



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	圧力勾配をともなう層流境界層におよぼす吹出しおよび吸込みの効果
Author(s)	福迫, 尚一郎; Fukusako, Shoichiro; 木谷, 勝 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 55, 1-16
Issue Date	1970-03-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40979
Type	departmental bulletin paper
File Information	55_1-16.pdf



圧力勾配をともなう層流境界層におよぼす 吹出しおよび吸込みの効果

福迫 尚一郎*
木谷 勝*
有江 幹男*

(昭和44年8月30日受理)

Suction or Blowing Effects on the Laminar Boundary Layer with a Streamwise Pressure Gradient

Shoichiro FUKUSAKO
Masaru KIYA
Mikio ARIE

(Received August 30, 1969)

Abstract

The present paper deals with a theoretical aspect of the effect of suction and blowing on a laminar boundary layer flow accompanied by a streamwise pressure gradient complicated by a heat transfer between the wall and the fluid. The present analysis was made under very general conditions under which the pressure varies as x^m and the suction or blowing velocity as x^n with m and n being arbitrary constants.

However, m should not be equal to -1 in this case. The case of $m = -1$ was also treated in the appendix as an exceptional case. The wall is assumed to be isothermal.

In the same manner as in the case where zero pressure gradient is in the direction of flow, suction at the wall increases both skin friction and heat transfer, while a blowing decreases them. The effect of blowing or suction appears less markedly when the pressure gradient is negative as compared with the case of positive pressure gradient.

目 次

1. 緒 論	2
記 号	3
2. 基礎方程式および摂動解	3
3. 表面摩擦応力および熱伝達	6
4. 結 論	8
補 遺	8
参 考 文 献	10

* 機械工学科 流体工学第一講座

1. 緒 論

吹出しおよび吸込みをともなう境界層の問題は、いわゆる境界層制御に関連して工学的に重要な意義を有するものである。この中でも流れに平行におかれた平板に沿う吹出しあるいは吸込みを伴う層流境界層は固体壁上において吹出しあるいは吸込みを有する流れの最も基本的な場合に該当するため、Griffith & Meredith¹⁾以来多数の理論的ならびに実験的研究が報告されている。とくに Schlichting & Busemann²⁾は、吹出しあるいは吸込み速度が $x^{-1/2}$ (x : 平板先端からの距離) に比例する形をとる場合にのみ、層流境界層は相似変数 y/\sqrt{x} によって取り扱えることを示している。また Terril³⁾は圧力が直線的に減少する流れの中におかれた平板上の層流境界層剝離におよぼす吹出しおよび吸込みの効果を論じている。Eichhorn⁴⁾は加熱垂直平板による自然対流におよぼす一様な吹出しおよび吸込みの効果について解析を行っており、また Sparrow & Cess⁶⁾は Eichhorn の解析をさらに一般化し、吹出しおよび吸込みの効果を摂動として取り扱い吹出し速度が x^n に比例する場合について解を求めている。これらの解析により壁面せん断応力および熱伝達におよぼす吹出しあるいは吸込みの効果が定量的に明らかにされている。

これらの流れは、Terril の研究を除いていずれも流れの方向に圧力勾配が存在しない場合であり、圧力勾配と吹出しあるいは吸込みとの相互作用を明らかにすることができない。Terril は層流境界層方程式を直接数値的に解いているために、その結果は一般性がとぼしい。

本論文は圧力勾配を有する層流境界層の最も簡単な場合として、流れに正対しておかれた頂角 $\pi\beta$ のくさび状物体表面に発達する境界層をとりあげ、表面摩擦応力および熱伝達におよぼす吹出しおよび吸込みの効果を定量的に明らかにしたものである。この場合境界層外端の速度および圧力はそれぞれ x^m および x^{2m} ($m = \beta/(2-\beta)$, x : くさびの頂点から表面に沿って測った距離) に比例するものとする。物体表面上における吹出しおよび吸込み速度は x^n に比例して変化しているものとする。 n は任意の定数であってよく、とくに $n=0$ は一様な吹出しおよび吸込み速度を意味する。さらに n の値は m の値とは全く無関係に選ぶことができる。したがって本解析は Schlichting & Busemann の結果をその特別な場合として含んでおり、彼等の解析に比較して適用範囲が広い。

$m=0:n=0, 0.5, 1.0$ および $m=1.0:n=0, 0.5, 1.0$ の場合について数値計算を行ない、結果を数表および線図の形で与えてある。平板上の層流境界層の場合と同様に、表面摩擦応力および熱伝達は吹出しおよび吸込みの存在によって、それぞれ減少および増大する。

