



Title	大気中における光ヘテロダイナ検波に対する量子効率の分布の影響
Author(s)	高城, 洋明; Takajō, Hiroaki; 桜庭, 一郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 55, 35-47
Issue Date	1970-03-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40978
Type	departmental bulletin paper
File Information	55_35-48.pdf



大気中における光ヘテロダイン検波 に対する量子効率の分布の影響

高 城 洋 明*

桜 庭 一 郎*

(昭和 44 年 8 月 21 日受理)

The Effect of the Quantum Efficiency Distribution on Optical Heterodyne Detection of an Atmospherically Distorted Signal Wave

Hiroaki TAKAJŌ

Ichiro SAKURABA

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan

(Received August 21, 1969)

Abstract

Fried's analysis of an optical heterodyne detection system of an atmospherically distorted signal wave was modified and applied to a case where the quantum efficiency of the photodetector is distributed in a Gaussian distribution.

The ratio of the saturation value of the signal-to-noise ratio, SNR, in the Gaussian distribution to that in the uniform distribution is given by $[1 + \exp\{- (D/2a)^2\}] / 2$, where D is the diameter of the photodetector surface and a is the distribution length. In the case in which the distribution length is small compared with the diameter of the photodetector surface, the ratio of the saturation value tends to a limit of $1/2$. In the case where $D \ll a$, the effect of the quantum efficiency distribution on the saturation value of SNR is very small.

目 次

Abstract	35
1. 緒 言	36
2. 光ヘテロダイン検波	36
3. 信号出力の導出とゆらぎの統計的性質	38
4. $\langle S \rangle$ の計算	40
5. 信号対雑音比の検討	44
6. 結 言	46
参 考 文 献	47

* 電子工学科 電子管工学講座

1. 緒 言

光ヘテロダイナ検波において、信号光が完全に平面波として入射する場合、受信機の出力の信号対雑音比 (以下 SNR と略記する) は、受信機の開口面積に比例して、従って開口の直径 D の 2 乗に比例して増加する。しかるに、大気中を伝播して来た光ビームの振幅と位相は、大気の乱流による屈折率のゆらぎのためランダムに変動している^{1),2)}。このような信号光を光ヘテロダイナ方式で検波する場合、SNR と D の関係は、信号光が平面波の場合と比べて、特に D がある値より大きな領域において著しく異なってくる。つまり D が小さい場合、検出器の受光面上の各点における信号光の位相は、それらの平均値からそれ程ずれていないと考えられ、開口面内においてはほぼ平面波であるとみなすことができる。従って D が小さい間は SNR はほぼ D^2 に比例して増加する。 D がある値以上大きくなると検出器の受光面上で位相が互に 180 度異なる点があられ、これらの部分より生ずる光電子流は互に逆相にあるため、打ち消し合って出力にはあらわれてこない。 D を更に大きくしてもこのような関係にある点が増えまくるため、受信機の信号出力はほとんど増大しなくなる。すなわち D がある値以上大きくなると、ゆらぎの影響が顕著になり、SNR は飽和特性を示すようになる。媒質にゆらぎがある場合のこの飽和現象は H. Hodara 達によって指摘され³⁾、I. Goldstein 達によって実験的に確かめられた⁴⁾。更に D. L. Fried により、より精密な理論的解析が加えられた⁵⁾。Fig. 1 は彼がもとめた SNR と D の関係を示すグラフである。また飽和の顕著にはじまる D の値 r_0

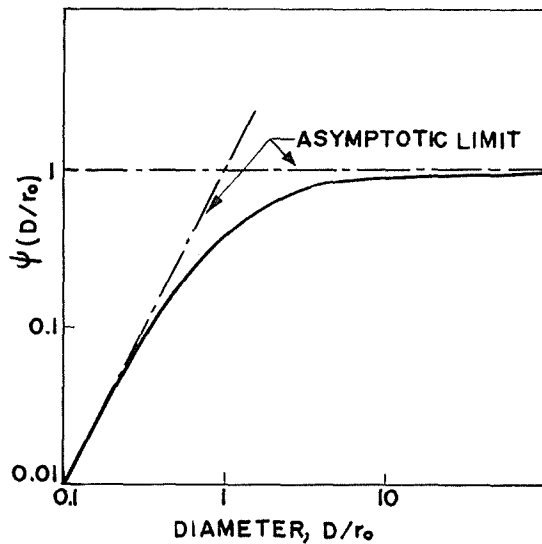


Fig. 1. Dependence of the normalized signal-to-noise ratio, $\psi(D/r_0)$ upon the normalized diameter D/r_0 . This graph was obtained by D. L. Fried.

