HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	垂直上向きに噴出される加熱された乱流噴流の速度分布および温度分布
Author(s)	福迫，尚一郎；木谷，勝；有江，幹男
Citation	北海道大學工學部研究報告，54，143-153
Issue Date	1969-10-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40954
Type	departmental bulletin paper
File Information	54_143-154.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

垂直上向きに噴出される加熱された乱流噴流の速度分布および温度分布

福迫尚一郎*
木谷勝*
有江幹男*

(昭和44年5月1日受理)

Velocity and Temperature Distributions in a Heated Turbulent Vertical Jet

Shoichiro FUKUSAKO
Masaru KIYA
Mikio ARIE

(Received May 1, 1969)

Abstract

A steady, turbulent flow in a heated vertically ascending jet is considered within the framework of the boundary layer theory by taking the effect of buoyancy caused by the temperature difference into account. By assuming a similar velocity and temperature profiles, a two-dimensional and an axisymmetric case were treated. The buoyancy was found to produce a considerable influence on the flow in the vertical jet.

By applying Prandtl's mixing length hypothesis, $\overline{Lv}=kB(U_{\max}-U_{\min})$, it was found from the present analysis that the width of the heated vertical jet increases in proportion to the streamwise distance, for both two-dimensional and axisymmetric cases. The maximum temperature on the axis of the jet is proportional to x^{-1} (two-dimensional) and to $x^{-5/3}$ (axisymmetric). The maximum velocity on the jet axis was found to change in proportion to x^{0} (two-dimensional) and to $x^{-1/3}$ (axisymmetric). These results of the development of the vertical jets are equivalent to those obtained by Schmidt who applied Prandtl's other mixing length hypothesis, $\overline{Lv}=l^2|dU/dy|$.

In the two-dimensional case, the velocity profile is almost the same as that of Schmidt, but the temperature profile was considerably different. In the axisymmetric case, on the other hand, the situation was reversed. The temperature profile obtained by the present analysis for the axisymmetric jet represents the experimental data more closely than the analytical results of Schmidt.

目　次

1. 緒　論 …… 144
記　号 …… 144

* 機械工学科　流体工学第一講座

2. 二次元乱流噴流 …… 145
2. 1 基礎方程式 …… 145
2. 2 相似解 …… 146
2. 3 計算結果 …… 149
3. 軸対称乱流噴流 …… 149
3. 1 基礎方程式 …… 149
3. 2 相似解 …… 150
3. 3 計算結果および実験値 [Schmidt[3]] との比較 …… 151
4. 結論 …… 153
参考文献 …… 153

1. 緒言

加熱された流体が，それより低い温度の静止流体中に垂直上向きに噴出される場合，噴流内の流体は，温度差による浮力を獲得して拡散して行くので，噴流の特性，たとえば，拡がり幅，速度分布および温度分布が温度差のない場合とは当然異なってくるものと思われる。したがって，かかる噴流の解析は，化学工学等の分野に多く見られる熱噴流の拡散機構，伝熱機構および周囲にある流体の entrainment 等に多くの示唆を与えるものと期待されるから，物理的にはもちろん，工学的にも非常に重要な問題である。

最近，Brand & Lahey[1] は，かかる噴流の問題を層流の場合について取り扱い，相似解を得ている。乱流の場合については，すでに Schmidt[2),3)] が Prandtl の渦粘性係数に関する仮定 $\overline{Lv}=l^2|dU/dy|$ を用い，相似解の存在を仮定して取り扱っているが，速度分布が軸心上で kink を有するなど，物理的に不自然な面がないとは言えない。

本論文は，噴流は完全に発達した乱流であるものと仮定して，運動の方程式およびエネルギーの方程式において粘性の項および分子拡散の項を無視し，さらに渦粘性係数を Prandtl[4] の仮定，$\overline{Lv}=kB(U_{max}-U_{min})$ にもとずいて導入し，相似解を求めたものである。解は，二次元および軸対称噴流の二つの場合について求めてある。なお，乱流 Prandtl 数は 1 とおいてある。

