
9	− 82.4～− 77.5	0.9542	2	7	3.43	−1.821	−2.591	0.0048	0.97	0.5
10	− 77.4～− 72.5	1.0000	0	7	〃	〃	−2.307	0.0106	2.16	1.19
11	− 72.4～− 67.5	1.0414	1	8	3.92	−1.760	−2.051	0.0202	4.12	1.96
12	− 67.4～− 62.5	1.0792	1	9	4.41	−1.705	−1.817	0.0347	7.07	2.95
13	− 62.4～− 57.5	1.1139	4	13	6.37	−1.524	−1.602	0.0546	11.13	4.06
14	− 57.4～− 52.5	1.1461	3	16	7.84	−1.416	−1.403	0.0804	16.40	5.27
15	− 52.4～− 47.5	1.1761	2	18	8.82	−1.352	−1.217	0.1119	20.82	6.42
16	− 47.4～− 42.5	1.2041	4	22	10.78	−1.238	−1.044	0.1483	30.25	7.43
17	− 42.4～− 37.5	1.2304	8	30	14.70	−1.049	−0.881	0.1892	38.59	8.34
18	− 37.4～− 32.5	1.2553	11	41	20.09	−0.838	−0.726	0.2340	47.73	8.78
19	− 32.4～− 27.5	1.2788	8	49	24.02	−0.705	−0.581	0.2807	57.26	9.53
20	− 27.4～− 22.5	1.3010	11	60	29.41	−0.541	−0.443	0.3289	67.09	9.83
21	− 224.～— 17.5	1.3222	13	73	35.78	−0.364	−0.312	0.3776	77.03	9.94
22	− 17.5～− 12.5	1.3424	14	87	42.65	−0.187	−0.187	0.4259	86.88	9.85
23	− 12.4～− 7.5	1.3617	18	105	51.47	0.036	−0.067	0.4733	96.55	9.67
24	− 7.4～− 2.5	1.3802	12	117	57.35	0.185	0.047	0.5187	105.81	8.90
25	− 2.4～+ 2.5	1.3979	11	128	62.75	0.325	0.157	0.5623	114.71	9.47
26	+ 2.4～+ 7.5	1.4150	7	135	66.18	0.417	0.263	0.6037	123.15	8.44
27	7.4～+ 12.5	1.4314	9	144	70.59	0.541	0.364	0.6420	130.96	7.81
28	12.4～+ 17.5	1.4472	7	151	74.02	0.644	0.462	0.6779	138.29	7.33
29	17.4～ 22.5	1.4624	4	155	75.98	0.705	0.556	0.7108	145.00	6.71
30	22.4～ 27.5	1.4771	8	163	79.90	0.838	0.647	0.7411	151.18	6.18
31	27.6～ 32.5	1.4914	7	170	83.33	0.967	0.736	0.769	156.99	5.71
32	32.4～ 37.5	1.5051	2	172	84.31	1.007	0.821	0.7941	161.99	5.10
33	37.4～ 42.5	1.5185	1	173	84.80	1.027	0.822	0.7944	162.05	4.97
34	42.4～ 47.5	1.5315	4	177	86.76	1.115	0.984	0.8374	170.68	8.63
35	47.4～ 52.5	1.5441	0	177	〃	〃	1.062	0.8558	174.58	3.90
36	52.4～ 57.5	1.5563	0	177	〃	〃	1.138	0.8724	177.96	3.38
37	57.4～ 62.5	1.5682	4	181	88.73	1.212	1.211	0.8870	180.94	2.98
38	62.4～ 67.5	1.5798	2	183	89.71	1.265	1.283	0.9002	183.64	2.70
39	67.4～ 72.5	1.5911	2	185	90.69	1.322	1.353	0.9119	186.02	2.38
40	72.4～ 77.5	1.6021	2	187	91.67	1.383	1.421	0.9213	188.14	2.12
41	77.4～ 82.5	1.6128	2	189	92.65	1.450	1.488	0.9306	190.04	1.90
42	82.4～ 87.5	1.6232	2	191	93.63	1.524	1.552	0.9396	191.67	1.62
43	87.4～ 92.5	1.6335	0	191	〃	〃	1.616	0.9469	193.14	1.49
44	92.4～ 97.5	1.6435	2	193	94.61	1.608	1.678	0.9533	194.47	1.31