ただ $m=-1$ の場合には前述の理論では取り扱えないので、とくに補遺において別途に考察を加えてある。

記号

a : 代表長さ	N_u : 局所 Nusselt 数
k : 熱伝導率	T : 境界層内流体温度
u_0 : 代表速度	T_∞ : 境界層外流体温度
u' : x' 方向速度成分	T_w : 壁面温度
v' : y' 方向速度成分	μ : 粘性係数
x', y' : 直交座標	ν : 動粘性係数
C_p : 定圧比熱	ρ : 密度
P_r : Prandtl 数	τ : 表面摩擦応力

2. 基礎方程式および摂動解

非圧縮性流体の定常流に対する基礎方程式は連続の方程式、Navier-Stokes 方程式およびエネルギー方程式であるが、層流境界層理論においてはこれらは次の形をとる。

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (1a)$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U \frac{dU}{dx'} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (1b)$$

$$\rho C_p \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \quad (1c)$$

ここに x' はくさびの頂点から表面に沿って測った距離、 y' は表面から垂直に流体側に向って測った距離であり、 u', v' はそれぞれ x', y' 方向の速度成分である。 U は境界層外端の速度であって、 x' のみの関数である。 T', ρ, C_p, k, ν はそれぞれ温度、密度、定圧比熱、熱伝導率、動粘性係数である。代表長さを a 、代表速度を u_0 、壁温および境界層外の流体温度をそれぞれ T_w, T_∞ なる一定値とし、次のような無次元変数を導入する。

$$u = \frac{u'}{u_0}, \quad v = v' \left(\frac{a}{u_0 \nu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{x'}{a}, \quad y = y' \left(\frac{u_0}{a \nu} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad T = \frac{T' - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

境界層外端の速度を

$$U(x) = u_0 x^m \quad (2)$$

と書き、式(1a)、(1b)および(1c)を無次元変数によって表示すれば

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = m x^{2m-1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3b)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3c)$$

が得られる。ここに Pr は Prandtl 数であって

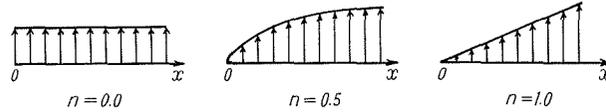
$$Pr = \mu C_p / k$$

である。方程式 (3 a), (3 b) および (3 c) に対する境界条件は

$$y = 0 : u = 0, \quad v = v_w x^n, \quad T = 1 \quad (4a)$$

$$y = \infty : u = U/u_0, \quad T = 0 \quad (4b)$$

である。ここに n および v_w は吹出しあるいは吸込み速度を規定する定数であってそれぞれ任意にとることができる。 $v_w > 0$ のときは吹出し、 $v_w < 0$ のときは吸込みを表わす。また $n = 0, 0.5, 1.0$ の場合について吹出し速度分布を図示すれば第 1 図のようになる。



第 1 図 吹き出し速度分布 ($v_w > 0$)

連続の方程式 (3 a) は流線関数 ψ を

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

なる定義によって導入することによりつねに満足させることができる。

いま新変数 ξ および η を

$$\xi = v_w x^{-\frac{m-1}{2}+n}, \quad \eta = y \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}}$$

によって定義し、流線関数 ψ および温度 T を次の形に仮定する。

$$\psi(x, y) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}} F(\xi, \eta) \quad (5a)$$

$$F(\xi, \eta) = f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \dots \quad (5b)$$

$$T(x, y) = \theta(\xi, \eta) = h_0(\eta) + \xi h_1(\eta) + \xi^2 h_2(\eta) + \dots \quad (5c)$$

したがって x, y 方向速度成分は

$$u = x^m \frac{\partial F}{\partial \eta} \quad (6a)$$

$$v = -\left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}} \left(F + \frac{m-1}{m+1} \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{m-1-2n}{m+1} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \quad (6b)$$

である。式 (5 c), (6 a) および (6 b) を式 (3 b) および (3 c) に代入すれば F および θ に関する方程式が求められる。すなわち

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{2m}{m+1} \left\{ 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 \right\} + \frac{m-1-2n}{m+1} \xi \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + F \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{m-1-2n}{m+1} \xi \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (7b)$$

式 (7 a) および (7 b) に式 (5 b) および (5 c) を代入し、結果を ξ の昇べきの順に整理すれば

$$f_0''' + f_0 f_0'' + \frac{2m}{m+1} (1 - f_0'^2) = 0 \quad (8a)$$

$$h_0' + P_r (f_0 h_0') = 0 \quad (8b)$$

$$f_1''' + f_0 f_1'' + 2 \frac{n+1}{m+1} f_0'' f_1 - \frac{3m+1+2n}{m+1} f_0' f_1' = 0 \quad (9a)$$

$$h_1' + P_r \left(f_0 h_1' + 2 \frac{n+1}{m+1} f_1 h_0' + \frac{m-1-2n}{m+1} f_0' h_1 \right) = 0 \quad (9b)$$

$$f_2''' + f_0 f_2'' + 2 \frac{n+1}{m+1} f_1 f_1'' + \frac{-m+3+4n}{m+1} f_0'' f_2 - \frac{m+1+2n}{m+1} (f_1'^2 + 2 f_0' f_2') = 0 \quad (10a)$$

$$h_2' + P_r \left[f_0 h_2' + 2 \frac{n+1}{m+1} f_1 h_1' + \frac{-m+3+4n}{m+1} f_2 h_0' + \frac{m-1-2n}{m+1} (2 f_0' h_2 + f_1' h_1) \right] = 0 \quad (10b)$$