記号

g: 重力の加速度
k: 比例定数
l: Prandtl の混合距離
L: 代表長さ
T: 噴流内の温度
T_∞: 静止流体の温度
U: X 方向平均速度成分
V: Y 方向平均速度成分
X, Y: 直交座標（二次元流のとき）
円筒座標（軸対称流のとき）
β: 体積膨脹係数
κ: ν/σ
ν: 動粘性係数
σ: Prandtl 数
Δ: 比例定数

2. 二次元乱流噴流

2.1 基礎方程式

加熱された二次元噴流の基礎方程式は，連続の方程式，運動の方程式，およびエネルギの方程式であって，

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{2.1}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\nu\frac{\partial U}{\partial Y}+\overline{Lv}\frac{\partial U}{\partial Y}\right\}+g\beta(T-T_\infty) \tag{2.2}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\kappa\frac{\partial T}{\partial Y}+\overline{Lv}\frac{\partial T}{\partial Y}\right\} \tag{2.3}$$

である [Goldstein[5]]。ただし，X は噴流の主流方向，Y はそれと直角方向の座標であって，U および V は，それぞれ対応する方向の時間的平均速度である。また，T は噴流の任意点における温度，T_∞ は周囲流体の温度，β は体積膨脹係数，g は重力の加速度である。

噴流内の流れが完全に発達した乱流であるときは，運動の方程式およびエネルギの方程式において，それぞれ粘性項および分子拡散項を無視することができる [Goldstein[5]]。したがって，(2.1), (2.2) および (2.3) 式は

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{2.4}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\overline{Lv}\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+g\beta(T-T_\infty) \tag{2.5}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(\overline{Lv}\frac{\partial T}{\partial Y}\right) \tag{2.6}$$

となる。$\overline{Lv}$ は渦粘性係数であるが，Prandtl[4] の仮定にしたがって

$$\overline{Lv}=kB(U_{\max}-U_{\min}) \tag{2.7}$$

とおくこととする。ただし，k は定数であり，B は噴流の幅を表わす尺度，$U_{\max}$, $U_{\min}$ は噴流内の最大速度，最小速度である。

いま簡単のために，無次元変数

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{U}{U_0}\\ v&=\frac{V}{U_0\sqrt{\Delta}}\\ x&=\frac{X}{L}\\ y&=\frac{Y}{L\sqrt{\Delta}}\\ \theta&=\frac{T-T_\infty}{T_\infty}\frac{L}{U_\infty^2}g\beta T_\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

を導入すれば，噴流の幅および最大速度と最小速度の差は

$$\left.\begin{aligned} &B\sim Lx^{-m} \\ &U_{\max}-U_{\min}\sim U_0x^{\alpha+m} \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

とおくことができる。ただし，α, m は後に決定される定数である。したがって，Δ を実験によって決められるべき定数とすれば，結局，(2.7) 式は

$$kB(U_{\max}-U_{\mathrm{mim}})=\Delta LU_0x^{\alpha} \tag{2.10}$$

とおくことができる。(2.7) および (2.9) 式を，(2.4), (2.5) および (2.6) 式に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.11}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\theta \tag{2.12}$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \tag{2.13}$$

が得られる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &y=0\ ;\quad v=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \theta}{\partial y}=0 \\ &y=\infty\ ;\quad u=\theta=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

である。

2. 2 相 似 解

(2.12) および (2.13) 式に相似解が存在するものと仮定すれば，流線関数および θ はつぎのように書くことができる。

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x,\xi)=x^{\alpha}F(\xi) \\ &\theta(x,\xi)=x^{n}H(\xi) \\ &\xi=yx^{m} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

したがって，x および y 方向の速度成分は

$$\left.\begin{aligned} &u=\frac{\partial \psi}{\partial y}=x^{\alpha+m}\frac{dF}{d\xi} \\ &v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}=-x^{\alpha-1}\left(\alpha F+m\xi\frac{dF}{d\xi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