階級 c	確率変動成分	$\log c$	度数	累加度数	%	ξ	ξ' (計算値)	$E(\xi)$	累加度数	度数
45	97.4～ 102.5	1.6532	2	195	95.59	1.705	1.738	0.9588	195.59	1.12
46	102.4～ 107.5	1.6628	1	196	96.08	1.760	1.797	0.9538	194.57	1.02
47	107.4～ 112.5	1.6721	1	197	96.57	1.821	1.855	0.9682	197.51	2.94
48	112.4～ 117.5	1.6812	1	198	97.06	1.889	1.911	0.9719	198.26	1.11
49	117.4～ 122.5	1.6902	1	199	97.54	1.967	1.967	0.9754	198.98	0.72
50	122.4～ 127.5	1.6990	2	201	98.53	2.178	2.021	0.9783	199.51	0.59
51	127.4～ 132.5	1.7076	1	202	99.02	2.334	2.075	0.9810	200.12	0.55
52	132.4～ 137.5	1.7160	0	〃	〃	〃	2.127	0.9832	200.57	0.45
53	137.4～ 142.5	1.7248	0	〃	〃	〃	2.181	0.9854	201.02	0.45
54	142.4～ 147.5	1.7324	0	〃	〃	〃	2.228	0.9870	201.34	0.32
55	147.4～ 152.5	1.7404	0	〃	〃	〃	2.278	0.9886	201.67	0.33
56	152.4～ 157.5	1.7482	0	〃	〃	〃	2.326	0.9899	201.93	0.26
57	157.4～ 162.5	1.7559	0	〃	〃	〃	2.374	0.9912	202.20	0.27
58	162.4～ 167.5	1.7634	1	203	99.51	2.583	2.420	0.9922	202.40	0.20
59	167.4～ 172.5	1.7708	0	〃	〃	〃	2.466	0.9931	202.95	0.19
60	172.4～ 177.5		1	204	100.00					

またξの値を(5-3)に代入してそれぞれの流量クラスcを求め，さらに表5-1によってcを流量値εに換算して表5-3に示した。表5-3に与えたεの値を，周期成分に加えれば種々の再現期間に対する月流量の上限値が得られる。この計算を表5-3に示した。

表5-3と実測の月流量を比較し，実測値が理論を越えた回数をしらべて表5-4を得た。表5-4によれば，比較的稀に発生する月流量の値を推定するには，確率変動成分を純発偶的と考えた取り扱いもかなりよい近似を与えることがわかる。

本章の取り扱いでは，確率変動成分が定常時系列を形成するかどうか深い吟味を行なわなかった。表5-4で確率流量を超える実測値が発生した月をしらべると，8～11月で流量の平均値（周期成分）が大きい期間に集中している。平均値が大きい月は流量分散も大である事が予想される。したがって月毎の流量分散のちがいも考慮に入れて，確率変動成

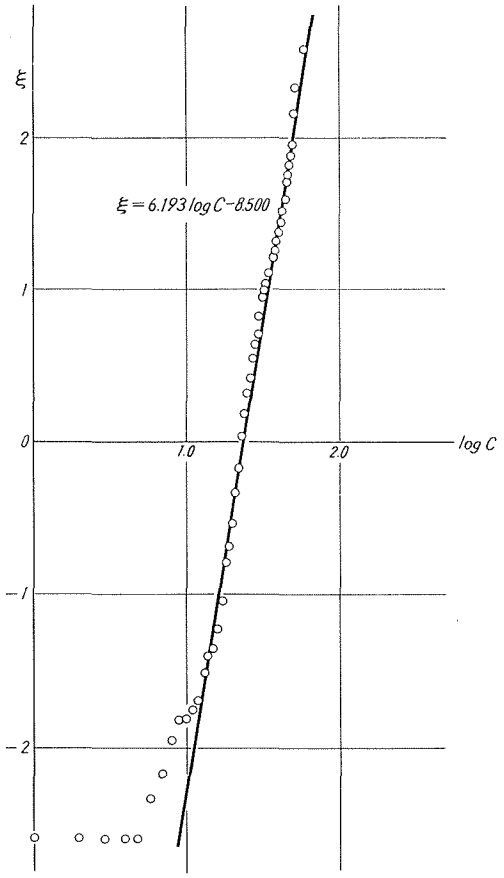

図5—2

表 5—2　種々の再現期間に対する ξ および ε の値

T (年)	5	10	20	30	50
ξ	2.128	2.394	2.638	2.773	2.935
ε (m^3/sec)	135	160	190	205	225

