圧力勾配を伴う流動場における軸対称後流の一特性

福 迫 尚 一 郎*
木 谷 勝*
有 江 幹 男*

(昭和43年11月30日受理)

A Contribution to the Spreading of an Axisymmetric Wake with Streamwise Pressure Gradient

Shoichiro FUKUSAKO
Masaru KIYA
Mikio ARIE

(Received November 30, 1968)

Abstract

A Similar solution of axisymmetric laminar or turbulent wake of a body placed in a flow with streamwise pressure gradient was obtained on the assumption that the velocity outside the wake is proportional to x_1^p.

It was shown that the width of the laminar and turbulent wakes increases in proportion to $x_1^{(1-p)/2}$, and $x_1^{(1-3p)/3}$, respectively. On the other hand, the maximum velocity-defect in the wake decreases in proportion to $x_1^{-(1+p)}$ and $x_1^{-2/3}$ in laminar and turbulent wakes, respectively.

However, the velocity profile in the wake shows an equivalent form with that in the wake without a pressure gradient for both laminar and turbulent cases.

1. 緒　　言

狭まりおよび拡がり流れのような圧力勾配を伴う流れは流体工学においてしばしば見られるものである。かかる流れの中におかれた単一物体の後流に関しては，流れが二次元の場合，Yasuhara & Goto[1]らの研究がある。最近，Kuo & Baldwin[2]らは，楕円板の乱流後流に関して実験を行ない，物体よりはるか後方の後流が軸対称の形状になることを確かめている。したがって，軸対称に近い三次元物体のはるか後方の後流もほとんどの場合，軸対称性を仮定して論ずることができるものと期待される。

本報告は圧力勾配を伴った非圧縮性流体の流動場における軸対称定常後流流れを層流および乱流の場合について取り扱い，相似解の存在を仮定して後流の速度分布，垂直方向幅および

* 機械工学科　流体工学第一講座

軸心上の速度欠損量を求めたものである。一例として，後流外部の速度が x_1^p，すなわち圧力が x_1^{2p} に比例して変化するとき，後流の幅および軸心上の速度欠損量が x_1 のいかなる関数となるべきかを明らかにしてある。これらの解は，圧力勾配がないときの Schlichting[5] の解を $p=0$ なる特別の場合として含んでいる。

記　　号

l:	Prandtl の混合距離	D_H, D_V:	定　　数
p:	任意定数 ($\neq 2/3$)	K_1:	比例定数
$u, \dot{\bar{u}}$:	速度欠損量	U_1:	後流外部平均速度
u_1, u_2:	軸方向および半径方向速度成分	X_1:	代表長さ
$\bar{u}_1, \bar{u}_2$:	軸方向および半径方向時間平均速度成分	ν:	動粘性係数
x_1, x_2:	円筒極座標	ρ:	密　　度
C_h, C_H, C_V:	定　　数	τ:	剪断応力
		A_1:	比例定数

2. 層流後流

後流内の流れにおいては，主流方向の流れの変化が，これと直角方向の変化に比較して極めて小さいため十分な精度を持って境界層近似を適用することができる。従来の後流に関する解析はほとんどこの線に沿って行なわれており，圧力勾配のある後流の問題も境界層方程式にもとづいて論ずることが可能なものと考えられる。

軸対称定常層流流れに対する境界層方程式および連続の方程式は，

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=U_1\frac{dU_1}{dx_1}+\frac{\nu}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2u_2)=0 \tag{2}$$

である。ただし，x_1 は主流方向，x_2 はこれと直角方向の座標を意味する。

いま後流内の速度欠損量 u を

$$u(x_1,x_2)=U_1(x_1)-u_1(x_1,x_2) \tag{3}$$

なる形で導入し，u は U_1 に比較して極めて小さくその二次以上の高次の項は無視しうるものと仮定する。したがって (3) 式を (1) および (2) 式に代入すれば次式が得られる。

$$U_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{dU_1}{dx_1}+u_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\nu}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2U_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2u_2)=0 \tag{5}$$

U_1 は x_1 のみの関数であるから，(5) 式は

$$x_2=0 \ : \ u_2=0$$

なる境界条件のもとに積分できて

$$u_2=-\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_1}x_2 \tag{6}$$

となる。さらに (6) 式を (4) 式に代入すると，

$$U_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{dU_1}{dx_1}-\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_1}x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=\nu\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \tag{7}$$