が得られる。 $f_0, f_1, \dots, h_0, h_1, \dots$ が満足しなければならない境界条件は式 (4 a) および (4 c) より

$$\eta = 0 : f_0 = f_0' = 0, \quad h_0 = 1$$

$$f_1 = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f_1' = h_1 = 0$$

$$f_2 = f_2' = h_2 = 0$$

$$\eta = \infty : f_0' = 1, \quad h_0 = 0$$

$$f_1' = h_1 = 0$$

$$f_2' = h_2 = 0$$

である。

式 (8 a) は Falkner-Skan 方程式であり、Hartree⁶⁾, Rosenhead⁷⁾ らによって広範囲な m の値に対する数値解が求められている。また (8 b) 式はただちに積分できて

$$h_0(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \exp \left(- \int_0^{\eta} P_r f_0(\eta) d\eta \right) d\eta$$

となる。式 (9 a) および (9 b) は $m=0: n=0, 0.5, 1.0$ および $m=1: n=0, 0.5, 1.0, P_r=0.72$ なる場合について Runge-Kutta-Gill 法により有効数字 5 桁の精度で数値的に積分した。計算にあたっては北海道大学計算センターに設置されている HIPAC 103 を使用した。ただし f_2', h_2' に対する計算は行なわなかった。この結果を表 1~16 および第 2~7 図に示してある。

3. 表面摩擦応力および熱伝達

壁面上における摩擦応力 $\tau'(x')$ および単位面積当りの熱通過量 $q'(x')$ はそれぞれ

$$\tau'(x') = \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=0}$$

$$q'(x') = -k \left(\frac{\partial T'}{\partial y'} \right)_{y'=0}$$

であって、これらを無次元形で表示すれば

$$\tau(x) = \frac{\tau'(x')}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \left[\frac{2(m+1)}{R_c} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3m-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} \quad (11a)$$

$$q(x) = \frac{q'(x')}{(k/a)(T_w - T_\infty)} = - \left[\frac{R_c(m+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (11b)$$

となる。ここに

$$R_c = \frac{u_0 a}{\nu}$$

である。局所 Nusselt 数 N_{ux} を

$$N_{ux} = xq(x)$$

によって定義すれば、式(11b)より

$$N_{ux} = - \left[\frac{R_c(m+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

となる。いま吹出しおよび吸込みが存在しない場合の $\tau(x)$, N_{ux} をそれぞれ $\tau_0(x)$, N_{ux0} と書けば

$$\tau_0(x) = \left[\frac{2(m+1)}{R_c} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3m-1}{2}} \left(\frac{d^2 f_0}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} \quad (12a)$$

$$N_{ux0} = - \left[\frac{R_c(m+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{dh_0}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (12b)$$

となる。吹出しおよび吸込みの効果は τ/τ_0 , N_{ux}/N_{ux0} なる比の形で表示するのが便利である。式(11a), (11b), (12a) および (12b) から

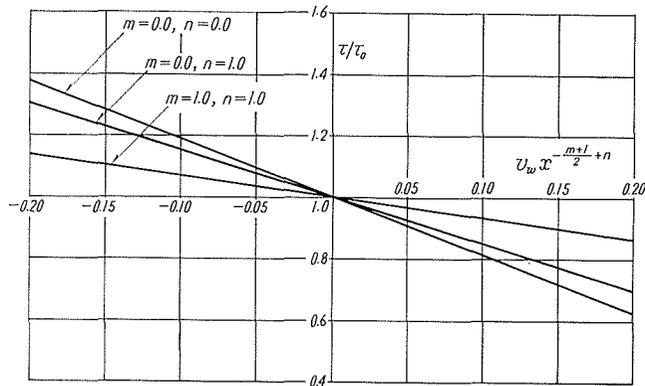
$$\frac{\tau(x)}{\tau_0(x)} = 1 + \frac{f_1''(0)}{f_0''(0)} \xi + O(\xi^2) = 1 - K(v_w x^{-\frac{m-1}{2}+n}) + O(\xi^2) \quad (13a)$$

$$\frac{N_{ux}}{N_{ux0}} = 1 + \frac{h_1'(0)}{h_0'(0)} \xi + O(\xi^2) = 1 - M(v_w x^{-\frac{m-1}{2}+n}) + O(\xi^2) \quad (13b)$$