表 5—3　確　率　流　量

	P_t	5 年	10 年	20 年	30 年	40 年	50 年
Jan.	50.0	185.0	210.0	240.0	255.0	265.0	275.0
Feb.	40.5	175.5	200.5	230.5	245.5	255.5	265.5
March	29.0	164.0	189.0	219.0	234.0	244.0	254.0
Apr.	33.4	168.4	193.4	223.4	238.4	248.4	258.4
May	54.0	189.0	214.0	244.0	259.0	269.0	279.0
June	59.0	194.0	219.0	249.0	264.0	274.0	284.0
July	49.5	184.5	209.5	239.5	254.5	264.5	274.5
August	70.7	205.7*	230.7*	260.7	275.7	285.7	295.7
Sept.	124.7	259.7	284.7	314.7	329.7	339.7	349.7
Oct.	151.5	286.5*	311.5*	341.5*	356.5	366.5	376.5
Nov.	119.5	254.5*	279.5*	309.5	324.5	334.5	344.5
Dec.	72.0	207.0	232.0	262.0	277.0	287.0	297.0

*　実現値が確率流量を越えたもの

表 5—4　蘭陽渓の確率流量と観測期間内 (204カ月) でそれを越えた回数

再現期間 (年)	5	10	20	30	50
実　測　回　数	3	3	1	0	0
理　論　回　数	2.4	1.7	0.85	0.57	0.34

分の性質をさらに厳密にしらべる必要がある。

次に確率変動成分の分散について調べると確率変動成分の標準偏差 σ は $\sigma=48.90$ m^3/sec である。これに対して周期成分 P_t の最大値は 10 月の $P_{10}=151.5$ m^3/sec であり $\sigma/P_{10}\fallingdotseq 0.30$ となっている。

5.2　時系列の定常化と確率変動成分の解析

時系列理論を適用するには変量を変換して広義の定常時系列に直さなければならない。そのためには平均値および分散が時間 t に無関係に一定値でなければならない。

原系列 X_t から周期変動成分 P_t を差引けば，(X_t-P_t) は平均値 0 の系列になる。さらにこれを (X_t-P_t) の平均値 P_t のまわりの標準偏差 S_t で割れば $(X_t-P_t)/S_t$ は平均値 0，分散 1 の系列であるから，広義の定常時系列の条件を満足している。前節では (X_t-P_t) を解析したのであるが，この量は平均値は 0 で一定であるが，分散は月毎に変化していて一定値ではない。

前節の解を近似解としたのは，この理由によるのである。

新変数として (5-4) を導入する。

$$Y(t)=\frac{X_t-P_t}{S_t} \tag{5-4}$$

$Y(t)$ の値および $Y(t)$ の平均値 $\overline{Y}$，$Y(t)$ の分散 S_Y の計算結果は

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}&=-0.00046\fallingdotseq 0\\ S_Y&=0.9992\fallingdotseq 1\end{aligned}\right\} \tag{5-5}$$

となり定常時系列の条件をほぼ完全に満たしていることがわかる。$\overline{Y}$ および S_Y の誤差は数値計算の打切り誤差である。

$Y(t)$ のコレログラムを図5-3に示した。図3-4 c) に示した (X_t-P_t) のコレログラムと比較すると，k が大きい部分で $Y(t)$ の相関係数は (X_t-P_t) の場合にくらべ，明らかに小さくなっている。したがって (X_t-P_t) のコレログラムにみられる13カ月周期を標本にあらわれた見掛け成分として取り扱ったことは正しいことが確かめられた。また $k<5$ の部分では，$Y(t)$ の方が (X_t-P_t) の系列より相関係数が大きい。時系列の定常化によってコレログラムの細部に修正が施されたことがわかる。

