



Title	1/2周波数変換器の解析
Author(s)	佐藤, 正毅; Sato, Masaki; 福田, 昭治 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 55, 17-34
Issue Date	1970-03-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40972
Type	departmental bulletin paper
File Information	55_17-34.pdf



1/2 周波数変換器の解析

佐藤 正毅
福田 昭治
藤原 一

(昭和44年7月31日受理)

Analysis of a Half Frequency Changer

Masaki SATO
Shoji FUKUDA
Hajime FUJIWARA

(Received July 31, 1969)

Abstract

In recent years, frequency changers consisting of thyristors have been applied in many fields, and various analyses of these circuits have been made.

However, the focus of attention has been on producing higher frequencies than on the source frequency.

Thus, in the present paper, attempts were made to reduce the frequency in half.

The circuit used for this purpose consisted of 8 thyristors and was connected to a single phase source.

The analysis of the load current was carried out under an inductive load. The analysis was of considerable interest.

In the earlier part of this paper, general solutions of the load current was derived under continuous current conditions.

The changeable regions of the independently controlled angle β and dependently controlled angle α are determined in such a way that the load current is continuous, where the angle α is the function of angle β .

The latter half of this paper is devoted to explanations concerning waveforms, effective values, the rate of harmonics of the load current, and power factor. These items are influenced by the change of SCR angle which is controlled independently in order to render the load current continuous.

1. 緒 言

近年, ますます, SCR (Silicon Controlled Rectifier) 素子で構成される, 周波数変換器についての特色ある現象の解析が行なわれている。

しかし, 多くの場合は, 周波数上昇に関してのものである。本報告に於いては, 単相電源

に SCR 8 個によって構成される，周波数を 1/2 に降下させる装置を接続し，新たに来る 1/2 周波数の単相電源に，静止 R, L 負荷を接続した場合の負荷電流の解析を試みたものである。

本報告の最初の部分は，負荷電流連続状態での，その一般解の導出と，負荷電流を連続にさせるための，SCR 独立制御角，及び従属制御角の変域を求めることから成っている。SCR 独立制御角の，負荷電流を連続にするための領域内に於けるその変化に対応する負荷電流の波形，負荷電流実効値，高調波成分の含有率，力率の変化に関する詳述は本報告の後半の部分に述べてある。

SCR 独立制御角と SCR 従属制御角，負荷電流実効値，高調波成分の含有率，負荷力率との関係数式中には SCR を利用する場合に特有なことだが，正弦関数と指数関数とが複雑に混在するが，電子計算機を使用すれば種々の特性曲線はすみやかに求めることができる。

本報告に於ける最も重要な特性曲線は，SCR 独立制御角と従属制御角に関する特性曲線である。

電子計算機の利用による数値計算の結果，負荷電流への高調波分含有率を最小にするための，SCR 独立制御角と，負荷純抵抗に対する誘導性抵抗の比を割り出すことができた。

2. 負荷電流一般解

2.1 負荷電流一般解の導出

Fig. 2.1.1 に示す周波数 1/2 降下回路の，SCR の動作を説明し，それに並行させて出力電圧，電流の波形を推定し，定常状態で成立する微分方程式を求める。

ここで定常状態とは，静止 R, L 負荷へのスイッチ投入後の過渡的現象が十分に減衰し，周期的電圧，電流が現われていると見なせる状態である。なお，これからの解析に対しては，電源側のインピーダンスを無視する。

さて今，とにかく，Fig. 2.1.2 のごとく入力電圧のもとで 8 個の SCR のゲートへ，適切な位置，時間の幅でパルスを送り，定常な出力電圧，電流が現われているとしよう。もちろん電流は連続状態になっているものとし，SCR は ①'①→②②'→③③'→④④'→①①'→…… の順に，一対ずつ同時に動作させる。入力電圧が Fig. 2.1.3 のごとく $\theta=0$ で 0 となっても，インダクタンスに蓄積されているエネルギーが放出されつつあり負荷電流 i_L は $\theta=0$ で 0 にはなり得ず， $\theta=0$ よりあるずれた位置でようやく 0 になる。この位置を $\theta=\alpha$ で表わそう。

従って $\theta=0\sim\alpha$ の間には， e_i は正の向きであっても $(e_i - X_L di_L/dt) < 0$ (i_L は負の方向へ減少しつつある) であり SCR ①①' には逆方向電圧が加わっており，⑥' の位置でゲートへ

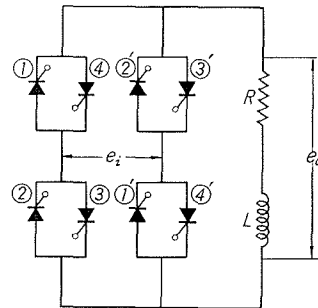


Fig. 2.1.1. Circuit of frequency changer

e_i , input voltage (single phase)
 e_o , output voltage (single phase)

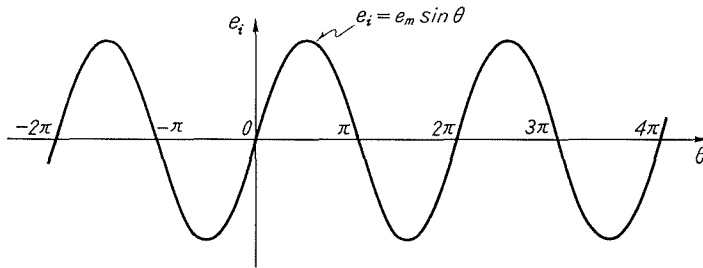


Fig. 2.1.2. Input voltage (single phase)

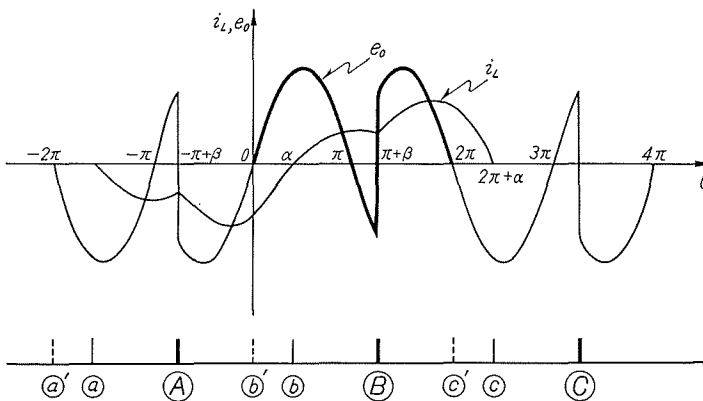


Fig. 2.1.3. Output voltage and current waveforms and positions of gate pulses.