で与えられる。

(2.15) 式を (2.12) および (2.13) 式に代入し，それらの方程式が ξ に関する常微分方程式となるべきことから

$$(\alpha+m)\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2-\alpha F(\xi)\frac{d^2F}{d\xi^2}=\frac{d^3F}{d\xi^3}+H(\xi) \tag{2.17}$$

$$nH(\xi)\frac{dF}{d\xi}-\alpha F(\xi)\frac{dH}{d\xi}=\frac{d^2H}{d\xi^2} \tag{2.18}$$

および

$$m+1=0,\quad n+1=2(\alpha+m) \tag{2.19}$$

が得られる。ここで，決定すべき未知数は，α，m および n の3個であるから，(2.19) 式からただちに定数を決定することはできない。しかるに噴流内の任意断面において流体の有しているエネルギは変化しないから，(2.18) 式を ξ に関して，0から ∞ まで積分すると

$$(n+\alpha)\int_0^\infty H(\xi)\frac{dF}{d\xi}\,d\xi=0 \tag{2.20}$$

となる。$H(\xi)$ および $dF/d\xi$ は常に正の値を取るものと考えられるから，(2.20) 式が成立するためには

$$n+\alpha=0 \tag{2.21}$$

でなければならない。したがって，ただちに (2.19) および (2.21) 式から

$$\alpha=1,\quad m=-1,\quad n=-1 \tag{2.22}$$

となり，(2.15) および (2.16) 式は

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x,\xi)=xF(\xi)\\&\theta(x,\xi)=x^{-1}H(\xi)\\&\xi=yx^{-1}\end{aligned}\right\}$$
$$u=\frac{dF}{d\xi} \tag{2.23}$$
$$v=\xi\frac{dF}{d\xi}-F(\xi)$$

となる。したがって，噴流の幅は x に比例して拡がり，主流速度は x^0 に，温度は x^{-1} に比例して減少することとなり，これらの結果はいずれも Schmidt[2] の解と一致している。なお，層流の場合には噴流の幅は $x^{2/5}$ に比例して拡がり，速度 u は $x^{1/5}$，温度は $x^{-3/5}$ にそれぞれ比例して変化するものである [Brand & Lahey[1]]。