図5-3に相関係数の95% 信頼限界線を記入したが，$k=3$ までは有意な相関が認められる。しかし，$r_1=0.3323$ であまり高い相関ではない。

$Y(t)$ の度数分布を図5-4に示した。分布は (X_p-P_t) の分布と似た形の非対称分布である。

新変数を導入するに当り各月における流量の平均値 P_t に関する標準偏差 S_t を求めたが，各月の P_t，S_t および変動係数 S_t/P_t の値を図5-5に示した。図5-5にみられるように S_t の値は P_t と類似の変化を示し，変動係数 S_t/P_t は50～75% で比較的一定している。前節で確率流量を超える実測値が8～11月に集中している事を指摘したが，S_t の値がこの期間に大きい事からその理由がわかる。本節で新変数 $Y(t)$ を導入した意義が図5-5によっても理解される

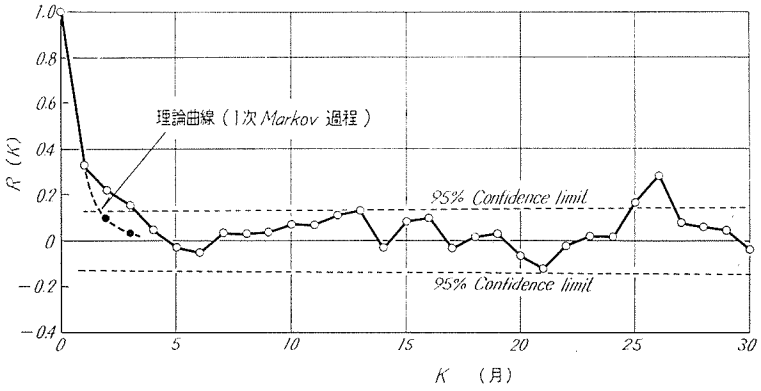

図5—3　$Y(t)$ のコレログラム

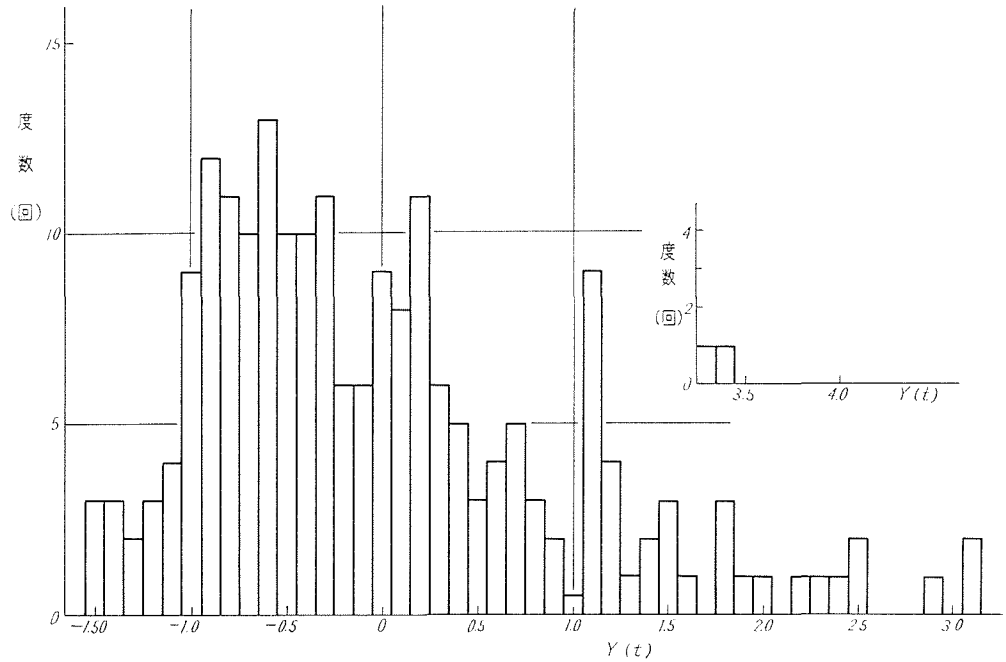

図5—4　$Y(t)$ のヒストグラム

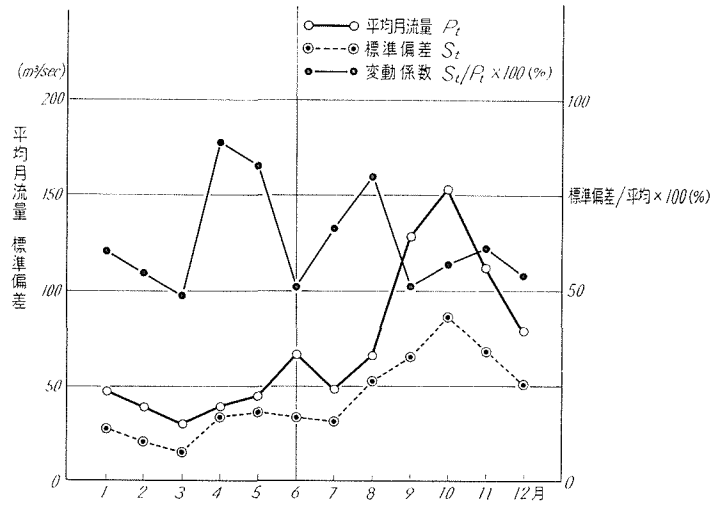

図5—5

であろう。

5.3　自己回帰過程としての確率変動成分の解析

図5-3によれば，蘭陽渓の月流量の確率変動成分のコレログラムは減衰曲線型あるいは移動平均型とみられる。本節では初めに1次 Markov 過程としての解析を行ない，次いで2次 Markov 過程としての計算結果を述べる。

$Y(t)$ のコレログラムに1次の Markov 過程を適用すれば (4-18) により

$$a_1 = -r_1, \quad a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

であり，さらに (4-15) によれば (5-8) が得られる。

$$r_k = (r_1)^k \tag{5-8}$$

実測値では $r_1=0.3323$ であるから，これによる r_k の計算値は図 5-3 の点線のようになる。r_2, r_3 … の理論値は実測値より小さく，この過程を 1 次 Markov 過程で近似するとすれば，r_1 は幾分大きい値に修正すべきかも知れない。係数 b を計算するために (4-16) で $k=1$, 2, 3 … と置けば (5-9) が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = -a_1 = r_1, \qquad b_2 = a_1^2 = r_1^2 (= r_2) \\ &b_3 = -a_1^3 = r_1^3 (= r_3), \qquad b_4 = a_1^4 = r_1^4 (= r_4) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

予測式は (4-28) および (4-29) に a_k および b_k の数値を代入すれば (5-10) および (5-11) になる。

$$E\left\{X_c(t+k)\right\} = (r_1)^k y_t + (r_1)^{k+1} y_{t-1} + (r_1)^{k+2} y_{t-2} + \cdots \tag{5-10}$$