(efficiency saturation dimension と呼ばれる) を測定することは大気の乱流の状態を知るための大きな手掛りの一つでもある。本論文では、受光面の量子効率に本文中式 (1) で示されるガウス形の分布を持たせた場合に理論を拡張し、この場合の SNR の理論式を求めた。更に SNR と D との関係を知るため、得られた式の漸近的性質などについて検討を加えた。

2. 光ヘテロダイナ検波

Fig. 2 に光ヘテロダイナ検波方式の様子を簡単に示した。信号光と局部発振光 (以下局発光と略記する) は、ビームスプリッターによって重畳され、この重

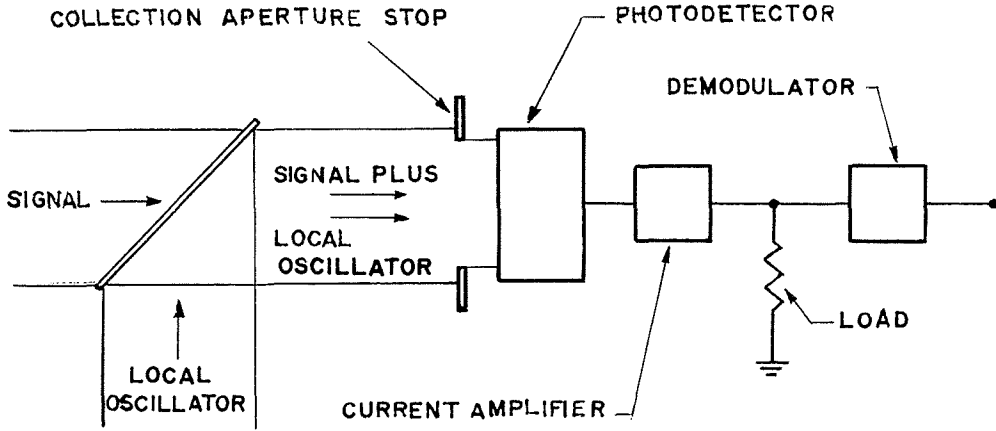


Fig. 2. The schematic of an optical heterodyne detection system.

畳波が検出器の受光面に入射する。検出器からの出力電流は利得 G をもつ電流増幅器によって増幅され、 R なる負荷抵抗に流れる。以下の議論において開口は直径 D なる円形開口とし、開口による回折現象は考えない。

さて我々は検出器の受光面上の量子効率に次式で与えられるガウス形の分布を考える。

$$\eta(x) = \eta_0 \exp[-x^2/a^2] \quad (1)$$

$$x = |\mathbf{x}|$$

ここで \mathbf{x} は、検出器の受光面を含む平面内の位置ベクトルをあらわし、その起点は受光面の中心点にとられている。すなわち、量子効率は受光面の中心で最大であり (最大値 η_0)、周辺に行くに従って小さくなる。

さてはじめ平面波であった信号光は大気中を伝播するにしたがいランダムなひずみを受ける。従って、検出器の受光面上での信号光の電界成分を次式であらわす。

$$E_s = A_s(\mathbf{x}) \exp \left[j \left\{ \omega_s t + \phi_s(\mathbf{x}) \right\} \right] \quad (2)$$

ここで $A_s(\mathbf{x})$ 及び $\phi_s(\mathbf{x})$ は位置ベクトル \mathbf{x} のランダムな関数であり、その統計的性質は、大気の乱流状態によって決定される。また局発光は次式で与えられる。

$$E_l = A_l \exp j[\omega_l t + \phi_l] \quad (3)$$

検出器は一般に 2 乗検波特性をもつので、これらの重畳波により生ずる光電子流は、

$$i = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) (E_s + E_l)^* (E_s + E_l) \quad (4)$$

となる。但し $d\mathbf{x}$ は位置ベクトル \mathbf{x} のまわりの面積素であり、積分は全平面にわたる面積分である。ここで $W(x)$ は次式で定義される関数で直径 D の有限開口のため入射波がさえぎられる効果をあらわすもので、結局は式(4)の積分範囲を示すものである。

$$W(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \leq D/2 \\ 0, & \text{for } x > D/2 \end{cases} \quad (5)$$