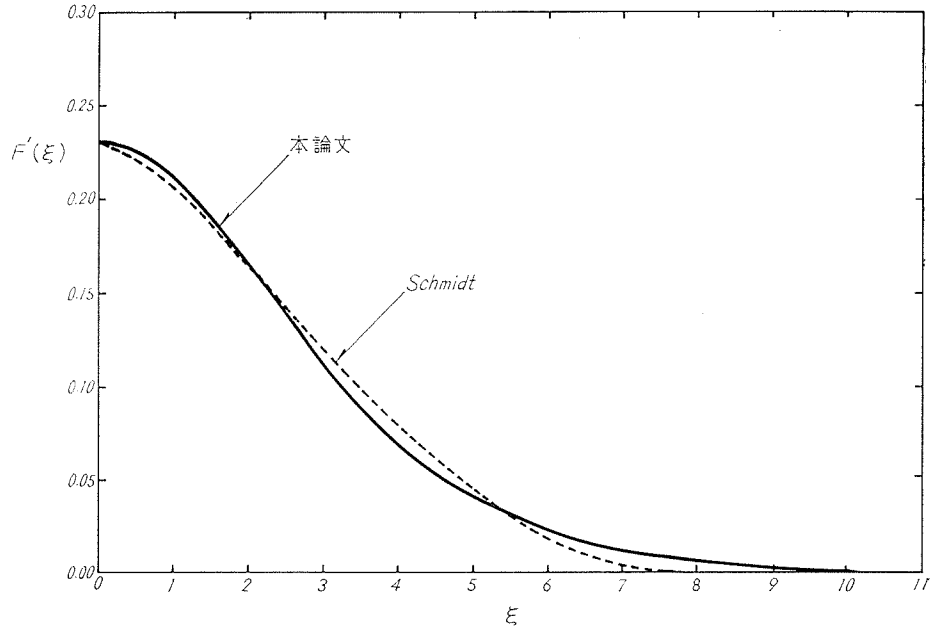
(2.22) 式を代入すれば (2.17) および (2.18) 式は

$$\frac{d^3F}{d\xi^3}+F(\xi)\frac{dF}{d\xi}+H(\xi)=0 \tag{2.25}$$

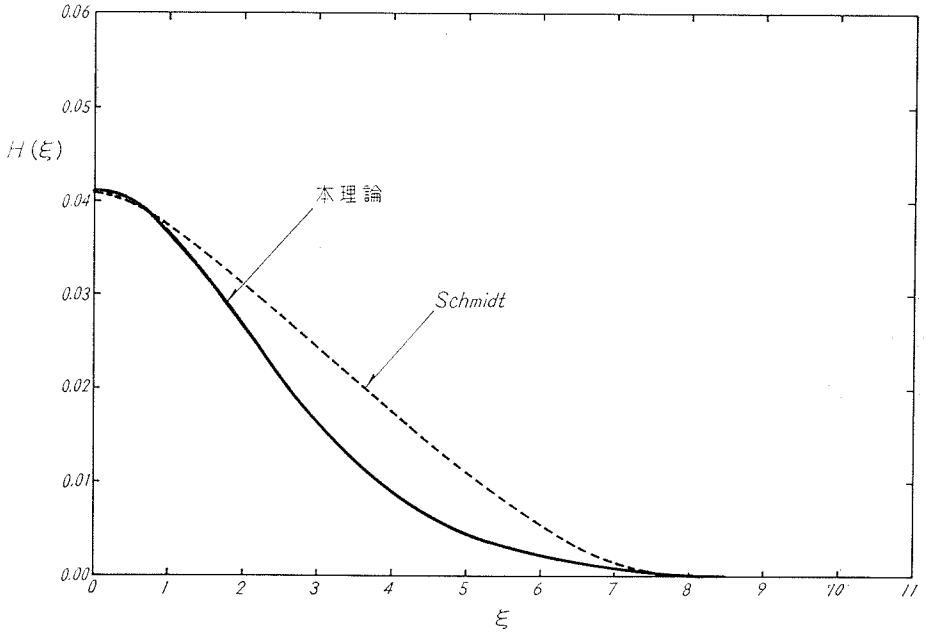
$$\frac{dH}{d\xi}+F(\xi)\cdot H(\xi)=0 \tag{2.26}$$

となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\xi=0\ ;\quad F(\xi)=\frac{d^2F}{d\xi^2}=\frac{dH}{d\xi}=0\\&\xi=\infty\ ;\quad \frac{dF}{d\xi}=H(\xi)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$



(a)



(b)

Fig. 1. 二次元乱流噴流
(a) 速度分布 (b) 温度分布

である。

2.3 計 算 結 果

(2.25) および (2.26) 式の解を境界条件 (2.27) 式のもとに closed form で求めることは困難であるため，Runge-Kutta-Gill 法によって数値積分を行なった。計算は北海道大学計算センターの HIPAC 103 を使用し，有効数値 4 桁の精度で行なってある。

速度分布および温度分布を Fig. 1 (a), (b) に示してある。破線は Schmidt[2] の結果である。

3. 軸対称乱流噴流

3.1 基 礎 方 程 式

加熱された軸対称乱流噴流の基礎方程式は，連続の方程式，運動の方程式およびエネルギの方程式の三つであって

$$\frac{\partial}{\partial X}(YU)+\frac{\partial}{\partial Y}(YV)=0 \tag{3.1}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\nu Y\frac{\partial U}{\partial Y}+\overline{Lv}Y\frac{\partial U}{\partial Y}\right\}+g\beta(T-T_\infty) \tag{3.2}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\nu Y\frac{\partial T}{\partial Y}+\overline{Lv}Y\frac{\partial T}{\partial Y}\right\} \tag{3.3}$$

である。X, Y は噴流の軸方向および半径方向座標であり，U, V はそれぞれの方向の時間的平均速度である。T, T_∞, g および β の意味は二次元噴流の場合と同一である。