$$y_t = x_t - r_1 x_{t-1} \tag{5-11}$$

(5-10) に (5-11) を代入すれば 1 次の Markov 過程による予測式は $k=1$ のとき結局簡単な (5-12) に帰着する。

$$E\left\{X_c(t+1)\right\} = r_1 x_t \tag{5-12}$$

1 次の Markov 過程を適用した事による解析効果は (4-25) により

$$K^2 \equiv S^2(\eta)/S^2(X) = 1 - r_1^2$$

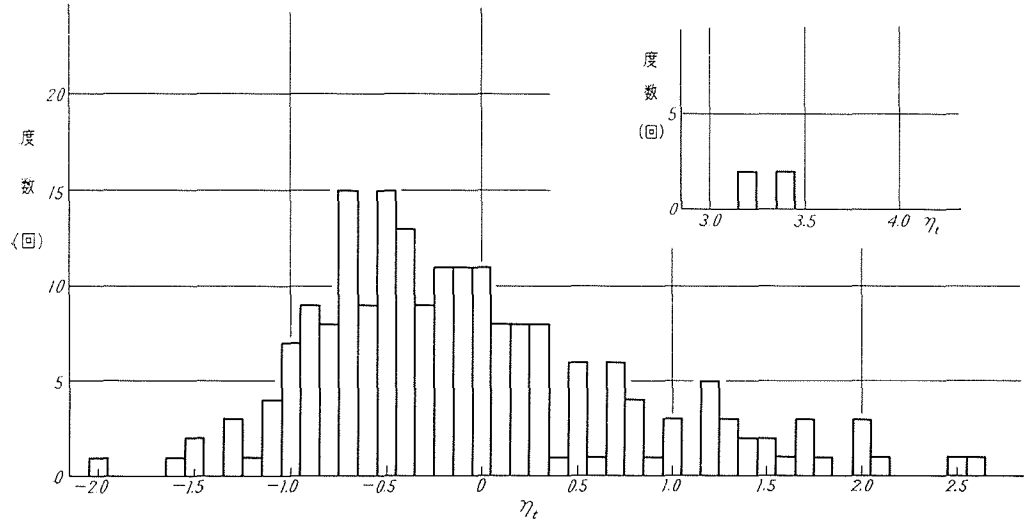

図 5—6 $\eta(t)$ のヒストグラム

であるから，$r_1=0.3323$ を代入すれば

$$1-K^2 = r_1^2 \fallingdotseq 0.11 \tag{5-13}$$

$Y(t)$ に含まれる規則成分の分散は全分散の 11% で，純偶発成分の分散が 89% であることがわかる。蘭陽渓の実測値から (5-11) によって純偶発成分を求め，その度数分布を図 5-6 に示した。図 5-4 の $Y(t)$ の度数分布と比較すると，幾分分散が小さくなっている事が理解できるであろう。

また (5-12) による予測値に対する実現値の分散は (4-31) により

$$\begin{aligned} E\left[\left\{X_c(t+1)-E(X_c(t+1))\right\}^2\right] &= S^2(\eta) \\ &= (1-r_1^2)\, S_Y^2 = 0.89 \end{aligned} \tag{5-14}$$

蘭陽渓の月流量では $r_1=0.3323$ で相関があまりたかくないから 1 次の Markov 過程の適用により，予測値に関する分散を純偶発性と考えた場合より 11% 減らしたに止り予測精度を格段に向上させることは困難であった。ただ 1 次の Markov 過程では $r_k=(r_1)^k$ であり，理論コレログラムは図 5-3 に破線で示したように実測値と幾分差がある。2 次の Markov 過程の適用により，予測精度を向上できるか次に検討してみた。

2 次の Markov 過程としてまず a_1 および a_2 を (4-22) によって求め (5-15) を得た。

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -0.29294 \\ a_2 &= -0.11846 \end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

係数 b_k は (4-16) で $k=1, 2, \cdots$ と置いて求める

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= -a_1 = 0.29294 \\ b_2 &= -a_2-b_1a_1 = 0.20427 \\ b_3 &= -b_1a_2-b_2a_1 = 0.09454 \\ b_4 &= -b_2a_2-b_3a_1 = 0.05189 \\ b_5 &= -b_3a_2-b_4a_1 = 0.02640 \\ b_6 &= -b_4a_2-b_5a_1 = 0.01388 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5-16}$$

(4-26) によって K^2 を計算すると

$$K_{\mathrm{cal}}^2 \equiv S^2(\eta)/S^2(X) = 0.8823 \tag{5-17}$$

したがって解析効果は

$$1-K^2 \fallingdotseq 0.12$$

となり 1 次 Markov 過程の場合よりわずか乍ら解析効果が大となった。2 次の Markov 過程では純偶発成分 $\eta(t)$ は (4-23) で与えられ，この例では (5-19) 与えられる。

$$X(t)-0.29294\,X(t-1)-0.11846\,X(t-2) = \eta(t) \tag{5-18}$$

(5-19) によって蘭陽渓の $X(t)$ より $\eta(t)$ を求め，$\eta(t)$ の分散を計算してみると $S_\eta^2=0.8871$ とな

った。$S_Y^2=1$ であるから，実測の K^2 は

$$K_{ob}^2 = 0.8771$$

である。一方計算で求めた K^2 は (5-17) に示したように $K_{cal}^2=0.8823$ である。若し2次の Markov 過程の適用が正しければ $K_{cal}^2/K_{ob}^2=1$ となるはずであるが，この計算では

$$K_{cal}^2/K_{ob}^2 = 1.0059$$

となり誤差は 0.6% であった。これに対し1次の Markov 過程を適用した例では $K_{ob}^2=0.8925$, $K_{cal}^2=0.8896$ であるから

$$K_{cal}^2/K_{ob}^2 = 0.9968$$

となり誤差は 0.3% であった。

予測式は (4-28) に (5-15) および (5-16) の a_k および b_k を代入すれば (5-19) および (5-20) になる。

$$\begin{aligned} E\left\{X_c(t+1)\right\} &= 0.29294\, y_t + 0.20427\, y_{t-1} \\ &\quad + 0.09454\, y_{t-2} + 0.05189\, y_{t-3} \\ &\quad + 0.02640\, y_{t-4} + 0.01388\, y_{t-5} \\ &\quad + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{5-19}$$

$$y_t = x_t - 0.29294\, x_{t-1} - 0.11846\, x_{t-2} \tag{5-20}$$

この予測式による外挿値に関する実現値の分散は (4-31) および (4-32) により

$$\begin{aligned} E\left[\left\{X_c(t+1)-E(X_c(t+1))\right\}^2\right] &= S^2(\eta) \\ &= (1+a_1r_1+a_2r_2)\, S_Y^2 = 0.8771 \end{aligned} \tag{5-21}$$