式(2)と式(3)を式(4)に代入して、

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \left[A_s(\mathbf{x}) \exp \left\{ -j(\omega_s t + \phi_s(\mathbf{x})) \right\} + A_l \exp \left\{ -j(\omega_l t + \phi_l) \right\} \right] \\ &\quad \times \left[A_s(\mathbf{x}) \exp \left\{ j(\omega_s t + \phi_s(\mathbf{x})) \right\} + A_l \exp \left\{ j(\omega_l t + \phi_l) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \left[A_s(\mathbf{x})^2 + A_l^2 + A_l A_s(\mathbf{x}) \exp \left\{ -j(\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l) \right\} \right. \\ &\quad \left. + A_l A_s(\mathbf{x}) \exp \left\{ -j(\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \left[A_s(\mathbf{x})^2 + A_l^2 \right] + A_l \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) A_s(\mathbf{x}) \cos \left[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l \right] \end{aligned} \quad (6)$$

但し

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_l$$

すなわち第1項目は直流成分(以下 i_d と記す)であり、第2項目は差周波数成分、従って信号電流成分(以下 i_s と記す)である。通常、光ヘテロダイン検波方式においては、 $A_s(\mathbf{x}) \ll A_l$ なるようにとられるので、近似的に直流成分は

$$i_d = \frac{A_l^2}{2} \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \quad (7)$$

で与えられる。上式に式(1)及び式(5)を代入し、位置ベクトル \mathbf{x} を極座標 (x, θ) であらわして積分を遂行すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{A_l^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^D x dx \eta_0 \exp \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi \eta_0 A_l^2 a^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{D^2}{4a^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

電流増幅器の電流利得 G が十分に大きければ、出力にあらわれる雑音電力は、負荷抵抗 R 中の熱雑音よりも、光電子の粒子性にもとづく雑音の方が大きい。この粒子性にもとづく雑音の1サイクル幅当りの電力は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} N &= 2i_d q G^2 R \\ &= \pi \eta_0 A_l^2 q a^2 G^2 R \left[1 - \exp \left(-\frac{D^2}{4a^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで q は電子1コのもつ電荷である。

3. 信号出力の導出とゆらぎの統計的性質

さて光電子流の信号成分 i_s は式(6)から

$$\begin{aligned}
i_s &= A_l \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) A_s(\mathbf{x}) \cos[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l] \\
&= A_l \bar{A}_s \int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \exp[l(\mathbf{x})] \cos[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l]
\end{aligned}$$

となる。但し、 $l(\mathbf{x}) = \log[A_s(\mathbf{x})/\bar{A}_s]$ であり、 \bar{A}_s^2 はランダム変数 $A_s(\mathbf{x})$ の自乗平均値である。

従って信号分の出力電力は次式となる。

$$\begin{aligned}
S &= \overline{(i_s G)^2} R \\
&= (A_l \bar{A}_s G)^2 R \overline{\left[\int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \exp[l(\mathbf{x})] \cos[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l] \right]^2} \\
&= (A_l \bar{A}_s G)^2 R \overline{\int d\mathbf{x} W(x) \eta(x) \exp[l(\mathbf{x})] \cos[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_l]} \\
&\quad \times \overline{\int d\mathbf{x}' W(x') \eta(x') \exp[l(\mathbf{x}')] \cos[\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}') - \phi_l]} \\
&= (A_l \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' W(x) W(x') \eta(x) \eta(x') \\
&\quad \times \exp[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}')] \frac{1}{2} \left\{ \cos[2\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) + \phi_s(\mathbf{x}') - 2\phi_l] + \cos[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}')] \right\} \\
&= \frac{1}{2} (A_l \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' W(x) W(x') \eta(x) \eta(x') \exp[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}')] \cos[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}')]
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで $x' = |x'|$ であり、オーバーバーは出力電流の information bandwidth の逆数に比べれば十分短かく、 $2\pi/\Delta\omega$ に比べれば十分長いような期間にわたっての時間的平均をとる操作を意味するものである。なお式(11)の導出過程において次式の関係を用いた。

$$\overline{\cos[2\Delta\omega t + \phi_s(\mathbf{x}) + \phi_s(\mathbf{x}') - 2\phi_l]} = 0 \tag{12}$$

これは時間平均操作が上述の期間で行なわれるために成立するものである。またこの期間内においては、ランダム変数 $l(\mathbf{x})$, $l(\mathbf{x}')$, $\phi_s(\mathbf{x})$, $\phi_s(\mathbf{x}')$ は、時間的な変動をしない。従って次式に見る如く、オーバーバーを除去することができる。

$$\left. \begin{aligned}
\overline{\exp[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}')] } &= \exp[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}')] \\
\overline{\cos[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}')] } &= \cos[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}')]
\end{aligned} \right\} \tag{13}$$