いま，噴流内の流れが完全に発達した乱流であるとすれば，運動の方程式およびエネルギの方程式において，粘性項および分子拡散項は無視することができる [Goldstein[5]]。よって，基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial X}(YU)+\frac{\partial}{\partial Y}(YV)=0 \tag{3.4}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\overline{L_v}Y\frac{\partial U}{\partial Y}\right\}+g\beta(T-T_\infty) \tag{3.5}$$

$$U\frac{\partial T}{\partial X}+V\frac{\partial T}{\partial Y}=\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\overline{L_v}Y\frac{\partial T}{\partial Y}\right\} \tag{3.6}$$

となる。無次元変数を (2.8) 式のように導入し，渦粘性係数を Prandtl の仮定に従がい (2.7) 式のごとく導入する。しかるに，噴流の幅 B, および $U_{\max}-U_{\min}$ は

$$\left.\begin{aligned} &B\sim Lx^{-m}\\ &U_{\max}-U_{\min}\sim U_0x^{\alpha+2m}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

とおくことができる。ただし，α, m は後に決められるべき定数である。したがって (2.7) 式は

$$kB(U_{\max}-U_{\min})=\Delta LU_0x^{\alpha+m} \tag{3.8}$$

となり，(2.8) および (3.7) 式を基礎方程式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x}(yu)+\frac{\partial}{\partial y}(yv)=0 \tag{3.9}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left\{x^{\alpha+m}y\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+\theta \tag{3.10}$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left\{x^{\alpha+m}y\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\} \tag{3.11}$$

が得られる。境界条件は

$$\begin{aligned} &y=0\ ;\quad v=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \theta}{\partial y}=0\\ &y=\infty\ ;\quad u=\theta=0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

である。

3.2 相 似 解

(3.10) および (3.11) 式に相似解が存在するものと仮定し，流線関数および θ を

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x,\eta)=x^{\alpha}F(\eta)\\ &\theta(x,\eta)=x^{n}H(\eta)\\ &\eta=yx^{m} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

とおく。したがって，x, y 方向速度成分は

$$\left.\begin{aligned} &u=\frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial y}=x^{\alpha+2m}\frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta}\\ &v=-\frac{1}{y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=-x^{\alpha+m-1}\frac{1}{\eta}\left\{\alpha F(\eta)+m\eta\frac{dF}{d\eta}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

となる。

(3.13) 式を，(3.10) および (3.11) 式に代入し，それらの方程式が η に関する常微分方程式となるべきことから

$$\frac{1}{\eta}\left\{\frac{\alpha}{\eta^2}F(\eta)\frac{dF}{d\eta}-\frac{\alpha}{\eta}F(\eta)\frac{d^2F}{d\eta^2}+\frac{(\alpha+3m)}{\eta}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2\right\}=-\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta}-\frac{d^2F}{d\eta^2}\right\}+H(\eta) \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{\eta}\left\{nH(\eta)\frac{dF}{d\eta}-\alpha F(\eta)\frac{dH}{d\eta}\right\}=\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dH}{d\eta}\right) \tag{3.16}$$

および

$$m+1=0\ ,\quad n+1=2(\alpha+2m) \tag{3.17}$$

が得られる。

未知数は α, m および n の 3 個であるから，(3.17) 式からただちにすべての定数を決定することはできない。しかるに，エネルギ方程式の積分は二次元の場合と同様に

$$(n+\alpha)\int_0^{\infty}H(\eta)\frac{dF}{d\eta}\,d\eta=0 \tag{3.18}$$

となる。$H(\eta)$ および $dF/d\eta$ は常に正の値を取るものと考えられるから，(3.18) 式が成立するためには

$$n+\alpha=0 \tag{3.19}$$

でなければならない。したがって，(3.17) および (3.19) 式から，ただちに

$$\alpha=\frac{5}{3},\quad m=-1,\quad n=-\frac{5}{3} \tag{3.20}$$

となり，所要の相似解がつぎのように決定される。

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x,\eta)=x^{\frac{5}{3}}F(\eta)\\&\theta(x,\eta)=x^{-\frac{5}{3}}H(\eta)\\&\eta=yx^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$$\left.\begin{aligned}&u=x^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta}\\&v=-x^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{\eta}\left\{\frac{5}{3}F(\eta)-\eta\frac{dF}{d\eta}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