ルスを送ってもターンオンできぬことになる。それに対し $(X_L di_L/d\theta - e_i) > 0$ である故、SCR ④④'には順方向の電圧が加わっており $\theta=0$ よりわずかでも以前に、SCR ④④' がターンオンしているならば、負荷電流は依然として SCR ④④' を流れ、入力 of 正の電圧はそれらの SCR を経て、 $0 \leq \theta < \alpha$ の間、出力端子に現われる。このような場合に、SCR ②②', ③③' のうち SCR ②②'には逆方向電圧が加わっておりオフの状態にあり ③③' のゲートへは信号を送らないものとすれば、それらもオフの状態にある。

さて次に、今度は $\theta = \alpha$ 以降を考えよう。(ここで $\varphi \leq \alpha < \pi$ となるのだが、それは 3.2 の部分で述べる。) $\theta = \alpha$ の瞬間に電流 $i_L = 0$ となり SCR ④④' はターンオフするが、この時 SCR ①①' に ⑥ の位置でゲートパルスを送る。SCR ①①' がターンオンすることは、電圧が順方向に加わるにより明らかであり、電流は R, L 負荷を正方向に流れ始める。 $\theta = \pi$ に到り、入力電圧 $e_i = 0$ になるが前述と同様 $i_L = 0$ とはなり得ない。この $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の区間では、SCR ①①' を経て、入力電圧は出力側に、正あるいは 0 として現われるが、前述と同様、SCR ①①' は $e_i < 0$ になってもオンの状態でなければならない。 i_L はいずれ $\theta = \pi$ よりあるずれた位置で 0 になるのだが、 $i_L = 0$ となる以前の $\theta = \pi + \beta$ にて SCR ②②' をターンオンさせるとしよう。

$(e_i + X_L di_L/d\theta)$ は SCR ②②' に順方向電圧として加わるから、 $\theta = \pi + \beta$ 即ち ⑥ の位置で、

ゲートパルスを送ることにより、それは実現する。従って $\pi + \beta \leq \theta \leq 2\pi$ の間では、入力電圧を θ 軸に関して、 180° 回転させた波形が出力側へ生ずる。依って出力電圧波形は、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に於いては、Fig. 2・1・3 中の太線の部分で表わされ、全体の波形は、それを負、正の方向へ 2π ごとに繰り返すことにより完全に表わされる。本装置で、最初にもくろんだのだが、結局出力電圧は周期 4π の対称波と考えられる故、負荷電流も周期 4π の対称波と考えられ、従って $\theta = 2\pi + \alpha$ で $i_L = 0$ となるはずであるから、推定される電圧、電流の出力側波形の全体は Fig. 2・1・3 のごとくになろう。先に記述した β と α をそれぞれ、SCR 独立制御角、SCR 従属制御角と名づけることにする。負荷電流が連続という条件下で、 β は独立に選定できる SCR 制御角であり、それに対し α は β に従属し決定される SCR 制御角であることから生まれたものである。なお、 α と β との関係は 2・2 で述べる。

さていよいよ負荷電流を決定する微分方程式を考える段階に入るのだが、電圧波形は対称波である故、前述のごとく電流波形も周期 4π の対称波と考えられ、依って、電流解は Fig. 2・1・3 で、 $\alpha \leq \theta \leq 2\pi + \alpha$ に於けるものを求めれば充分であり、しかもその電流解は $\alpha \leq \theta < \pi + \beta$ と $\pi + \beta \leq \theta \leq 2\pi + \alpha$ の二つのモードにおいて流れる電流の結合されたものであることは、先の SCR の動作の説明より明らかである。

その二つの区域で成立する微分方程式と、それぞれの解は次に示すものとなる。ただし $\theta = \pi + \beta$ で $i_1, i_2 \neq 0$ とする。

又 $0 \leq \beta < \tan^{-1} X/R$ とする。(これについては詳細に後述する。)

(a) $\alpha \leq \theta \leq \pi + \beta$ $i_L = i_1$ として

$$\begin{aligned} i_1 R + X_L di_1/d\theta &= e_m \sin \theta \\ \therefore i_1 &= i_m \sin(\theta - \varphi) + A \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \alpha)) \end{aligned} \quad (1)$$

(b) $\pi + \beta \leq \theta \leq 2\pi + \alpha$ $i_L = i_2$ として

$$\begin{aligned} i_2 R + X_L di_2/d\theta &= e_m \sin(\theta - \pi) \\ \therefore i_2 &= i_m \sin(\theta - \pi - \varphi) + B \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \pi - \beta)) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし $i_m = e_m / \sqrt{R^2 + X_L^2}$, $\varphi = \tan^{-1} X_L/R$, A, B は定数,

ここで i_1 に於ける過渡項は一般に $A' \exp(-R/X)$ の形になるのだが、ある一定の静止 R, L 負荷のもとでは、位相差あるいは SCR 従属制御角 α は β により決定してしまう。よって β を $0 \leq \beta < \tan^{-1} X_L/R$ なる変域内の任意の値に設定すれば、 α は定数として扱ってもよく、 $A' = A \exp((R/X) \cdot \alpha)$ としてもよい。依って $A' \exp((-R/X) \cdot \theta) = A \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \alpha))$ となるものであり、この形は種々の条件を数式化する際に、その数式の簡略化に役立つものである。(2) の i_2 に関しても全く同様である。

2・2 SCR 従属制御角 α 、定数 A, B

ある単相電源に、本装置が接続される場合、一定な静止 R, L 負荷のもとで、連続した負

荷電流を流すため SCR 制御角 β , α を調整しなければならないのだが、SCR 独立制御角 β による負荷電流の制御を、 β による α , A , B の関数表現で示そう。

定常状態になるように、制御が可能であるためには、 α , A , B の β による数式表現式が三本存在しなければならず、そのためには何らかの三つの条件が存在しなければならない。

そこで、その三つの条件だが、それを掲げると次のようになる。即ち

$$\textcircled{1} \text{ 電流 } i_L \text{ は } \theta = \alpha \text{ で } 0 \text{ である。 } \theta = \alpha \rightarrow i_1 = 0$$

$$\therefore \textcircled{1} \text{ より } A = i_m \sin(\varphi - \alpha) \quad (3)$$

$$\textcircled{2} \text{ 電流 } i_L \text{ の半周期は } 2\pi \text{ である。 } \theta = 2\pi + \alpha \rightarrow i_2 = 0$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{ より } i_m \sin(\alpha - \varphi) = B \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta)) \quad (4)$$

$$\textcircled{3} \text{ 電流 } i_L \text{ は連続状態にある。 } \theta = \pi + \beta \rightarrow i_1 = i_2$$

$$\therefore (1), (2) \text{ より } 2i_m \sin(B - \varphi) + B = A \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \beta - \alpha)) \quad (5)$$

よって上記 (3), (4), (5) より i_m , A , B を消去することにより

$$\exp((R/X_L) \cdot \alpha) \sin(\alpha - \varphi) = \frac{2 \exp((R/X_L) \cdot \beta) \sin(\varphi - \beta)}{\exp((R/X_L) \cdot \pi) + \exp((-R/X_L) \cdot \pi)} \quad (6)$$

となり α と β を関係づける式が誘導された。

次に (3), (4) より

$$B/A = -\exp(R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta)) \quad (7)$$

となり、電流解の過渡項定数 A , B は常に異符号となることが知れる。

従って、電源電圧実効値 (単相入力電圧)、静止 R , L 負荷が決定しているもとの、SCR 独立制御角 β を、 i が連続するようにある任意の値に設定すれば、最初 (6) より SCR 従属制御角 α が決定し、その α によって (3) より A が決定され、その A により (7) から B が決定されるから、電流の具体的完全解が求まるわけである。