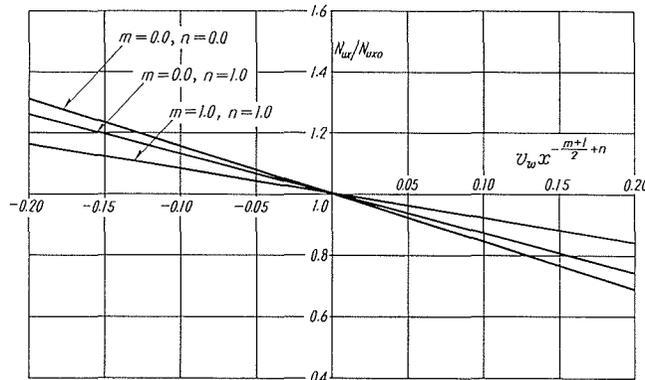
が得られる。 K および M はそれぞれ正の定数であって表 17 に示す通りである。また第 8 図および第 9 図には ξ と τ/τ_0 および N_{ux}/N_{ux0} との関係を示してある。物理的に当然予測される

表 17

m	n	f_0''	f_1''	$K(-f_1''/f_0'')$	h_0'	h_1'	$M(-h_1'/h_0')$
0.0	0.0	0.46960	-0.86571	1.84351	-0.41810	0.65042	1.55566
	0.5	0.46960	-0.77407	1.64836	-0.41810	0.58308	1.39460
	1.0	0.46960	-0.71174	1.51562	-0.41810	0.53686	1.28405
1.0	0.0	1.23588	-0.57476	0.46506	-0.50150	0.46426	0.92574
	0.5	1.23588	-0.56162	0.45443	-0.50150	0.41671	0.83093
	1.0	1.23588	-0.79563	0.64377	-0.50150	0.40388	0.80534



第 8 図



第 9 図

ように、吹出しは摩擦応力および熱伝達率を減少させるが、吸込みは逆にこれらを増加させる。また第 8 図および第 9 図に見るように同一の強さの吹出しあるいは吸込みであっても、圧力勾配のきついほど摩擦応力および熱伝達に対する影響は減少することがわかる。すなわち圧力勾配と吹出しあるいは吸込みとの相互作用により、負の圧力勾配については吹出しおよび吸込みの効果は相対的に減少するのである。

吹出しおよび吸込みの効果を明確にするために数値的な検討を行なってみよう。まず $m=n=0$ すなわち圧力勾配のない平板上に一樣な吹出しが存在する場合、 $\xi=v_w x^{1/2}=0.1$ なる位置は摩擦応力および局所 Nusselt 数がそれぞれ 18% および 16% だけ減少する点に対応して

いる。 v_w は吹出し速度 v'_w を $u_0 R_e^{-\frac{1}{2}}$ で割ったものに等しいから、 $x=10^2$ なる位置では

$$\frac{v'_w}{u_0} = 0.1 \times 10^{-1} \times R_e^{-\frac{1}{2}}$$

となる。したがって $R_e = 10^4$ のときには代表速度のわずか 0.01% 程度の速度をもつ吹出しが存在しても摩擦応力および熱伝達率を 20% 近く減少させることが可能である。また $m=1$, $n=0$ なるときは、 $\xi = v_w = (v'_w/u_0) R_e^{\frac{1}{2}} = 0.1$ において摩擦応力および熱伝達はそれぞれ 6% および 8% だけ減少する。すなわち負の圧力勾配が存在する場合には代表速度の 0.1% もの吹出し速度を与えても摩擦応力および熱伝達の減少量は 10% 以下である。

4. 結 論

流れ方向に x^{2m} に比例する圧力勾配を有する層流境界層について、壁面に x^n に比例する吹出しあるいは吸込みが存在する場合の解析を行なった。これは物理的には頂角 $2\pi m/(m+1)$ なるくさび形物体表面の層流境界層に対する境界層制御の範ちゅうに属するものである。 n および m の値は全く独立に選定することができる。吹出しは摩擦応力および熱伝達を減少させ、吸込みは逆にこれらを増加させることは圧力勾配が存在しない場合と同様であるが、圧力勾配の存在は吹出しおよび吸込みの効果に大きな影響をおよぼすことが明らかとなった。すなわち負の圧力勾配が存在するときは摩擦応力および熱伝達におよぼす吹出しおよび吸込みの効果は圧力勾配が存在しない場合に比較して著しく減少する。

補 遺

前述の解析では $m=-1$ のときは特異な場合に属し解が求められない。境界層外端速度が x^{-1} に比例して減少する例は、物理的には一定角度の拡がり管あるいは狭まり管に見られるものである。したがってここで扱うのは拡がり流路の壁面に吹出しあるいは吸込みが存在する場合の層流境界層の問題である。基礎方程式は式 (1 a), (1 b), (1 c) と同様であるが、以下の取り扱いにおいては x', y', u', v' の代りに x_1, x_2, u_1, u_2 を用いるものとする。