これらの関係式を用いると式(11)が導出できる。異なった期間における S の値は、それぞれランダム変数 S の異なった実現値であると考えられ、我々はここでこれらの実現値の集合平均値を求める。集合平均を $\langle \rangle$ であらわせば、次式が得られる。

$$\langle S \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (A_l \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' W(x) W(x') \eta(x) \eta(x') \exp[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}')] \cos[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}')] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} (A_t \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}') \gamma(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}') \left\langle \exp \left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right] \cos \left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right] \right\rangle \quad (14)$$

ここで $\left\langle \exp \left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right] \cos \left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right] \right\rangle$ について考える。まず Tatarski によれば、ランダムな変数、 $l(\mathbf{x})$ 及び $\phi_s(\mathbf{x})$ は正規分布に従う。更に $l(\mathbf{x})$, $\phi_s(\mathbf{x})$ のゆらぎが、統計的に等方的であるということから、

$$\left\langle \left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right] \left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right] \right\rangle = 0 \quad (15)$$

が成立する。従ってランダムな変数 $\left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right]$ と $\left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right]$ とは互に独立であり、しかも正規分布をすることが知られる。以上述べた性質を使って、 $l(\mathbf{x})$, $\phi_s(\mathbf{x})$ に関する次の式が導びかれる⁵⁾。

$$\left\langle \exp \left\{ \left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right] \cos \left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right] \right\} \right\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} D(r) \right] \quad (16)$$

ここで $D(r)$ は波動構造関数と呼ばれ、次式で定義される関数である。

$$D(r) = \left\langle \left\{ l(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x}') \right\}^2 \right\rangle + \left\langle \left\{ \phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right\}^2 \right\rangle \quad (17)$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

Kolmogoroff の乱流理論によれば、大気の乱流にもとづく屈折率のゆらぎの状態は、統計的に locally homogeneous で isotropic であると近似することができ、その屈折率の構造関数は2点間の距離の2/3乗に比例する。このとき波動構造関数は2点間の距離の5/3乗に比例して増大することが導びかれる。すなわち

$$D(r) = A r^{\frac{5}{3}} \quad (18)$$

ここで A は信号光の伝播距離と波長及び大気の乱流状態によって定まる定数である。更に

$$r_0 = \left\{ 2 \left[\frac{24}{5} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right) \right]^{\frac{3}{5}} / A \right\}^{\frac{3}{5}} \simeq (6.88/A)^{\frac{3}{5}} \quad (19)$$

なる値を A のかわりに考えれば、波動構造関数は、 r_0 を使って次のように書きかえられる。

$$D(r) = 6.88 (r/r_0)^{\frac{5}{3}} \quad (20)$$

従って式(16)は

$$\left\langle \exp \left\{ \left[l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \right] \cos \left[\phi_s(\mathbf{x}) - \phi_s(\mathbf{x}') \right] \right\} \right\rangle = \exp \left[-\frac{6.88}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (21)$$

となる。

4. $\langle S \rangle$ の計算

以上においてランダムな変数の統計的性質が知られたので、以下式(14)の面積分を遂行す

る。前章で求められた式 (21), 及び式 (1) を代入することにより式 (14) は,

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} (\eta_0 A_t \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{x} d\mathbf{x}' W(x) W(x') \exp \left[-\frac{1}{a^2} (x^2 + x'^2) \right] \exp \left[-\frac{6.88}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (22)$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \\ \mathbf{r}' = \frac{1}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \end{cases} \quad (23)$$

すなわち

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \mathbf{r} \\ \mathbf{x}' = \mathbf{r}' - \frac{1}{2} \mathbf{r} \end{cases} \quad (24)$$

なる変換を行ない, 更に位置ベクトル \mathbf{r}, \mathbf{r}' を極座標 $(r, \theta), (r', \theta')$ であらわせば (但し $r = |\mathbf{r}|, \theta = \arg \cdot \mathbf{r}, r' = |\mathbf{r}'|, \theta' = \arg \cdot \mathbf{r}'$)

$$\begin{aligned} x^2 + x'^2 &= \left| \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \mathbf{r} \right|^2 + \left| \mathbf{r}' - \frac{1}{2} \mathbf{r} \right|^2 \\ &= \left(r' \cos \theta' + \frac{1}{2} r \cos \theta \right)^2 + \left(r' \sin \theta' + \frac{1}{2} r \sin \theta \right)^2 \\ &\quad + \left(r' \cos \theta' - \frac{1}{2} r \cos \theta \right)^2 + \left(r' \sin \theta' - \frac{1}{2} r \sin \theta \right)^2 = 2r'^2 + \frac{1}{2} r^2 \end{aligned} \quad (25)$$