3. SCR 制御角

3.1 独立制御角 β の変域

SCR 独立制御角 β の、電流連続下の変域を求めるためには、 β の最大値によって β の上限を決定しなければならない。それは $\theta = \pi + \beta$ で $i_1 = i_2 = 0$ としてしまう β を求めることにより達成される。このときの β を β_{\max} とすれば

$$\theta = \pi + \beta_{\max} \text{ で } i_1 = 0$$

$$\therefore i_m \sin(\pi + \beta_{\max} - \varphi) + A \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \beta_{\max} - \alpha)) = 0 \quad (5)_1$$

$$\theta = \pi + \beta_{\max} \text{ で } i_2 = 0 \quad \therefore i_m \sin(\beta_{\max} - \varphi) + B = 0 \quad (5)_2$$

(3), (4), (5)₁, (5)₂ より

$$\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\beta_{\max} - \varphi)} = \exp(R/X_L \cdot (\pi + \beta_{\max} - \alpha))$$

又同時に

$$\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\beta_{\max} - \varphi)} = \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta_{\max}))$$

ここで明らかに

$$\exp(R/X_L \cdot (\pi + \beta_{\max} - \alpha)) \neq \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta_{\max}))$$

従って

$$\sin(\varphi - \alpha) = \sin(\beta_{\max} - \varphi) = 0$$

でなければならないから

$$\varphi - \alpha = \pm 2n\pi, \quad \beta_{\max} - \varphi = \pm 2m\pi \quad (n, m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

であり

$$\alpha = \varphi \mp 2n\pi, \quad \beta_{\max} = \varphi \pm 2m\pi$$

となる。しかし今、 R, L 負荷に対しては $0 < \varphi < \pi/2$ であつ、Fig. 2・1・3 より $\alpha > 0, \beta > 0$ として考えるから

$$\alpha = \varphi + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad \beta_{\max} = \varphi + 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

となる。電流連続下であつて、仮に $\beta_{\max} = \varphi + 2\pi (> 2\pi)$ であるとすれば、電流の半周期は 2π より大きくなり 2・1 に於ける、電流連続下であつては、電流の半周期が 2π であるという考察と矛盾する。従つて $\beta_{\max} \neq \varphi + 2n\pi (m = 1, 2, 3, \dots)$ であるから $\beta_{\max} = \varphi$ である。

結局電流連続下の β の変域は

$$0 \leq \beta \leq \tan^{-1} X_L/R \quad (9)$$

となる。

3・2 従属制御角 α の変域

電流を連続させるような、(9) のような β に対する α の変化の状態は (6) より求まるのだが、その変域を考えよう。Fig. 2・1・3 の電圧、電流波形と電流解 (1) から $\theta = -\pi + \beta$ のとき SCR ④④' はターンオンするのだが、その瞬間に負の方向への過渡電流が直流分として発生し、その絶対値は指数関数的に $-\pi + \beta \leq \theta \leq \pi + \beta$ の間減衰することは明らかであり (1) の $\theta > \varphi$ に於ける正方向への交流電流成分 $i_m \sin(\theta - \varphi)$ と、この負方向電流成分とが相殺し合う点が即ち $\theta = \alpha$ であると考えられるから、明らかに $\alpha > \varphi$ である。(ここで $A < 0$ だから (7) より $B > 0$)

さて次に、出力電圧 e_0 、出力電流 i_L に対し、 $\theta = 2X$ に変数変換を行なえば e_0, i_L は周期 2π の $-\pi \leq X \leq \pi$ の区間で、ディリクレの条件を満足する関数である。従つてフーリエ級数で表現される。よつて

$$e_0 = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} \sin \left\{ (2k+1) \cdot X + X_{2k+1} \right\}, \quad i_L = \sum_{k=0}^{\infty} C'_{2k+1} \sin \left\{ (2k+1) \cdot X + X'_{2k+1} \right\}$$

($k=0, 1, 2, 3, \dots$)

となる。そこで e_0, i_L の基本波間の位相差を、 X 軸に関して表現するとき、これを φ_x とすれば、静止 R, L 負荷に対しては $\varphi_x = X_1 - X'_1 (>0)$ であり、今 $0 < X_L/R < \infty$ としているから $0 < \varphi_x < \pi/2$ である。ところが今 $\theta = 2X$ だから、 θ 軸に関しての位相差は α である故、 $2\varphi_x = \alpha$ となるから、結局 $0 < \alpha < \pi$ となる。前述の $\alpha > \varphi$ より $\varphi < \alpha < \pi$ となろう。

従って (8) に於いて $n=0$ でなければならず $\alpha = \varphi$ となるから、 β が最大るとき、 α は最小となり、それを α_{\min} とすれば

$$\alpha_{\min} = \beta_{\max} = \tan^{-1} X_L/R = \varphi \quad (10)$$

となる。従って、電流連続下の完全な α の変域は

$$\varphi \leq \alpha < \pi \quad (11)$$

となる。

3.3 β - α 特性

ある静止 R, L 負荷に於いて電流が連続となるように、SCR 制御角を調整する際に β - α 特性はきわめて有用となろう。 β に対応する α を決定するためには、(6) から $\alpha = f(\beta)$ のような変形が不可能であるから、電子計算機による数値解法が主たる方法といえよう。

そこで、その β - α 特性を求めるための数値解法について若干述べる。(6) に於いて

$$f(\alpha) = \exp(R/X_L \cdot \alpha) \cdot \sin(\alpha - \varphi),$$

$$f(\beta) = \frac{2}{\exp(R/X_L \cdot \pi) + \exp(-R/X_L \cdot \pi)} \exp(R/X_L \cdot \beta) \sin(\varphi - \beta)$$

とおく。

$$df(\alpha)/d\alpha = \frac{\exp(R/X_L \cdot \alpha) \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_L} \sin \alpha > 0 \quad (\because \varphi \leq \alpha < \pi, 0 < \varphi < \pi/2)$$

従って $f(\alpha)$ は (11) の区間で単調増加関数となる。又

$$\frac{2}{\exp(R/X_L \cdot \pi) + \exp(R/X_L \cdot \pi)} = K$$

とおくと

$$df(\beta)/d\beta = \frac{K \exp(R/X_L \cdot \beta) \sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_L} \cdot \sin(-\beta) < 0 \quad (\because 0 \leq \beta \leq \tan^{-1} X_L/R)$$

依って $f(\beta)$ は (9) の区間では $\beta = 0$ で最大値を取り、 β が増すにつれ、単調に減少する関数である。従って $f(\alpha), f(\beta)$ の概形は Fig. 3.3.1 のようになろう。従って (6) にもとづく β_i に対する α_i は区間 $\varphi \leq \alpha \leq \pi$ を n 等分し、 $|f(\beta_i) - f(\alpha_j)|$, ($j=1 \sim n$) をつくり、それを最小にする α_j で近似で

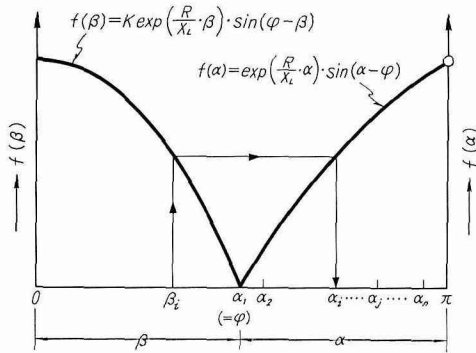


Fig. 3.3.1. General forms of $f(\beta)$ and $f(\alpha)$.