したがって，噴流の幅は x に比例して拡がり，速度 u は $x^{-1/3}$，温度は $x^{-5/3}$ に比例して減少するが，これらの結果は，いずれも Schmidt[3] が求めた結果と一致している。なお，層流のときは噴流の幅は $x^{1/2}$ に比例して拡がり，速度 u は x^{0}，温度は x^{-1} に比例して変化する [Brand & Lahey[1]]。

(3.20) 式を代入すれば (3.15) および (3.16) 式は

$$\frac{d^3F}{d\eta^3}-\frac{1}{\eta}\frac{d^2F}{d\eta^2}+\frac{5}{3}\frac{1}{\eta}F(\eta)\frac{d^2F}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{4}{3}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2-\frac{1}{\eta^2}\frac{5}{3}F(\eta)\frac{dF}{d\eta}+\frac{1}{\eta^2}\frac{dF}{d\eta}+\eta H(\eta)=0 \tag{3.23}$$

$$\eta\frac{dH}{d\eta}+\frac{5}{3}F(\eta)\cdot H(\eta)=0 \tag{3.24}$$

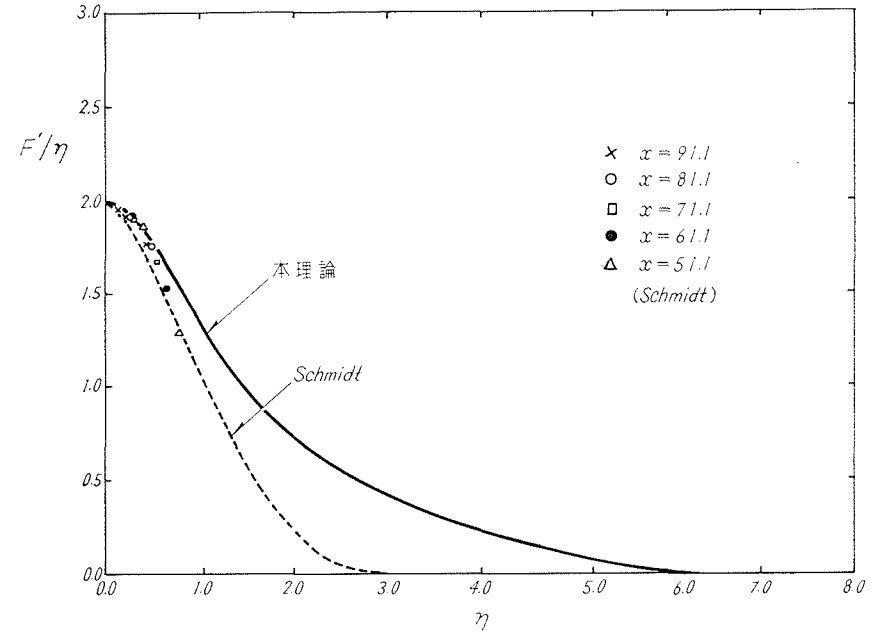
となる。境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\eta=0\ ;\quad F(\eta)=\frac{dH}{d\eta}=0,\quad \frac{d^2F}{d\eta^2}=\frac{1}{\eta}\frac{dF}{d\eta}\\&\eta=\infty\ ;\quad \frac{dF}{d\eta}=H(\eta)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