となるので, 式 (23) の変換により式 (22) は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2} (\eta_0 A_t \bar{A}_s G)^2 R \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' W \left(\left| \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \mathbf{r} \right| \right) W \left(\left| \mathbf{r}' - \frac{1}{2} \mathbf{r} \right| \right) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{2r'^2}{a^2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) の \mathbf{r}' に関する積分を行なうために, $W(|\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2|) W(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2|)$ なる関数について考察する。この関数は, $|\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2| < D/2, |\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2| < D/2$ なる 2 つの不等式が同時に成立するとき 1 なる値をとり, それ以外の場合には零となる。従って, Fig. 3 に見るように, 位置ベクトル \mathbf{r} が $D > |\mathbf{r}|$ を満たす時 \mathbf{r}' が同図の斜線を施こした領域, すなわち $\mathbf{r}/2, -\mathbf{r}/2$ なる点を中心とし, $D/2$ を半径とする 2 つの円の重なった領域にあるときに関数 $W(|\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2|) W(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2|)$ は 1 となり, \mathbf{r}' がこれ以外の領域にあるときは零となる。従ってこの場合, 式 (26) の \mathbf{r}' に関する積分は $\exp[-2r'^2/a^2]$ をこの斜線を施こした領域で面積分すればよいことになる。さらに $\exp(-2r'^2/a^2)$ は, θ' に無関係であるから, 原点のまわりに座標軸を回転させても積分には影響しない。そこで座標軸を $\theta' (= \arg \cdot \mathbf{r})$ だけ回転させると, 結局積分領域は Fig. 4 の斜線を施こした領域になる。さて, Fig. 4 において円 O' の方程式は

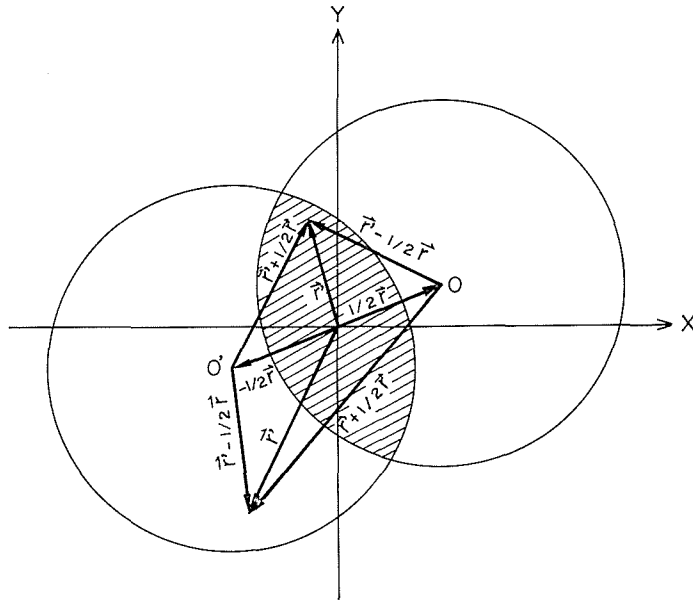


Fig. 3. A geometrical representation in the r' -plane of the function $W(|r'+r/2|) W(|r'-r/2|)$. $W(|r'+r/2|) W(|r'-r/2|)$ equals unity inside the hatched area, the area of overlap of the circles, and equals zero outside the hatched area.

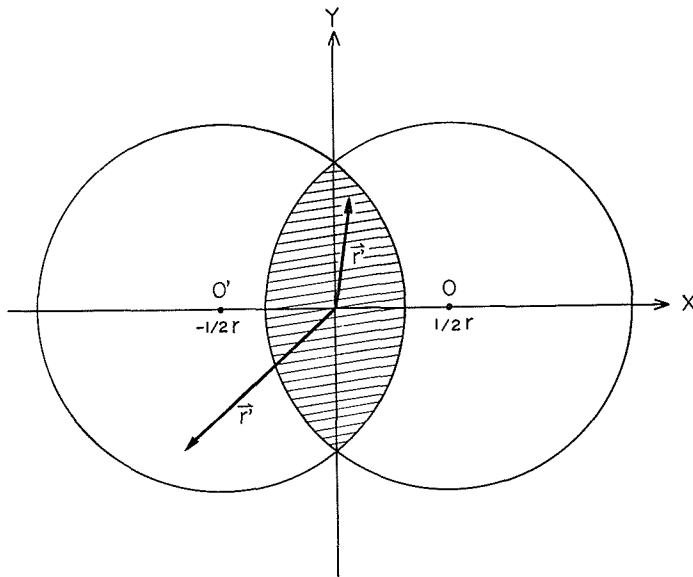


Fig. 4. A geometrical representation of the region over which the integration with respect to r' in equation (26) should be carried out.