き、 n を大きくするほど α_n に近づく。 n の値は計算機により制限を受けるが、しかし普通近似度を充分に高め得る Fig. 3.3.2 は β - α 特性である。

4. 電流の波形と実効値

4.1 電流の臨界現象、及び波形

電流の連続と不連続の臨界点は $\theta = \pi + \beta_{max}$ であるが (10), (3) より $A=0$, (10), (4) より $B=0$ であるから (1), (2) はそれぞれ次のごとくになる。即ち電流の連続と不連続の臨界波形は、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{min} \leq \theta \leq \pi + \beta_{max} \quad \text{では} \quad i_1 &= i_m \sin(\theta - \varphi) \\ \pi + \beta_{max} < \theta \leq 2\pi + \alpha_{min} \quad \text{では} \quad i_2 &= i_m \sin(\theta - \pi - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

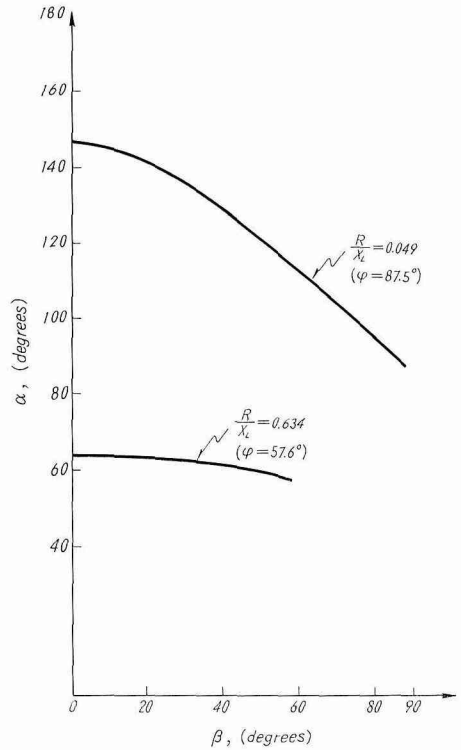


Fig. 3.3.2. Independently controlled SCR angle β — dependently controlled SCR angle α

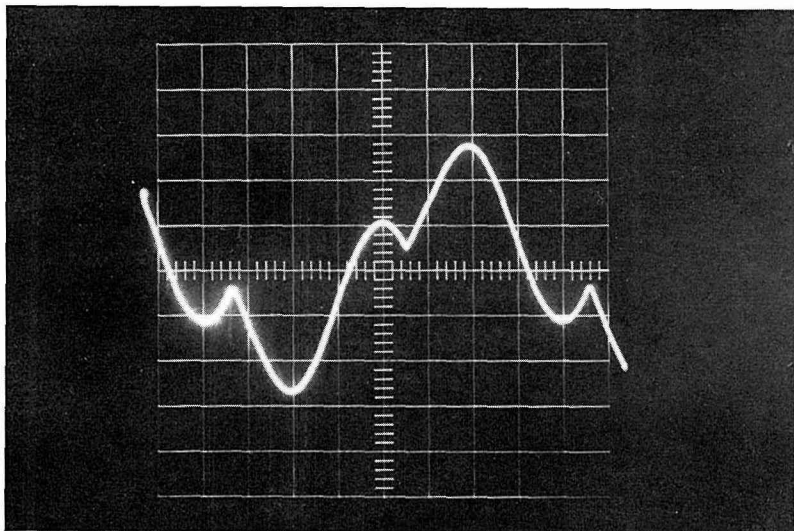


Fig. 4.1.1. Waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$, $\beta=45^\circ$. 1 A/div

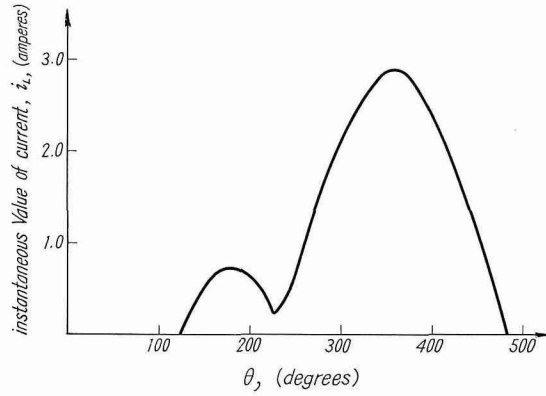


Fig. 4·1·1'. Calculated waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$, $\beta=45^\circ$

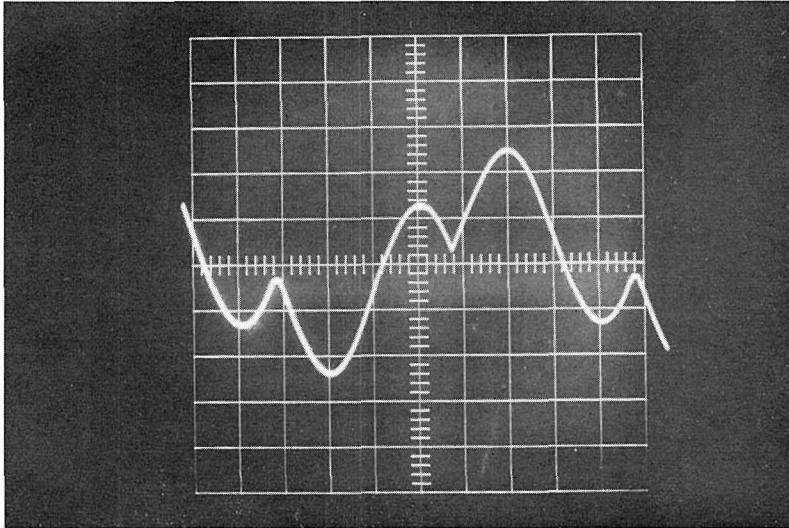


Fig. 4·1·2. Waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$, $\beta=63^\circ$. 1 A/div

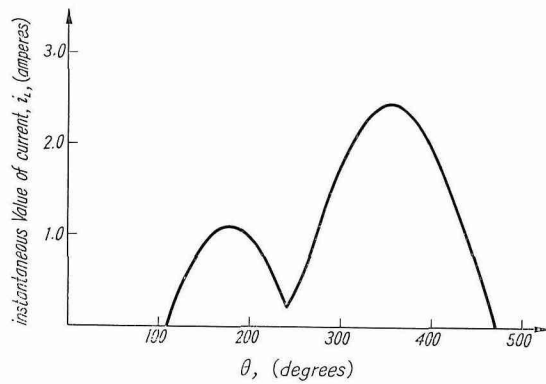


Fig. 4·1·2'. Calculated waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$, $\beta=63^\circ$.