境界層外端速度を

$$U(x_1) = -\frac{U_\infty l}{x_1}$$

と書き、無次元変数 ξ, η を

$$\xi = \frac{v_w}{l^n (\nu U_\infty l)^{\frac{1}{2}}} x_1^{n+1}, \quad \eta = x_2 \left(-\frac{U}{x_1 \nu} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x_2}{x_1} \left(\frac{U_\infty l}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義する。ただし壁面における吹出しあるいは吸込み速度は $v_w(x_1/l)^n$ とおいてあるから、 v_w は速度の次元を有する。流線関数を

$$\psi(x_1, x_2) = -(\nu U_\infty l)^{\frac{1}{2}} F(\xi, \eta)$$

$$F(\xi, \eta) = f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \dots \quad (\text{A } 1)$$

なる形に仮定すれば，速度成分は

$$u_1 = -U_\infty l x_1^{-1} \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$u_2 = -(\nu U_\infty l)^{\frac{1}{2}} x_1^{-1} \left\{ \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} - (n+1) \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right\}$$

となるから，これらを境界層方程式(3 b)に代入すれば

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + 1 + (n+1) \xi \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (\text{A } 2)$$

となる。式(A 1)を式(A 2)に代入し， ξ の昇べきの順に整理すれば

$$f_0''' - (f_0')^2 + 1 = 0 \quad (\text{A } 3)$$

$$f_1''' + (n-1)f_0' f_1' - (n+1)f_0'' f_1 = 0 \quad (\text{A } 4)$$

$$f_2''' - 2n f_0' f_2' - n f_1'' - (n+1)(f_1 f_1' + 2f_0' f_2) = 0 \quad (\text{A } 5)$$

なる一連の常微分方程式が得られる。境界条件は

$$\eta = 0 : f_0 = f_0' = 0$$

$$f_1 = 1/(1+n), \quad f_1' = 0$$

$$f_2 = f_2' = 0$$

$$\eta = \infty : f_0' = 1, \quad f_1' = 0, \quad f_2' = 0$$

である。(A 3)はすでに Pohlhausen⁸⁾によって解かれている。Rosenhead⁷⁾には $f_0''(0) = 1.1547$ と与えられているが，より高精度の計算では $f_0''(0) = 1.154701$ となる。式(A 3)および(A 4)の解を表 A 1, A 2 および図 A 1 に示してある。吹出しおよび吸込みが存在しない場合の摩擦応力を $\tau_0(x_1)$ とすれば

$$\frac{\tau(x_1)}{\tau_0(x_1)} = 1 + \frac{f_1''(0)}{f_0''(0)} \xi + O(\xi^2)$$

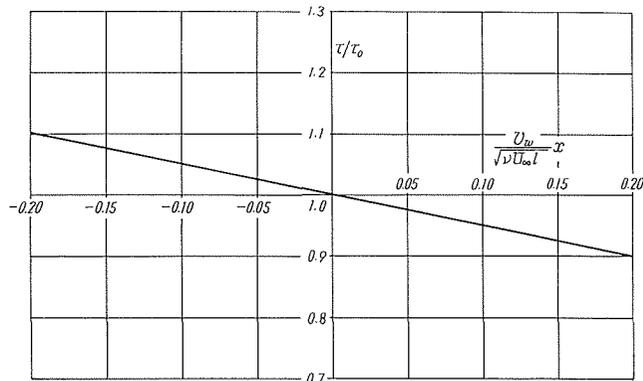


図 A 2

$$= 1 - 0.49999 \left(\frac{v_w}{(\nu U_\infty l)^{\frac{1}{2}}} x_1 \right) + O\left(\frac{x^2}{l^2}\right) \quad (\text{A } 6)$$

が得られる。式(A 6)の関係を図 A 2 に示してある。なお温度境界層についてはこの方法は適用できない。

参 考 文 献

- 1) Griffith, A. A. and Meredith, F. W.: Rep. Aero. Coun., Lond. No. 2315 (1936).
- 2) Schlichting, H. and Busemann, K.: Schr. Dtsch. Akad. Luftfahrtf., 7 B (1943), 25.
- 3) Terril, R. M.: Phil. Trans., Vol. 253, A. 1022 (1960), 55.
- 4) Eichhorn, R.: Trans. ASME., Series C, Vol. 83 (1961), 206.
- 5) Sparrow, E. M. and Cess, R. D.: Trans. ASME., Series C, Vol. 83 (1961), 387.
- 6) Hartree, D. R.: Proc. Cambr. Phil. Soc., 33, Part 2 (1937), 223.
- 7) Losenhead, L.: Laminar Boundary Layers., Oxford University Press. (1963), 250.
- 8) Pohlhausen, K.: ZAMM., 1 (1921), 252.