$$(r' \cos \theta' + r/2)^2 + (r' \sin \theta')^2 = (D/2)^2 \quad (27)$$

で与えられる。これを r' について解けば、

$$r' = \frac{1}{2} (-r \cos \theta' + \sqrt{D^2 - r^2 \sin^2 \theta'}) \quad (28)$$

となる。結局 $D > |\mathbf{r}|$ のとき、 \mathbf{r}' に関する積分は、

$$\begin{aligned} K(r, D, a) &= \int d\mathbf{r}' W\left(\left|\mathbf{r}' + \frac{1}{2}\mathbf{r}\right|\right) W\left(\left|\mathbf{r}' - \frac{1}{2}\mathbf{r}\right|\right) \exp\left(-\frac{2r'^2}{a^2}\right) \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \int_0^{\frac{1}{2}(-r \cos \theta' + \sqrt{D^2 - r^2 \sin^2 \theta'})} r' dr' \exp\left(-\frac{2r'^2}{a^2}\right) \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}(D^2 + r^2 \cos 2\theta' - 2r \cos \theta' \sqrt{D^2 - r^2 \sin^2 \theta'})\right\}\right] \\ &= a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \exp\left(-\frac{D^2}{2a^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \exp\left\{-\frac{r^2}{2a^2}(\cos 2\theta' - 2\cos \theta' \sqrt{\frac{D^2}{r^2} - \sin^2 \theta'})\right\}\right] \end{aligned} \quad (29)$$

となる。但し上の計算の途中、被積分項の対称性より、積分は、 $0 \leq \theta < \pi/2$ なる領域で行ないそれを4倍した。

また、 $D < |\mathbf{r}|$ なる関係が満足される位置ベクトル \mathbf{r} に対しては、いかなる \mathbf{r}' に対しても $|\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2| < D/2$ 、 $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2| < D/2$ が同時に満足されることはなく、このとき $W(|\mathbf{r}' + \mathbf{r}/2|) W(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}/2|)$ は零となる。従って、 \mathbf{r} に関する積分領域は $|\mathbf{r}| < D$ 、となり式(26)は、結局次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{2} (\eta_0 A_t \bar{A}_s G)^2 R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^D r dr K(r, D, a) \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right\}\right] \\ &= \pi (\eta_0 A_t \bar{A}_s G)^2 R \int_0^D r dr K(r, D, a) \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right\}\right] \end{aligned} \quad (30)$$

上式を式(9)で割って、検出器の受光面の量子効率にガウス形の分布を考えた場合のSNRは一般に次式で与えられることになる。

$$\frac{\langle S \rangle}{N} = \frac{\eta_0 \bar{A}_s^2}{qa^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{D^2}{4a^2}\right) \right]} \int_0^D r dr K(r, D, a) \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right\}\right] \quad (31)$$

更に取扱を簡単にするために

$$k = \frac{D}{2a} \quad (33)$$

とおき、式(31)を $\pi \eta_0 \bar{A}_s^2 r_0^2 / 8q$ で割った後に、

$$\begin{cases} Z = \frac{D}{r_0} \\ z = \frac{r}{D} \end{cases} \quad (33)$$

なる置換を行なえば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\phi(Z; k) &= \frac{\langle S \rangle / N}{\pi \eta_0 \bar{A}_s^2 r_0^2 / 8q} \\ &= \frac{8Z^2}{\pi [1 - \exp(-k^2)]} \int_0^1 z dz U(z, k) \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ 4k^2 z^2 + 6.88 (zZ)^{\frac{5}{3}} \right\} \right] \quad (34)\end{aligned}$$

但し式(29)より $U(z, k)$ は、

$$U(z, k) = \frac{\pi}{2} - \exp(-2k^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \exp \left\{ -2k^2 z^2 (\cos 2\theta' - 2\cos \theta' \sqrt{z^{-2} - \sin^2 \theta'}) \right\} \quad (35)$$

である。このように $\phi(Z; k)$ は $\pi \eta_0 \bar{A}_s^2 r_0^2 / 8q$ で正規化された SNR をあらわすものであり、 Z 及び k の関数である。ここに Z は r_0 で正規化された受光面の直径をあらわす。 k は、受光面の周辺に行くにつれ量子効率がどの程度減少かということを示すパラメータで、 k が大なる程量子効率は急速に減少することになる。

5. 信号対雑音比の検討

式(34)及び式(35)の積分式はそれ程簡単なものではなく、我々は実際には数値計算によらねばならない。そこで式(34)の振舞いの傾向を知るため、以下の如く、その漸近的性質について考察する。