となり、過渡項が消失し、純抵抗負荷時と同様の波形となる。 β が $\beta_{\max}(=\tan^{-1} X_L/R)$ に近づくとつれ $\alpha \rightarrow \alpha_{\min}(=\tan^{-1} X_L/R)$ となり、(3) より $A \rightarrow 0$ 、(7) より $B \rightarrow 0$ となるから (9) の区間で β が増加するにつれ、電流は (12) に近づくであろう。

本節は、この β に対する波形変化の過程を、理論波形と観測波形とを比較しながら示すものである。

$X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$ ($\varphi=87.5^\circ$) に於ける β の変化に対する観測波形、理論波形の推移は

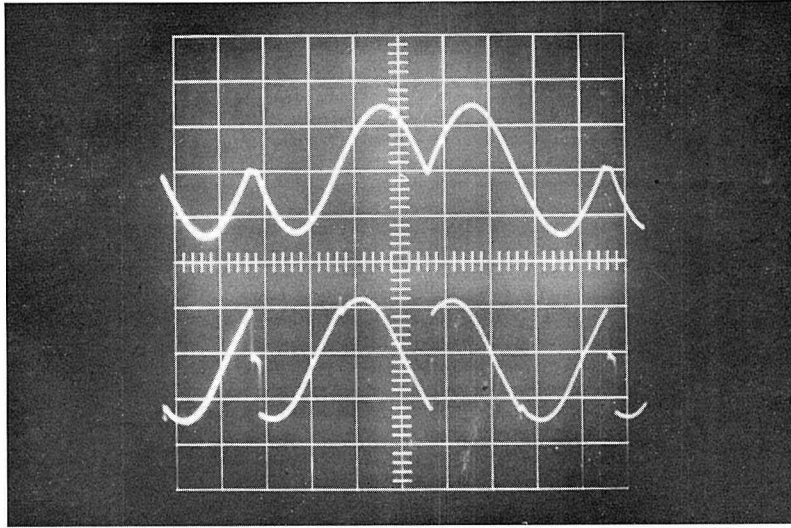


Fig. 4.1.3. Waveforms of current and voltage for $X_L=16.3 \Omega$, $R=0.8 \Omega$, $\beta=\beta_{\max}$ (87.5°). 1 A/div, 20 V/div

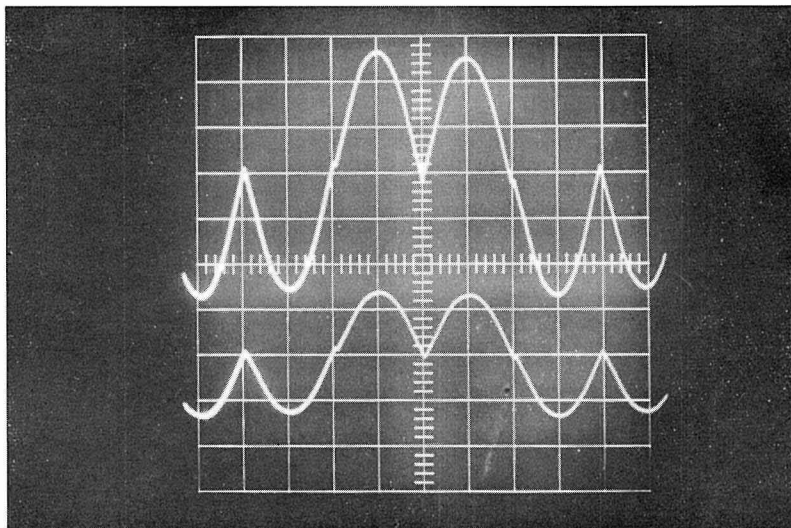


Fig. 4.1.4. Waveforms of current and voltage for $X_L=0 \Omega$, $R=10 \Omega$, $\beta=0^\circ$. 1 A/div, 20 V/div

Fig. 4-1-1, Fig. 4-1-1', Fig. 4-1-2, Fig. 4-1-2', Fig. 4-1-3, Fig. 4-1-5のごとくであり, Fig. 4-1-4は $X_L=0\ \Omega$, $R=10\ \Omega$ に対するものである。

又 $X_L=16.3\ (\Omega)$, $R=10.3\ (\Omega)$ ($\varphi=57.6^\circ$) に対しては Fig. 4-1-6, Fig. 4-1-6', Fig. 4-1-7, Fig. 4-1-7', Fig. 4-1-8のごとくである。

4-2 電流の実効値

電流の実効値をもとめ, その β に対する変化を, 電子計算機による理論曲線と実験値とをつき合わせながら調べて見た。

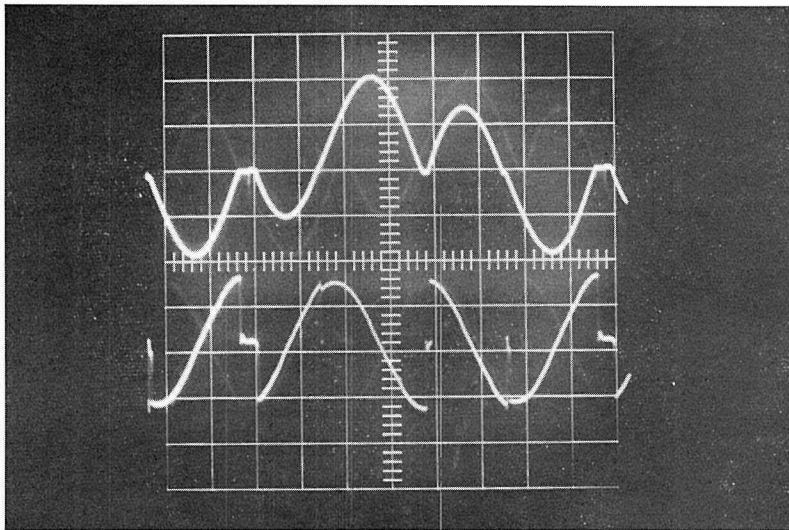


Fig. 4-1-5. Waveforms of current and voltage for $X_L=16.3\ \Omega$, $R=0.8\ \Omega$, $\beta=92^\circ > \beta_{\max}(87.5^\circ)$. 1 A/div, 20 V/div

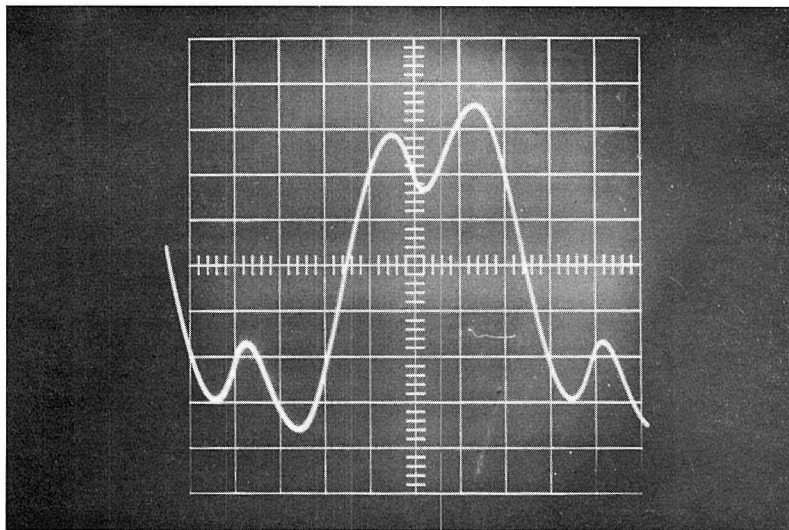


Fig. 4-1-6. Waveform of current for $X_L=16.3\ \Omega$, $R=10.3\ \Omega$, $\beta=18^\circ$. 0.5 A/div