表 1

$m = 0.0$
 $f_o''' + f_o f_o'' = 0$

η	f_o	f_o'	f_o''
0.0	0.00000	0.00000	0.46960
0.1	0.00235	0.04696	0.46956
0.2	0.00939	0.09391	0.46931
0.3	0.02115	0.14081	0.46881
0.4	0.03755	0.18761	0.46725
0.5	0.05864	0.23423	0.46503
0.6	0.08439	0.28058	0.46173
0.7	0.11474	0.32653	0.45718
0.8	0.14967	0.37196	0.45119
0.9	0.18911	0.41672	0.44363
1.0	0.23299	0.46063	0.43438
1.1	0.28121	0.50353	0.42337
1.2	0.33366	0.54525	0.41057
1.3	0.39021	0.58559	0.39598
1.4	0.45072	0.62439	0.37969
1.5	0.51503	0.66147	0.36180
1.6	0.58296	0.69669	0.34249
1.7	0.65430	0.72993	0.32195
1.8	0.72887	0.76106	0.30044
1.9	0.80644	0.78999	0.27825
2.0	0.88679	0.81669	0.25567
2.2	1.05495	0.86330	0.21058
2.4	1.23153	0.90107	0.16756
2.6	1.41482	0.93060	0.12861
2.8	1.60326	0.95288	0.09511
3.0	1.79557	0.96905	0.06771
3.2	1.99058	0.98057	0.04657
3.4	2.18747	0.98797	0.03054
3.6	2.38559	0.99289	0.01933
3.8	2.58449	0.99594	0.01176
4.0	2.78389	0.99777	0.00687
4.2	2.98356	0.99881	0.00386
4.4	3.18336	0.99939	0.00208
4.6	3.38329	0.99970	0.00108
4.8	3.58325	0.99986	0.00053
5.0	3.78323	0.99994	0.00026
5.2	3.98323	0.99997	0.00012
5.4	4.18322	0.99999	0.00005
5.6	4.38322	0.99999	0.00002
5.8	4.58322	0.99999	0.00000
6.0	4.78322	1.00000	0.00000

表 2

$m = 0$
 $h_o'' + P_x(f_o, h_o) = 0$

η	h_o	h_o'
0.0	1.00000	-0.41810
0.1	0.95819	-0.41808
0.2	0.91639	-0.41691
0.3	0.87462	-0.41746
0.4	0.83291	-0.41659
0.5	0.79132	-0.41517
0.6	0.74990	-0.41305
0.7	0.70874	-0.41011
0.8	0.66791	-0.40623
0.9	0.62752	-0.40132
1.0	0.58768	-0.39528
1.1	0.54851	-0.38804
1.2	0.51012	-0.37955
1.3	0.47264	-0.36979
1.4	0.43620	-0.35878
1.5	0.40093	-0.34653
1.6	0.36693	-0.33310
1.7	0.33434	-0.31859
1.8	0.30325	-0.30313
1.9	0.27374	-0.28683
2.0	0.24590	-0.26988
2.2	0.19543	-0.23469
2.4	0.15205	-0.19909
2.6	0.11572	-0.16456
2.8	0.08607	-0.13243
3.0	0.06252	-0.10368
3.2	0.04433	-0.07895
3.4	0.03066	-0.05844
3.6	0.02068	-0.04204
3.8	0.01359	-0.02939
4.0	0.00871	-0.01997
4.2	0.00542	-0.01319
4.4	0.00329	-0.00846
4.6	0.00194	-0.00527
4.8	0.00111	-0.00319
5.0	0.00061	-0.00188
5.2	0.00033	-0.00107
5.4	0.00016	-0.00059
5.6	0.00007	-0.00032
5.8	0.00002	-0.00017
6.0	0.00000	-0.00008