となる。いま新らしい変数 ξ を

$$\xi=\frac{x_2}{h(x_1)} \tag{8}$$

によって定義し，速度欠損量 u が

$$u(x_1,\xi)=v(x_1)F(\xi) \tag{9}$$

なる形に書けるものとする。ただし，$v(x_1)$ は後流の軸心上の速度欠損量の尺度であり，$h(x_1)$ は後流の幅の尺度である。

(8) および (9) 式を (7) 式に代入すると

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dF}{d\xi}+\left(\frac{U_1h}{\nu}\frac{dh}{dx_1}+\frac{1}{2}\frac{h^2}{\nu}\frac{dU_1}{dx_1}\right)\xi\frac{dF}{d\xi}-\frac{h^2}{\nu v}\frac{d}{dx_1}(U_1v)F=0 \tag{10}$$

となる。(10) 式が ξ に関する常微分方程式であるためには，(10) 式の左辺第 3 項および第 4 項の係数は定数でなければならない。しかるに，これらの定数はどのように選んでも一般性が失われることはないから，いま

$$\frac{U_1h}{\nu}\frac{dh}{dx_1}+\frac{1}{2}\frac{h^2}{\nu}\frac{dU_1}{dx_1}=1 \tag{11}$$

$$\frac{h^2}{\nu v}\frac{d}{dx_1}(U_1v)=-2 \tag{12}$$

とおくと，(10) 式は

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}+\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\frac{dF}{d\xi}+2F=0 \tag{13}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}\xi&=0 \ : \ \frac{dF}{d\xi}=0\\ \xi&=\infty \ : \ F(\xi)=0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

である。境界条件 (14) 式を満足する (13) 式の解は

$$F(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \tag{15}$$

である。(11) および (12) 式を

$$x_1 = x_0 \,:\, U_1(x) = U_0\,, \quad h(x_1) = h_0\,, \quad v(x_1) = v_0 \tag{16}$$

なる境界条件のもとに積分すると [Prabhu[3]]

$$h(x_1) = \left(\frac{U_0}{U_1}\right)^{1/2} \left[2\nu \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx_1}{U_0} + h_0^2\right]^{1/2} \tag{17}$$

$$v(x_1) = v_0 \left(\frac{U_0}{U_1}\right) \exp\left[-2\nu \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{U_0} \left\{\int_{x_0}^{x_1} \frac{2\nu}{U_0}\, dx_1 + h_0^2\right\}^{-1} dx_1\right] \tag{18}$$

となる。いま後流外部の平均速度 U_1 が x_1^p に比例するものとして

$$U_1(x_1) = U_0 \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^p \tag{19}$$

とおく。(19) 式を (17) 式および (18) 式に代入して定数項が消えるように積分の下限 x_0 を選ぶと

$$h(x_1) = C_h h_0 \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{(1-p)/2} \tag{20}$$

$$v(x_1) = v_0 \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{-(1+p)} \tag{21}$$

となる。ただし

$$C_h = \left[\frac{2\nu X_1}{U_0 h_0^2}\right]^{1/2} \tag{22}$$

である。したがって，軸対称層流後流の幅は $x_1^{(1-p)/2}$ に，軸心上の速度欠損量は $x_1^{-(1+p)}$ に比例して変化することがわかる。

3. 乱流後流

軸対称，非圧縮性定常後流流れに対する基礎方程式は，一般に

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = U_1 \frac{dU_1}{dx_1} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 \tau) \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2 \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 \bar{u}_2) = 0 \tag{24}$$

と書ける。ただし，$\bar{u}_1$ および $\bar{u}_2$ は軸方向および半径方向の平均速度成分，τ は剪断応力である。いま粘性項が無視できるような十分大きな Reynolds 数の流れを取り扱うものとすれば，剪断応力は

$$\tau = -\rho\, \overline{u_1' u_2'}$$

となる。したがって，$\overline{u_1' u_2'}$ の関数形が既知であるか，あるいはその平均速度との関数関係が既知であれば (23) および (24) 式は解析的に取り扱うことが可能である。いま Prandtl の混合距離理論を適用すると，剪断応力 τ は次のように表わされる。

$$\tau=\rho\varepsilon\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$$

ただし，ε は渦拡散係数であって，圧力勾配のない後流の場合下記の二つの形が採用されており，実測値ともよく一致する結果を与える。

$$\varepsilon=K_1 H(x_1)\,V(x_1) \tag{25}$$

$$\varepsilon=l^2\left|\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\right| \tag{26}$$

したがって，圧力勾配を伴った後流の場合にも，これらの仮定を適用して解を求めることが適当であると考えられる。

3.1 $\varepsilon=K_1 H(x_1)\,V(x_1)$ の場合

$V(x_1)$ は後流軸心上の速度欠損量の尺度であり，$H(x_1)$ は後流幅の尺度である。また K_1 は比例定数である。

いま速度欠損量 $\bar{u}$ を

$$\bar{u}(x_1,x_2)=U_1(x_1)-\bar{u}_1(x_1,x_2) \tag{27}$$

なる形で導入し，(27) 式を (23) および (24) 式に代入し $\bar{u}$ の二次以上の高次の項を無視すると，

$$U_1\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}+\bar{u}\frac{dU_1}{dx_1}-\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_1}x_2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}=K_1HV\frac{1}{x_2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}+K_1HV\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2} \tag{28}$$