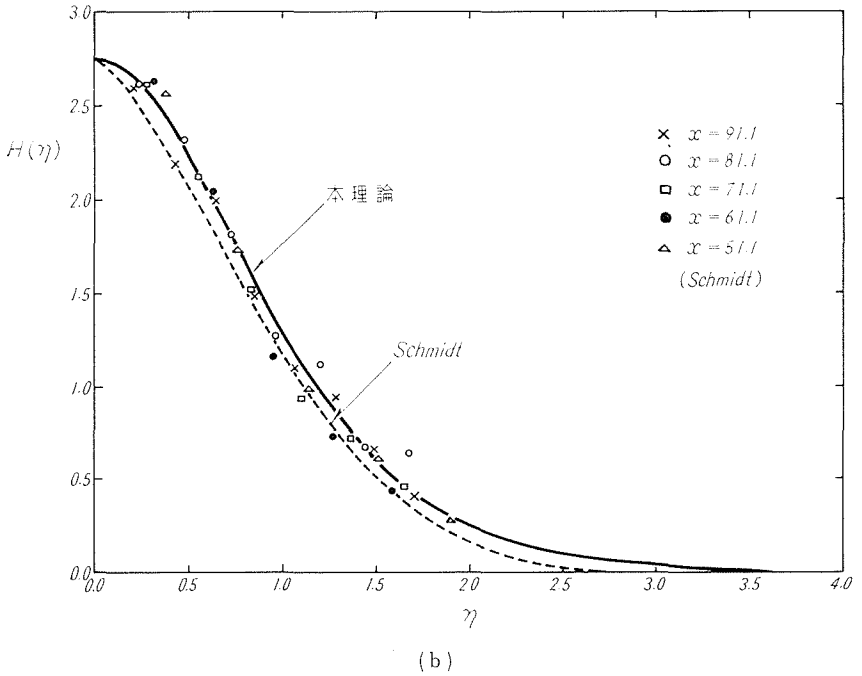
である。

3. 3　計算結果および実験値 [Schmidt[3]] との比較

(3.19) および (3.20) 式の解を境界条件 (3.21) 式のもとに closed form で求めることは困難である故，Runge-Kutta-Gill 法により数値積分を行なった。計算には北海道大学計算センターの HIPAC 103 を用い，有効数字 4 桁の精度で行なった。



(a)



(b)

Fig. 2. 軸対称乱流噴流
(a) 速度分布　(b) 温度分布

Fig. 2 (a) は噴流中における速度分布を示すものである。破線は Schmidt の解であり，図中にはあわせて Schmidt の実験値も示した。Schmidt は合成速度のみを測定しているので，y 方向速度成分の小さいと思われる噴流の中心部分のみを比較した。中心付近では，理論値と実測値とはよく一致しており，いずれの解析が良好かはにわかに判定できない。

Fig. 2 (b) には，温度分布を示してある。破線は Schmidt の解であり，図中の測定点は，Schmidt の実験結果である。温度分布に関する限り，本解析結果は，Schmidt の解よりも実験値とよく一致しており，中心付近では特に一致は良好である。

4. 結　　論

垂直方向に上向きに噴出される加熱された乱流噴流に関して，浮力を考慮した解析を行ないつぎの結果を得た。

(1) 温度分布および速度分布

渦粘性係数を $\overline{Lv}=kB(U_{\max}-U_{\min})$ なる形に仮定することにより，軸心上において kink を有しない速度分布の解を数値的に求めることができた。

二次元噴流の場合速度分布は，Schmidt の解とほぼ一致しているが，温度分布にはかなりの差異がある。一方軸対称噴流においては，速度分布は Schmidt の結果と大幅に異なり，温度分布の方がむしろよく一致する。なお軸対称噴流の温度分布に関する本解析の結果は Schmidt の解よりも実験値との一致が良好である。

(2) 軸心上の速度および温度

軸心上の速度は，二次元のとき x^{0}，軸対称のとき $x^{-1/3}$ に，軸心上の温度は，二次元のとき x^{-1}，軸対称のとき $x^{-5/3}$ にそれぞれ比例して変化する。

(3) 噴 流 の 幅

噴流の幅は，二次元，軸対称いずれの場合も x に比例して拡がる。

(2) および (3) の結果は，Schmidt が渦粘性係数に関する Prandtl の他の仮定 $\overline{Lv}=l^2|dU/dy|$ を用いて求めた結果と一致している。

参 考 文 献

1) Brand, R. S. and Lahey, F. J.: J. Fluid Mech., **29** (1967), 305.
2) Schmidt, W.: Z.A.M.M., **21** (1941), 265.
3) Schmidt, W.: Z.A.M.M., **21** (1941), 351.
4) Prandtl, L.: Z.A.M.M., **22** (1942), 241.
5) Goldstein, S.: Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. 2., Dover Publications, Inc., (1965), 647.