2次の Markov 過程を適用すれば，1次の Markov 過程を適用した場合より予測の精度は理論上約 1% 向上することになる。

2次の Markov 過程を適用した場合の理論コレログラムは (4-15) によって求められる。(4-15) で $k=3, 4, 5\cdots$ とおき a_1, a_2 および r_1, r_2 の値を代入すれば

$$\left.\begin{aligned} r_3 &= -a_1r_2 - a_2r_1 = 0.1026 \\ r_4 &= -a_1r_3 - a_2r_2 = 0.0556 \\ r_5 &= -a_1r_4 - a_2r_3 = 0.0284 \end{aligned}\right\} \tag{5-22}$$

r_k の実測値と理論値を比較して表 5-5 に示した。

表 5—5 2次 Markov 過程における相関係数

相関係数	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
実測値	0.3323	0.2158	0.1580	0.0522	−0.0311
理論値	—	—	0.1026	0.0556	0.0284

1次の Markov 過程の場合には $r_k=(r_1)^k$ であるが，2次の Markov 過程によれば r_3, r_4 などは実測値と理論値はかなりよく一致している。したがって2次の Markov 過程による解析効果 $1-K^2=0.12$ および確率変動過程中に含まれる純偶発成分の分散 $S^2(\eta)=0.88$ という数値はかなり厳密なものであり，蘭陽渓月流量の本質を示すものと考えられる。

5.4 移動平均過程としての確率変動成分の解析

移動平均過程として確率変動成分を解析するにはまず (4-33) の項数を決定しなければならない。図5-3の $Y(t)$ のコレログラムで r_3 までは信頼限界線の上にあるが r_4 は信頼限界の中に入るので (4-33) で $h=3$ ととる。したがって (4-33) は (5-23) になる。

$$r_3x^3+r_2x^2+r_1x+1+\frac{r_1}{x}+\frac{r_2}{x^2}+\frac{r_3}{x^3}=0 \tag{5-23}$$

ここに $r_1=0.3323$

$r_2=0.2158$

$r_3=0.1580$

この6次式の根は（北大計算センター HIPAC 103 サブルーテンによる）(5-24) である。

$$\left.\begin{array}{ll} 1),\ 2) & 0.1209902435\pm j(0.56472410391) \\ 3) & -0.54550525129 \\ 4) & -1.833161629212 \\ 5),\ 6) & 0.37932366951\pm j(1.6854041205) \end{array}\right\} \tag{5-24}$$

ただし $j=\sqrt{-1}$

この6根のうち単位円の内部に入るものは 1), 2) および 3) の3根である。(4-34) にこの根を代入すれば (5-25) が得られる。

$$\begin{aligned}&(x+0.5455)\,(x-0.1271-0.5647\,j)\,(x-0.1271+0.5647\,j)\\&\quad\equiv x^2+0.2913\,x^2+0.1904\,x+0.1795\end{aligned} \tag{5-25}$$

したがって b_k は次のように定まる。

$$\left.\begin{array}{l} b_1=0.2913 \\ b_2=0.1904 \\ b_3=0.1795 \end{array}\right\} \tag{5-26}$$

(4-36) で $k=1, 2, 3\cdots$ と置いて a_k を求める。

$$\left.\begin{array}{l} a_1=-b_1=-0.2913 \\ a_2=-b_1a_1-b_2=-0.1055 \\ a_3=-b_1a_2-b_2a_1-b_3=-0.0933 \\ a_4=-b_1a_3-b_2a_2-b_3a_1=+0.0996 \\ a_5=-b_1a_4-b_2a_3-b_3a_2=-0.0077 \\ a_6=-b_1a_5-b_2a_4-a_3b_3=+0.0001 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{5-27}$$