が得られる。層流の場合と同ように

$$\bar{u}(x_1,\eta)=V(x_1)\,F(\eta) \tag{29}$$

$$\eta=\frac{x_2}{H(x_1)} \tag{30}$$

とおく。ただし，$F(\eta)$ は速度欠損量分布であり，η は相似変数である。

(29) および (30) 式を (28) 式に代入すると

$$\frac{d^2F}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta}+\left(\frac{U_1}{K_1V}\frac{dH}{dx_1}+\frac{1}{2}\frac{H}{K_1V}\frac{dU_1}{dx_1}\right)\eta\frac{dF}{d\eta}-\frac{H}{K_1V^2}\frac{d}{dx_1}(U_1V)\,F=0 \tag{31}$$

となる。相似解が存在するためには，(31) 式は η に関する常微分方程式でなければならない。したがって，(31) 式の左辺第 3 項および第 4 項は定数でなければならない。しかるに，これらの定数はどのように選んでも一般性が失われることはないから

$$\frac{U_1}{K_1V}\frac{dH}{dx_1}+\frac{1}{2}\frac{H}{K_1V}\frac{dU_1}{dx_1}=1 \tag{32}$$

$$\frac{H}{K_1V^2}\frac{d}{dx_1}(U_1V)=-2 \tag{33}$$

とおくと，(31) 式は

$$\frac{d^2F}{d\eta^2}+\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\frac{dF}{d\eta}+2F=0 \tag{34}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}\eta=0\ &:\ \frac{dF}{d\eta}=0\\ \eta=\infty\ &:\ F(\eta)=0\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

である。(35)式の境界条件を満足する(36)式の解は

$$F(\eta)=\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) \tag{36}$$

であって，これは層流の場合と同じ形である。

(32)および(33)式を境界条件

$$x_1=x_0\ :\ U_1(x_1)=U_0\,,\quad H(x_1)=H_0\,,\quad V(x_1)=V_0 \tag{37}$$

のもとに解くと [Prabhu[3)]]

$$H(x_1)=\left(\frac{U_0}{U_1}\right)^{1/2}\left[3K_1U_0^{1/2}H_0^2V_0\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{U_1}\right)^{3/2}dx_1+H_0^3\right]^{1/3} \tag{38}$$

$$V(x_1)=\left(\frac{U_0}{U_1}\right)\left[\frac{3K_1}{H_0}\left(\frac{U_0}{V_0}\right)^{1/2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{U_1}\right)^{3/2}dx_1+V_0^{-3/2}\right]^{-2/3} \tag{39}$$

となる。(19)式を(38)および(39)式に代入し，[　]内の定数項 H_0^3 および $V_0^{-3/2}$ が消えるように積分の下限 x_0 を選ぶものとすれば

$$H(x_1)=C_HH_0\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{(1-3p)/3} \tag{40}$$

$$V(x_1)=C_VV_0\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{-2/3} \tag{41}$$

となる。ただし，C_H, C_V は定数であって

$$C_H=\left[\frac{6K_1}{|2-3p|}\,\frac{V_0X_1}{U_0H_0}\right]^{1/3}\qquad (p\neq 2/3) \tag{42}$$

$$C_V=\left[\frac{6K_1}{|2-3p|}\,\frac{V_0X_1}{U_0H_0}\right]\qquad (p\neq 2/3) \tag{43}$$

である。後流の幅は $x_1^{(1-p)/3}$ に比例して変化するが，軸心上の速度欠損量が圧力勾配の影響を受けないという結果は興味ある事実である。

3.2　$\varepsilon=l^2|\partial\bar{u}_1/\partial x_2|$ の場合

l は Prandtl の混合距離であって，x_1 のみの関数であるものとすれば，x_2 の正の値に対して，常に $\partial\bar{u}_1/\partial x_2>0$ であるから

$$\varepsilon=l^2\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2}$$

とおくことができる。したがって，(28)式に相当する方程式は，この場合

$$U_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}+\bar{u}\frac{dU_1}{dx_1}-\frac{1}{2}\frac{dU_1}{dx_1}x_2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}=-\frac{l^2}{x_2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}\right)^2-2l^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2} \tag{44}$$