電流の実効値は次式の計算から求まる。即ち

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\pi+\beta} i_1^2 dt + \int_{\pi+\beta}^{2\pi+\alpha} i_2^2 dt \right\}}$$

$$(1) \text{ より } i_1 = i_m \sin(\theta - \varphi) + A \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \alpha))$$

$$(2) \text{ より } i_2 = i_m \sin(\theta - \pi - \varphi) + B \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \pi - \beta))$$

$$(7) \text{ に着目し } = i_m \sin(\theta - \pi - \varphi) - A \exp(R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta)) \cdot \exp(-R/X_L \cdot (\theta - \pi - \beta)) \\ = -i_m \sin(\theta - \varphi) - A \exp(-R/X_L \cdot (\theta - 2\pi - \alpha))$$

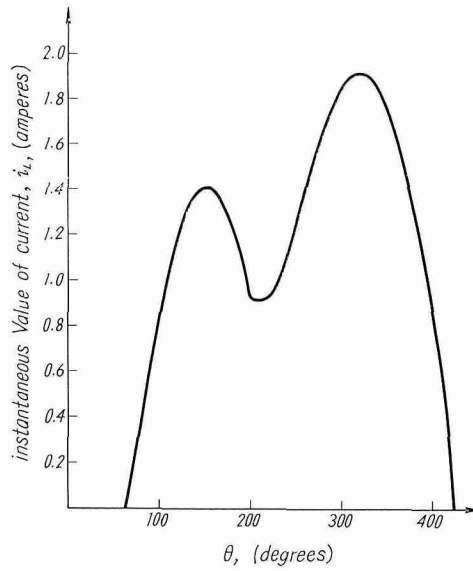


Fig. 4-1-6'. Calculated waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=10.3 \Omega$, $\beta=18^\circ$.

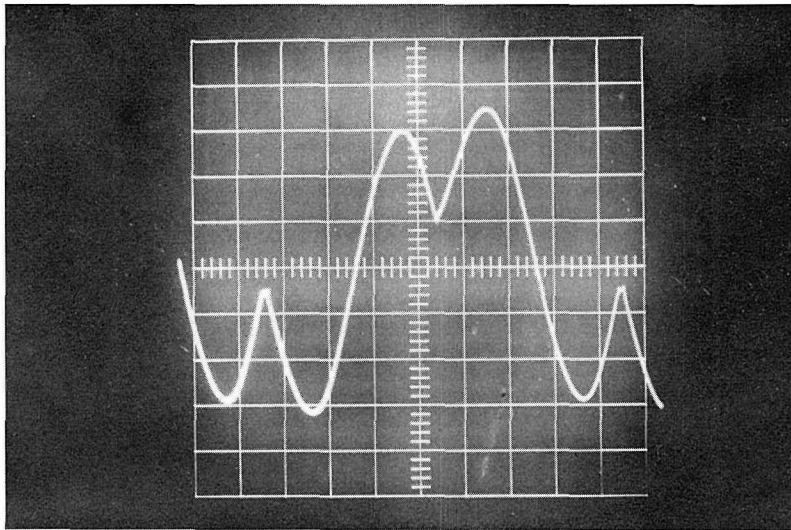


Fig. 4-1-7. Waveform of current for $X_L=16.3 \Omega$, $R=10.3 \Omega$, $\beta=36^\circ$. 0.5 A/div

又 (3) より $A = i_m \sin(\varphi - \alpha)$ とおき, 上述の実効値計算式に i_1, i_2 を代入し計算した結果,

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[\pi + \frac{X}{2R} \left\{ \exp(2R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta)) - \exp(-2R/X_L \cdot (\pi + \beta - \alpha)) \right\} \cdot \sin^2(\varphi - \alpha) \right.} \\ \left. + \frac{2X^2}{X^2 + R^2} \left\{ \cos(\beta - \varphi) + R/X_L \sin(\beta - \varphi) \right\} \cdot \left\{ \exp(-R/X_L \cdot (\pi + \beta - \alpha)) \right. \right. \\ \left. \left. - \exp(R/X_L \cdot (\pi + \alpha - \beta)) \right\} \cdot \sin(\varphi - \alpha) \right]} \quad (13)$$

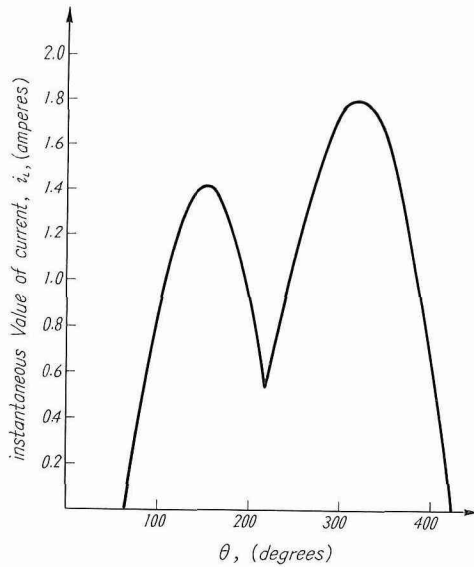


Fig. 4·1·7'. Calculated waveform of current for $X_L = 16.3 \Omega$, $R = 10.3 \Omega$, $\beta = 36^\circ$.

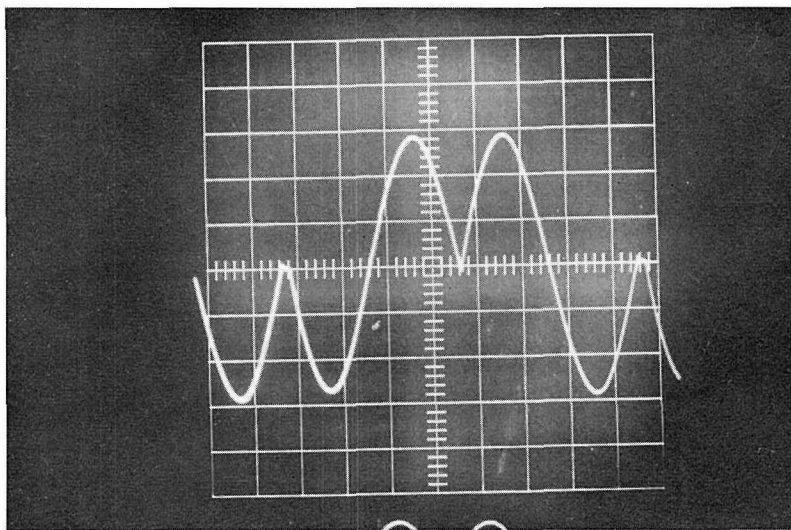


Fig. 4·1·8. Waveform of current for $X_L = 16.3 \Omega$, $R = 10.3 \Omega$, $\beta = \beta_{\max} (= 57.6^\circ)$. 0.5 A/div