(i) $Z \ll 1$ が成り立つ場合

この場合式(34)の被積分項において次式の近似が成立する。

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ 4k^2 z^2 + 6.88 (zZ)^{\frac{5}{3}} \right\} \right] \simeq \exp [-2k^2 z^2] \quad (36)$$

また式(35)で示される $U(z, k)$ は Z には無関係である。従って、

$$\phi(Z; k) \rightarrow \phi(k) \cdot Z^2, \quad \text{as } Z \rightarrow 0 \quad (37)$$

但し

$$\phi(k) = \frac{8}{\pi [1 - \exp(-k^2)]} \int_0^1 z dz U(z, k) \exp [-2k^2 z^2] \quad (38)$$

である。

従って Z が零に近づくにつれ $\phi(Z; k)$ は $\phi(Z; k) = \phi(k) Z^2$ に漸近する。これは緒言において定性的に述べた推論、すなわち開口の直径が小さい間は、SNR は直径の2乗に比例するという主張が、量子効率に分布を持たせた場合にもあてはまることを示すものである。比例定数 $\phi(k)$ は k の関数である。

(ii) $Z \gg 1$ が成り立つ場合

この場合には次の近似式が成立する。

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ 4k^2 z^2 + 6.88 (zZ)^{\frac{5}{3}} \right\} \right] \simeq \exp \left[-3.44 (zZ)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (39)$$

また $Z \gg 1$ で $\exp[-3.44(zZ)^{\frac{5}{3}}]$ が零とかなり異なった値をもつためには、 $z \ll 1$ でなければならぬ。従って式(34)の z に関する積分で実際に積分値に寄与するのは $0 \leq z \ll 1$ の領域の部分である。 z がこの領域にあるとき式(35)は、

$$U(z, k) \simeq \frac{\pi}{2} - \exp(-2k^2) \int_0^z d\theta' = \frac{\pi}{2} \left[1 - \exp(-2k^2) \right] \quad (40)$$

で近似できる。

従って、

$$\begin{aligned} \psi(Z; k) &\rightarrow \frac{8Z^2}{\pi [1 - \exp(-k^2)]} \int_0^\infty z dz \frac{\pi}{2} \left[1 - \exp(-2k^2) \right] \exp \left[-3.44(zZ)^{\frac{5}{3}} \right] \\ &= \frac{1 - \exp(-2k^2)}{1 - \exp(-k^2)} 4Z^2 \int_0^\infty z dz \exp \left[-3.44(zZ)^{\frac{5}{3}} \right], \quad \text{as } Z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (40)$$

となる。また $t = Zz$ とおけば

$$4Z^2 \int_0^\infty z dz \exp \left\{ -3.44(zZ)^{\frac{5}{3}} \right\} = 4 \int_0^\infty t dt \exp \left\{ -3.44t^{\frac{5}{3}} \right\} \quad (41)$$

更に $u = 3.44t^{\frac{5}{3}}$ と置けば

$$4 \int_0^\infty t dt \exp \left\{ -3.44t^{\frac{5}{3}} \right\} = 4 \int_0^\infty \frac{3}{5} (3.44)^{-\frac{6}{5}} u^{\frac{6}{5}-1} e^{-u} du = \frac{12}{5} (3.44)^{-\frac{6}{5}} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right) = \frac{1}{2} \quad (42)$$

但し最後の式を導びく際、次式を使った。(式(19)参照)

$$(3.44)^{\frac{6}{5}} \simeq \frac{24}{5} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right)$$

以上より式(40)は次のように書きかえられる。

$$\psi(Z; k) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1 - \exp(-2k^2)}{1 - \exp(-k^2)} = \frac{1}{2} \left[1 + \exp(-k^2) \right], \quad \text{as } Z \rightarrow \infty \quad (43)$$

従って、 $Z \rightarrow \infty$ において、 $\psi(Z; k)$ は $[1 + \exp(-k^2)]/2$ なる値に漸近する。このように量子効率がガウス分布する場合も、 Z が大きくなるにつれ $\psi(Z; k)$ は Z^2 に比例しなくなり、飽和性を示すが、飽和値はパラメータ k の減小函数で $[1 + \exp(-k^2)]/2$ となる。すなわち、飽和値は $k=0$ のとき 1 なる値をとり、 $k \rightarrow \infty$ において $1/2$ なる値に収れんする。