a_k は理論が示す通り $\lim_{k\to\infty}|a_k|=0$ となり，(4-11) の右辺が収束することがわかる。

(4-37) によって K^2 を求めると

$$K^2 \equiv S^2(\eta)/S^2(X) = 1/(1+b_1^2+b_2^2+b_3^2) = 0.8670 \tag{5-28}$$

となった。この値は2次の Markov 過程の場合よりさらに約1% 小さくなっている。

本文では初め純偶発現象として確率変動成分を扱い，次いで1次 Markov 過程，2次 Markov 過程，移動平均過程として解析を進めてきた。本例の場合の移動平均過程は (5-27) にみられるように6次の Markov 過程に相当している。この取扱いをコレログラムでみるならば，純偶発変動は $r_k=0$, $k>1$ とした近似であり，1次 Markov 過程は計算に r_1 の実測値1個を使用したから r_1 を実測値にあわせた近似であり，2次の Markov 過程は r_1, r_2 を実測値に合わせた場合であり，移動平均過程は r_1, r_2, r_3 まで実測値にあわせた近似になっている。従って計算の精度を順に高めたことになるが，それぞれの解析における純偶発成分の分散の大きさをしらべると表5-6のようになる。

計算の精密度を高めるにつれて，順次系列中に含まれる純偶発成分の分散が小さくなることがわかる。

表5—6 解析方法と純偶発成分の分散の大きさ

解析方法	純偶発変動 r_0	1次 Markov r_0, r_1	2次 Markov r_0, r_1, r_2	移動平均 r_0, r_1, r_2, r_3
$S^2(n)$	1.0000	0.8896	0.8823	0.8670

予測式は (4-38), (4-39) で与えられるが例えば $k=1$ とすれば (5-29) が得られる。

$$\left.\begin{aligned} E\left\{X_c(t+1)\right\} &= 0.2913\,y_t + 0.1904\,y_{t-1} + 0.1795\,y_{t-2} \\ y_t &= x_t - 0.2913\,x_{t-1} - 0.1055\,x_{t-2} - 0.0933\,x_{t-3} \\ &\quad + 0.0996\,x_{t-4} - 0.0077\,x_{t-5} + 0.0001\,x_{t-6} \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

この予測式を用いた場合の予測値に関する実現値の分散は (5-30) で与えられる。

$$E\left[\left\{X_c(t+1)-E(X_c(t+1))\right\}^2\right] = S^2(\eta) = 0.8670 \tag{5-30}$$

以上の解析により蘭陽渓の月流量時系列では，確率変動成分に時系列理論を適用することにより，予測の精度を純偶発現象と考えるよりも13% 向上させることができ，またこれが統計理論上期待できる限界であることが結論される。

参考文献

1) Chow, V. T. and others: Statistical and Probability Analysis of Hydrologic Data,「Handbook of Applied Hydrology」Sect. 8, McGraw-Hill.
2) 堀川 明: ランダム変動の解析，共立出版，1964.
3) 角屋 睦: 水文統計学，水工学シリーズ 64-02，土木学会水理委員会，1967年7月.

4) 岸 力：水文量の時系列としての特性とその解析法，土木学会北海道支部講習会テキスト，1968年3月.
5) Kishi, T.: Use of log-Transformation to the Analytical Precipitation of River Run-off, Proceedings, Int., Hydrology Symp. Colorado State University, Sept., 1967.
6) 宮脇一男：雑音解析，朝倉書店，1964.
7) 小河原正己；時系列論とその応用，日本応用力学会編「応用統計学」第7章，金原出版，1966年.
8) Ogawara, M. and others: Stochastic Limits for Maximum Possible Amount of Precipitation, Met. Geo., Vol. 5, 1954.
9) 大久保・他：発電用河川流量の研究，土木学会論文集61号（別冊），1959，3月.
10) Papoulis, A.: Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw-Hill 1965.
11) Quimpo, R. G.: Stochastic Model of Daily River Flow Sequences, Hydrology Papers, Colorado State University, Feb., 1967.
12) Quimpo, R. G. and Yevdjevich, V. M.: Stochastic Description of Daily River Flows, Proceedings, Int. Hydrology Symp., Colorado State University, Sept., 1967.
13) Roesner, L. A. and Yevdjevich, V. M.: Mathematical Models for time series of Monthly Precipitation and Monthly Run off. Hydrology Papers, Colorado State University, 15, Oct., 1966.