となる。

上式で $\alpha_{\min} = \beta_{\max} = \varphi$ では明らかに

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

となる。

理論曲線と実験値をつき合わせた Fig. 4・2 が右に示されている。

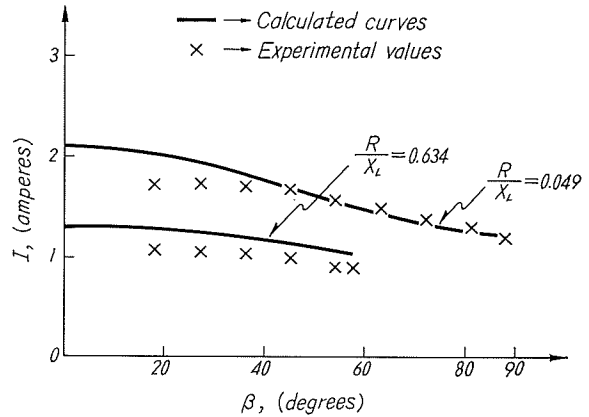


Fig. 4・2. Independently controlled SCR angle β — effective value of current

5. 高調波分含有率と力率

5.1 高調波分含有率

この節では、任意の静止 R, L 負荷に於いて、電流の連続下で、 β に対する高調波分含有率の変化する状態を理論的に計算しようというものである。そのためにはフーリエ級数展開時のフーリエ係数を求める必要がある。出力電圧、電流が $\theta = 2X$ となる変数変換を施される場合、フーリエ級数表示が可能となることは 3・2 で述べておいた。今の場合電流は対称波と考えられるから $0 \leq X \leq \pi$ に於いて $i_L = f(X)$ だとすれば

$$i_L = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{2k+1} \sin(2k+1)X + \sum_{k=0}^{\infty} b'_{2k+1} \cos(2k+1)X$$

ただし

$$a'_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(X) \sin(2k+1)X dX, \quad b'_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(X) \cos(2k+1)X dX$$

Fig. 2・1・3 に於いて i_L を負方向へ α だけ (θ 軸方向) ずらし、 $\theta = 2X$ とおくことにより

$$0 \leq X \leq \frac{\pi + \beta - \alpha}{2} \quad \text{で} \quad i_1 = i_m \sin(2X + \alpha - \varphi) + A \exp((-2R/X_L) \cdot X)$$

$$\frac{\pi + \beta - \alpha}{2} < X \leq \pi \quad \text{で} \quad i_2 = i_m \sin(2X - \pi + \alpha - \varphi) + B \exp(-R/X_L \cdot (2X - \pi - \alpha - \beta))$$

となり上記の a'_{2k+1}, b'_{2k+1} は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} a'_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i_L \sin(2k+1)X dX \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}} i_1 \sin(2k+1)X dX + \int_{\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}}^{\pi} i_2 \sin(2k+1)X dX \right] \\ &= \frac{2i_m}{\pi} \left[\frac{1}{1-2k} \sin \left\{ (1-2k) \cdot \frac{\pi + \beta - \alpha}{2} + \alpha - \varphi \right\} - \frac{1}{2k+3} \sin \left\{ (2k+3) \cdot \frac{\pi + \beta - \alpha}{2} + \alpha - \varphi \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{(2k+1)^2 + \left(\frac{2R}{X}\right)^2} \cdot \left(1 + \exp(2R/X_L \cdot \pi) \right) \cdot \left(\exp(-R/X_L \cdot \pi) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot (\pi + \beta - \alpha)) \cdot \left\{ (2k+1) \cdot \cos\left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}\right) \cdot (2k+1) + \frac{2R}{X_L} \sin\left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}\right) \cdot (2k+1) \right\}$$

$$(k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

同様にして

$$b'_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi i_L \cos(2k+1) X dX = \frac{-4i_m}{\pi} \left[\frac{1}{2k+3} \cos\left\{ (2k+3) \cdot \left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2} \right) + \alpha - \varphi \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{1-2k} \cos\left\{ (1-2k) \cdot \left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2} \right) + \alpha - \varphi \right\} \left. \right] + \frac{2i_m}{\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{(2k+1)^2 + \left(\frac{2R}{X_L}\right)^2}$$

$$\cdot \left[\left(1 + \exp\left(\frac{2R}{X_L} \cdot \pi\right) \right) \cdot \left(\exp(-R/X_L \cdot (\pi + \beta - \alpha)) \right) \cdot (2k+1) \cdot \sin\left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}\right) \right.$$

$$\left. \cdot (2k+1) - \frac{2R}{X} \cos\left(\frac{\pi + \beta - \alpha}{2}\right) \cdot (2k+1) \right] \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

となる。

今各周波数の電流実効値を $I_1, I_3, I_5, \dots, I_{2k+1}, \dots$ とすれば、

$$I_1 = \sqrt{\frac{a_1'^2 + b_1'^2}{2}}, \quad I_3 = \sqrt{\frac{a_3'^2 + b_3'^2}{2}}, \quad \dots, \quad I_{2k+1} = \sqrt{\frac{a_{2k+1}'^2 + b_{2k+1}'^2}{2}} \dots\dots$$

であり、全体の電流実効値を I とすれば次の関係がある。即ち

$$I^2 = I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots + I_{2k+1}^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k+1}^2 + I_1^2$$

従って高調波分全体に対する電流実効値を I_h とすれば

$$I_h^2 = I^2 - I_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k+1}^2,$$

$$\therefore I_h = \sqrt{I^2 - I_1^2}$$

である。依って、電流の全実効値の中

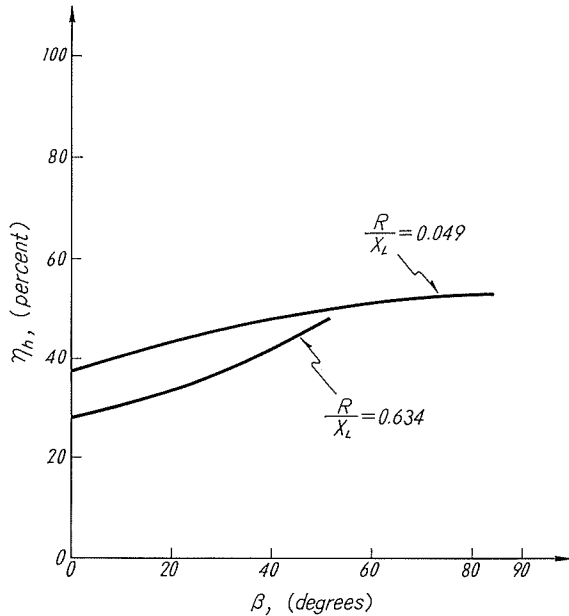


Fig. 5-1-1. Independently controlled SCR angle β — the rate of higher harmonics η_h

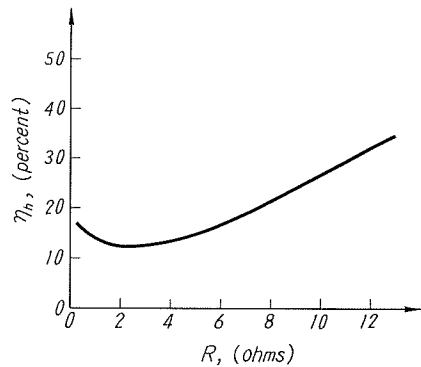


Fig. 5-1-2. Resistance R — the rate of higher harmonics η_h for $X_L = 16.3 \Omega, \beta = 0^\circ$