最後に飽和値が最大となる $k=0$ の場合について考える。この場合は $a \rightarrow \infty$ となり、受光面上で量子効率が一定値 η_0 をとる場合に相当する。この場合には式(34)と式(35)において直接 $k \rightarrow 0$ とするよりも、式(31)で $a \rightarrow \infty$ にした方が簡明である。

$$\begin{aligned} &a^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{D^2}{4a^2} \right) \right] \\ &= a^2 \left[1 - \left\{ 1 - \frac{D^2}{4a^2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{D^2}{4a^2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{D^2}{4a^2} \right)^3 + \dots \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{D^2}{4} - \frac{1}{2!} \frac{D^4}{4a^2} + \frac{1}{3!} \frac{D^6}{4a^2} + \cdots \rightarrow \frac{D^2}{4}, \quad \text{as } a \rightarrow \infty \quad (44)$$

同様に

$$\begin{aligned} K(r, D, a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' a^2 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} (D^2 + r^2 \cos 2\theta' - 2r \cos \theta' \sqrt{D^2 - r^2 \sin^2 \theta'}) \right\} \right] \\ &\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' \frac{1}{2} \left\{ D^2 + r^2 \cos 2\theta' - 2r \cos \theta' \sqrt{D^2 - r^2 \sin^2 \theta'} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} D^2 - 2r \int_0^1 d\eta \sqrt{D^2 - r^2 \eta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} D^2 - r \left\{ \eta \sqrt{D^2 - r^2 \eta} + \frac{D^2}{r} \left\{ \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{r}{D} \right\} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[D^2 \cos^{-1} \left(\frac{r}{D} \right) - r(D^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad \text{as } a \rightarrow \infty \quad (45) \end{aligned}$$

従って $a \rightarrow \infty$ にした時、式(31)は次式となる。

$$\frac{\langle S \rangle}{N} = \frac{4\eta_0 \bar{A}_s^2}{qD^2} \int_0^D r dr \frac{1}{2} \left[D^2 \cos^{-1} \left(\frac{r}{D} \right) - r(D^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (46)$$

上式を $\pi\eta_0 \bar{A}_s^2 r_0^2 / 8q$ で割って、式(33)の変数変換を行なえば、

$$\phi(Z) = \frac{32Z^2}{\pi} \int_0^1 z dz \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} z - z(1-z)^{\frac{1}{2}} \right] \exp \left[-3.44(zZ)^{\frac{5}{3}} \right] \quad (47)$$

が得られる。上式は D. L. Fried が求めた式と一致する。

6. 結 言

検出器の受光面の量子効率に $\eta(x) = \eta_0 \exp[-x^2/a^2]$ なるガウス形の分布を与えた場合の受信機の出力の SNR を求めた。その結果 SNR は量子効率が一様に分布している場合と同様に、開口の直径 D が小さい間は、 D の 2 乗に比例して増大するが D の値が大きくなるにつれて、媒質のゆらぎの影響が著しくなり、飽和してくることがわかった。比例定数、及び飽和値は、 k の関数であり、特に、この場合の飽和値と一様分布の場合の飽和値との比は $\left[1 + \exp\left\{ -(k^2) \right\} \right] / 2$ で与えられる。ここで $k (= D/2a)$ は量子効率の分布の状態をあらわすパラメータである。すなわち、SNR の飽和値は量子効率が一値 η_0 をとるとき ($k=0$ のとき) に最大であり、 k の値が大きくなるほど (受光面の周辺に行くにつれ量子効率が急速に減少するほど) 減少し、 $k \rightarrow \infty$ において $k=0$ のときの $1/2$ となることがわかった。また実際の装置においては受光面の量子効率は、たとえそれがガウスの分布をしていないにしても受光面の周辺部でどうしても低下するであろう。ガウス分布のときからの類推により、周辺での量子効率の低下は SNR の飽和値を必ず減少させるものであると推論される。

おわりに、日頃、御助言をいただいている本学科電波応用工学講座鈴木道雄教授ならびに御討論いただいた応用電気研究所今井正明博士に感謝します。

参 考 文 献

- 1) Tatarski, V. I.: "Wave propagation in a turbulent medium", McGraw-Hill, New York, 1961.
- 2) Chernov, L. A.: "Wave propagation in a random medium", McGraw-Hill, New York, 1960.
- 3) Hodara, H.: "Effects of a turbulent atmosphere on the phase and frequency of optical waves", Proc. IEEE, Vol. 56, pp. 2130-2136, December 1968.
- 4) Goldstein, I., Amiles, P. and Chabot, A.: "Heterodyne measurements of light propagation through atmospheric turbulence", Proc. IEEE, Vol. 53, pp. 1172-1180, September 1965.
- 5) Fried, D. L.: "Optical heterodyne detection of an atmospherically distorted signal wave front", Proc. IEEE, Vol. 55, pp. 57-67, January 1967.