となる。(44)式に次のごとき相似解を仮定する。

$$\bar{u}(x_1,\zeta)=V(x_1)F(\zeta) \tag{45}$$

$$\zeta=\frac{x_2}{H(x_1)} \tag{46}$$

(45)および(46)式を(44)式に代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2\\&\quad-\frac{H^2}{2l^2V}\left(U_1\frac{dH}{dx_1}+\frac{1}{2}H\frac{dU_1}{dx_1}\right)\zeta\frac{dF}{d\zeta}+\frac{H^3}{2l^2V^2}\frac{d}{dx_1}(U_1V)F=0\end{aligned} \tag{47}$$

となり，前述した相似解存在の条件から

$$\frac{H^2}{2l^2V}\left(U_1\frac{dH}{dx_1}+\frac{1}{2}H\frac{dU_1}{dx_1}\right)=1 \tag{47}$$

$$\frac{H^3}{2l^2V^2}\frac{d}{dx_1}(U_1V)=-2 \tag{49}$$

とおくと，(47)式は

$$\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2-\zeta\frac{dF}{d\zeta}-2F=0 \tag{50}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=0\ :\ \frac{dF}{d\zeta}=0\\&\zeta=1\ ;\ F(\zeta)=0\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

である。境界条件(51)式を満足する(50)式の解は

$$F(\zeta)=\frac{2}{9}(1-\zeta^{3/2})^2 \tag{52}$$

であり，圧力勾配のない後流の解と同一である。

Prandtl の混合距離 l を後流の幅に比例するものと仮定して

$$l(x_1)=\Lambda_1H(x_1) \tag{53}$$

とおく。ただし，Λ_1 は実験によって決められるべき定数である。(53)式を(48)および(49)式に代入し，境界条件(37)式のもとに積分すると

$$H(x_1)=\left(\frac{U_0}{U_1}\right)^{1/2}\left[6\Lambda_1^2V_0H_0U_0^{1/2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{U_1}\right)^{3/2}dx_1+H_0^3\right]^{1/3} \tag{54}$$

$$V(x_1)=\left(\frac{U_0}{U_1}\right)\left[4\Lambda_1^2U_0^2\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{U_1^2H}\right)dx_1+\frac{1}{V_0}\right]^{-1} \tag{55}$$

となる。後流外部の平均速度が x_1^p に比例するときは，これらの両式は

$$H(x_1)=D_H H_0\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{(1-3p)/3} \tag{56}$$

$$V(x_1)=D_V V_0\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^{-2/3} \tag{57}$$

となる。ただし，D_H, D_V は定数であって

$$D_H=\left[\frac{12\Lambda_1^2}{|2-3p|}\frac{V_0X_1}{U_0H_0}\right]^{1/3} \qquad (p\neq 2/3) \tag{58}$$

$$D_V=\left[\frac{|2-3p|}{12\Lambda_1^2}\frac{U_0H_0}{V_0X_1}\right] \qquad (p\neq 2/3) \tag{59}$$

である。H および V の x_1 に対する関係はこれら二つの仮定において完全に一致している。また，(36) 式および (52) 式で与えられる速度欠損量分布はほとんど同一の形状を与える。$p=0$ のとき，(56) および (57) 式は

$$H(x_1)\sim x_1^{1/3}, \quad V(x_1)\sim x_1^{-2/3}$$

となり，圧力勾配がない場合の後流の解 [Schlichting[5]] と一致している。

4. 結　　論

圧力勾配を伴う軸対称物体の後流に関して境界層理論にもとづく理論的解析を行ない，次の結果を得た。

(1) 層流および乱流後流の速度欠損量分布は圧力勾配に無関係であって，層流の場合 exp $\{-(1/2)\xi^2\}$，乱流の場合 exp $\{-(1/2)\eta^2\}$ または $(2/9)(1-\zeta^{3/2})^2$ である。

(2) 後流外部の平均速度が x_1^p に比例して変化する場合，後流の幅は層流のとき $x_1^{(1-p)/2}$，乱流のとき $x_1^{(1-3p)/3}$ に比例して変化する。一方，後流の軸心上の速度欠損量は，層流のとき $x_1^{-(1+p)}$，乱流のとき $x_1^{-2/3}$ に比例して変化する。したがって乱流後流の軸心上の速度欠損量は圧力勾配の影響を受けない。

参 考 文 献

1) Yasuhara, M. and Goto, M.: Memoirs of Faculty of Engineering, Nagoya University, 15, 18 (1963), 81.
2) Kuo, Y. H. and Baldwin, L. V.: A.I.A.A. Journal, **4** (1966), 1566.
3) Prabhu, A.: A.I.A.A. Journal, **4** (1966), 925.
4) Mellor, G. L.: A.I.A.A. Journal, **3** (1965), 975.
5) Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, 4ed., McGraw-Hill Book Co., Inc. (1960), 488.