表 3

$$f_i''' + f_0 f_i'' + 2f_0' f_i' - f_0'' f_i' = 0$$

$$f_i(0) = -1/\sqrt{2}$$

η	f_i	f_i'	f_i''
0.0	-0.70711	0.00000	-0.86571
0.1	-0.71132	-0.08325	-0.79923
0.2	-0.72353	-0.15984	-0.73241
0.3	-0.74507	-0.22971	-0.66497
0.4	-0.76925	-0.29280	-0.59675
0.5	-0.80139	-0.34903	-0.52769
0.6	-0.83883	-0.39832	-0.45789
0.7	-0.88083	-0.44059	-0.38748
0.8	-0.92671	-0.47580	-0.31681
0.9	-0.97575	-0.50395	-0.24631
1.0	-1.02726	-0.52509	-0.17655
1.1	-1.08054	-0.53931	-0.10821
1.2	-1.13490	-0.54680	-0.04206
1.3	-1.18969	-0.54783	0.02106
1.4	-1.24426	-0.54272	0.08028
1.5	-1.29804	-0.53193	0.13474
1.6	-1.35048	-0.51596	0.18363
1.7	-1.40108	-0.49541	0.22623
1.8	-1.44945	-0.47094	0.26197
1.9	-1.49516	-0.44326	0.29045
2.0	-1.53799	-0.41310	0.31147
2.2	-1.61421	-0.34853	0.33146
2.4	-1.67725	-0.28231	0.32471
2.6	-1.72737	-0.21986	0.29684
2.8	-1.76567	-0.16449	0.25518
3.0	-1.79378	-0.11820	0.20726
3.2	-1.81359	-0.08157	0.15955
3.4	-1.82701	-0.05405	0.11669
3.6	-1.83574	-0.03439	0.08123
3.8	-1.84119	-0.02101	0.05389
4.0	-1.84446	-0.01233	0.03412
4.2	-1.84634	-0.00695	0.02063
4.4	-1.84738	-0.00376	0.01193
4.6	-1.84794	-0.00195	0.00659
4.8	-1.84822	-0.00097	0.00348
5.0	-1.84836	-0.00046	0.00177
5.2	-1.84842	-0.00021	0.00085
5.4	-1.84845	-0.00009	0.00039
5.6	-1.84846	-0.00003	0.00017
5.8	-1.84847	-0.00001	0.00008
6.0	-1.84847	-0.00000	0.00003

表 4

$$h_i'' + P_r(f_0 h_i' + 2f_0' h_0' - f_0'' h_1) = 0$$

η	h_i	h_i'
0.0	0.00000	0.650422
0.1	0.06291	0.60780
0.2	0.12155	0.56491
0.3	0.17587	0.52153
0.4	0.22583	0.47751
0.5	0.27135	0.43274
0.6	0.31235	0.38718
0.7	0.34876	0.34089
0.8	0.38051	0.29397
0.9	0.40754	0.24659
1.0	0.42982	0.19903
1.1	0.44735	0.15150
1.2	0.46016	0.10471
1.3	0.46833	0.05880
1.4	0.47198	0.01437
1.5	0.47127	-0.02808
1.6	0.46644	-0.06802
1.7	0.45777	-0.10496
1.8	0.44556	-0.13843
1.9	0.43021	-0.16802
2.0	0.41210	-0.19339
2.2	0.36938	-0.23070
2.4	0.32104	-0.24978
2.6	0.27061	-0.25180
2.8	0.22127	-0.23948
3.0	0.17553	-0.21652
3.2	0.13510	-0.18702
3.4	0.10089	-0.15483
3.6	0.07312	-0.12318
3.8	0.05143	-0.09435
4.0	0.03510	-0.06957
4.2	0.02325	-0.04966
4.4	0.01493	-0.03421
4.6	0.00929	-0.02278
4.8	0.00559	-0.01469
5.0	0.00324	-0.00917
5.2	0.00180	-0.00555
5.4	0.00094	-0.00326
5.6	0.00044	-0.00186
5.8	0.00015	-0.00103
6.0	0.00000	-0.00056

表 5

$$f_i''' + f_0 f_i'' + 3f_0' f_i' - 2f_0'' f_0' = 0$$

$$f_i(0) = -\sqrt{2}/3$$

η	f_i	f_i'	f_i''
0.0	-0.47140	0.00000	-0.77407
0.1	-0.47516	-0.07409	-0.70766
0.2	-0.48600	-0.14153	-0.64127
0.3	-0.50325	-0.20234	-0.57494
0.4	-0.52625	-0.25653	-0.50877
0.5	-0.55433	-0.30411	-0.44289
0.6	-0.58685	-0.34512	-0.37747
0.7	-0.62314	-0.37962	-0.31276
0.8	-0.66256	-0.40771	-0.24906
0.9	-0.70447	-0.42948	-0.18674
1.0	-0.74825	-0.44511	-0.12623
1.1	-0.79329	-0.45480	-0.06803
1.2	-0.83902	-0.45881	-0.01268
1.3	-0.88488	-0.45745	0.03924
1.4	-0.93035	-0.45109	0.08715
1.5	-0.97495	-0.44018	0.13049
1.6	-1.01825	-0.42517	0.16873
1.7	-1.05986	-0.40661	0.20144
1.8	-1.09947	-0.38508	0.22829
1.9	-1.13680	-0.36116	0.24909
2.0	-1.17164	-0.33546	0.26379
2.2	-1.23334	-0.28115	0.27554
2.4	-1.28409	-0.22665	0.26633
2.6	-1.32424	-0.17569	0.24103
2.8	-1.35478	-0.13091	0.20557
3.0	-1.37712	-0.09374	0.16591
3.2	-1.39281	-0.06449	0.12707
3.4	-1.40341	-0.04262	0.09254
3.6	-1.41028	-0.02706	0.06418
3.8	-1.41457	-0.01650	0.04246
4.0	-1.41713	-0.00967	0.02681
4.2	-1.41861	-0.00545	0.01617
4.4	-1.41942	-0.00295	0.00933
4.6	-1.41986	-0.00154	0.00514
4.8	-1.42008	-0.00078	0.00271
5.0	-1.42019	-0.00038	0.00137
5.2	-1.42025	-0.00019	0.00066
5.4	-1.42028	-0.00009	0.00030
5.6	-1.42029	-0.00005	0.00012
5.8	-1.42030	-0.00003	0.00005
6.0	-1.42031	-0.00000	0.00001