に、高調波分による電流の含まれる率を、高調波分含有率 η_h と表わせば

$$\eta_h = \frac{I_h}{I} \times 100 = \sqrt{1 - \left(\frac{I_1}{I}\right)^2} \times 100\% \quad (17)$$

となる。

Fig.5.1.1 が β - η_h 特性であり R/X_L をパラメータにしてある。Fig.5.1.2 より明らかだが、多くの R/L_L に対する計算の結果 η_h は $\beta=0$ に於いて最小となり、一般に η_h は独立変数 R/X_L , β の関数となるのだが、 $R/X_L \doteq 0.123$, $\beta=0$ のとき $0 < R/X_L < \infty$ となる全の R/X_L と (9) を満足する全の β に関して、最小値 $\eta_h=12.0\%$ を取る。従ってこのような場合には、 $\varphi = \tan^{-1} \frac{16.3}{2.0} = 83^\circ$, $\alpha=2.22$ (rad), (7) より $B/A = -1.94$ となる。

5.2 カ 率

ある任意の静止 R, L 負荷のもとで、 β の変化に対応し、力率がいかに変化するかを調べる。3.2 で述べたように、出力電圧、電流が周期 2π のひずみ波であり、かつディリクレの $-\pi \leq X \leq \pi$ に於ける条件を満足する場合には、次のようにフーリエ展開が可能となる。即ち

$$\left. \begin{aligned} e &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nX + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nX \\ i &= \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin nX + b'_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b'_n \cos nX \end{aligned} \right\} \quad (\theta = 2X)$$

となる。

従って有効電力を P_e とすれば

$$P_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nX + b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nX \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin nX + b'_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b'_n \cos nX \right) dX$$

となるが、積分した結果は次のごとく簡単になる。即ち

$$P_e = b_0 b'_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n)$$

となり、今の場合電圧、電流ともに周期 2π の対称波であるから、結局求める力率を PF_β とすれば、

$$PF_\beta = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k+1} a'_{2k+1} + b_{2k+1} b'_{2k+1})}{EI} \times 100\% \quad (18)$$

である。

ここで a'_{2k+1} , b'_{2k+1} は (15), (16) によりすでに求まっているが、 PF を計算するには、電圧のフーリエ級数展開時のフーリエ係数 a_{2k+1} , b_{2k+1} が必要となるのであり、それは次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e_m \sin (2k+1) X dX \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi+\beta}{2}} e_m \sin 2X \sin nX dX + \int_{\frac{\pi+\beta}{2}}^\pi -e_m \sin 2X \sin nX dX \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2e_m}{\pi} \left[\frac{\sin(2k-1) \cdot \left(\frac{\pi+\beta}{2}\right)}{2k-1} - \frac{\sin(2k+3) \cdot \left(\frac{\pi+\beta}{2}\right)}{2k+3} \right] \quad (19)$$

同様にして

$$b_{2k+1} = \frac{-2e_m}{\pi} \left[\frac{\cos(2k+3) \cdot \left(\frac{\pi+\beta}{2}\right)}{2k+3} - \frac{\cos(1-2k) \cdot \left(\frac{\pi+\beta}{2}\right)}{2k-1} \right] \quad (20)$$

となる。(15), (16), (19), (20)を(18)に代入することにより力率は、ある任意の静止 R, L 負荷のもとで SCR 独立制御角 β , SCR 従続制御角 α の関数として表わされ、電子計算機により容易に計算できる。

ひずみ波の力率を表現する式として、物理的意義の明確な次式がある。即ちある、(9)の区間の任意の β に対して

$$PF_{\beta} = \frac{E_0 I_0 + \sum_{i=0}^{\infty} E_i I_i \cos \varphi_i}{EI} \times 100 \quad (\%) \quad (21)$$

である。ここで E_0, I_0 は電圧、電流の直流分であって、又、 E_i, I_i は電圧、電流の第 i 調波分の実効値である。 E, I は 1/2 周波数の電源電圧、 R, L 負荷を流れる電流の実効値である。 φ_i は電圧、電流の第 i 調波間の位相差である。ひずみ波の力率の場合に、(21)で一般に $-\pi/2 < \varphi_i < \pi/2$ とは限らないのに対し、電子計算機は、 $\varphi = \tan^{-1} x$ の主値 $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ しか計算できないので(21)を計算するためのプログラムの作製 (i は十分に大きい値に取る) はきわめて難解であろう。従って(18)のような形で PF_{β} を表現したのであり、SCR を使用する際には、電圧、電流ともにひずみ波となるから、力率を計算する場合には、(18)は便利な式と思われる。

R/X_L をパラメータにした $\beta - PF_{\beta}$ 特性が Fig. 5.2 に示されている。Fig. 5.2 に於いて PF_{β} の極大、極小点の存在が認められる。しかし、計器の構造上、それらの変化をとらえるだけの精度は望めなかったので、 β の増加とともに高調波分が増すにつれ、実験値はずれている。

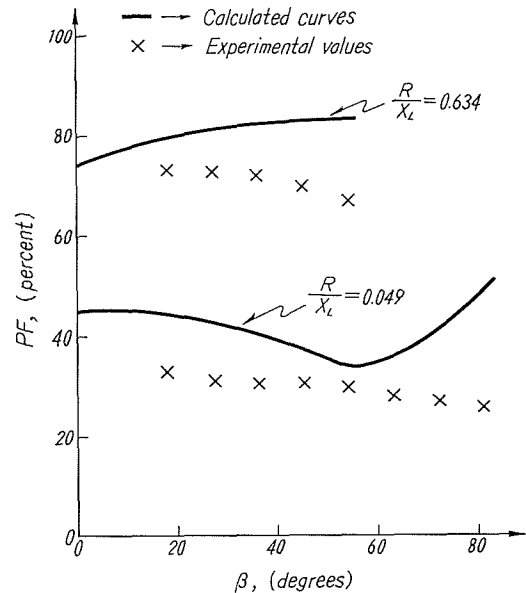


Fig. 5.2. Independently controlled SCR angle β — power factor PF_{β} .

6. 結 言

周波数 1/2 降下装置に於ける負荷電流解析の結果、次のことが導出された。

(1) SCR の制御角の、負荷電流を連続させる状態での、変域は、 $0 \leq \beta \leq \tan^{-1} X_L/R$, $\tan^{-1} X_L/R \leq \alpha < \pi$, であり $\beta_{\max} = \alpha_{\min} = \tan^{-1} X_L/R$ では、電流解中の過渡項は消失してしまふ。

(2) $\beta=0$ にて負荷電流実効値は最大であり、 $\beta = \tan^{-1} X_L/R$ で最小となる。

(3) $X_L/R=0.123$, $\beta=0$ で負荷電流中の、高調波成分の含有率は最小となり、わずか 12% にとどまる。

(4) 力率は β に対し、その特性に於いて、極大、極小点をもち得るが、 $\beta = \tan^{-1} X_L/R$ のとき、力率は最大となる。

最後に、ゲートへ信号を送る回路の製作が可能ならば、一般に、本装置により $1/n$ に降下した周波数の電源をつくり出せる、ということを書き、御協力、助言を与えて下さった福田講師、新居技官ならびに伊藤助手に深く感謝して、本報告を終ることにする。