表 6

$$h_i'' + P_r(f_0 h_i' + 3f_0' h_0' - 2f_0'' h_1) = 0$$

η	h_i	h_i'
0.0	0.00000	0.583084
0.1	0.05617	0.54049
0.2	0.10809	0.49781
0.3	0.15573	0.45498
0.4	0.19908	0.41198
0.5	0.23812	0.36881
0.6	0.27284	0.32553
0.7	0.30323	0.28223
0.8	0.32923	0.23904
0.9	0.35105	0.19615
1.0	0.36854	0.15378
1.1	0.38183	0.11221
1.2	0.39102	0.07173
1.3	0.39623	0.03221
1.4	0.39762	-0.00451
1.5	0.39540	-0.03956
1.6	0.38979	-0.07208
1.7	0.38108	-0.10171
1.8	0.36956	-0.12816
1.9	0.35556	-0.15116
2.0	0.33944	-0.17052
2.2	0.30235	-0.19791
2.4	0.26128	-0.21036
2.6	0.21911	-0.20921
2.8	0.17834	-0.19690
3.0	0.14089	-0.17653
3.2	0.10804	-0.15142
3.4	0.08043	-0.12465
3.6	0.05812	-0.09869
3.8	0.04078	-0.07528
4.0	0.02777	-0.05539
4.2	0.01836	-0.03937
4.4	0.01176	-0.02704
4.6	0.00752	-0.01797
4.8	0.00441	-0.01157
5.0	0.00256	-0.00721
5.2	0.00142	-0.00436
5.4	0.00074	-0.00256
5.6	0.00035	-0.00147
5.8	0.00012	-0.00083
6.0	0.00000	-0.00046

表 7

$m = 0, n = 1.0$

$$f_i''' + f_0 f_i'' + 4f_0' f_i' - 3f_0'' f_i = 0$$

$$f_i(0) = -1/2\sqrt{2}$$

η	f_i	f_i'	f_i''
0.0	-0.35355	0.00000	-0.711730
0.1	-0.35700	-0.06785	-0.64538
0.2	-0.36690	-0.12909	-0.57934
0.3	-0.38260	-0.18374	-0.51391
0.4	-0.40344	-0.23190	-0.44935
0.5	-0.42877	-0.27365	-0.38591
0.6	-0.45796	-0.30912	-0.32385
0.7	-0.49039	-0.33847	-0.26341
0.8	-0.52545	-0.36187	-0.20485
0.9	-0.56257	-0.37952	-0.14847
1.0	-0.60117	-0.39165	-0.09458
1.1	-0.64072	-0.39853	-0.04352
1.2	-0.68071	-0.40046	-0.00435
1.3	-0.72066	-0.39778	0.04864
1.4	-0.76013	-0.39086	0.08896
1.5	-0.79870	-0.38023	0.12496
1.6	-0.83604	-0.36603	0.15630
1.7	-0.87181	-0.34903	0.18272
1.8	-0.90577	-0.32965	0.20403
1.9	-0.93768	-0.30840	0.22014
2.0	-0.96740	-0.28579	0.23110
2.2	-1.01986	-0.23854	0.23828
2.4	-1.06284	-0.19163	0.22824
2.6	-1.09673	-0.14812	0.20518
2.8	-1.12245	-0.11010	0.17412
3.0	-1.14122	-0.07867	0.13999
3.2	-1.15438	-0.05403	0.10690
3.4	-1.16325	-0.03565	0.07767
3.6	-1.16899	-0.02260	0.05378
3.8	-1.17257	-0.01376	0.03552
4.0	-1.17471	-0.00805	0.02240
4.2	-1.17594	-0.00452	0.01351
4.4	-1.17661	-0.00244	0.00779
4.6	-1.17697	-0.00123	0.00430
4.8	-1.17715	-0.00062	0.00228
5.0	-1.17724	-0.00029	0.00116
5.2	-1.17728	-0.00012	0.00057
5.4	-1.17729	-0.00004	0.00027
5.6	-1.17730	-0.00002	0.00013
5.8	-1.17730	-0.00000	0.00007
6.0	-1.17730	-0.00000	0.00004

表 8

$m = 0, n = 1.0$

$$h_i'' + P_r(f_0 h_i' + 4f_i h_0' - 3f_0' h_i) = 0$$

η	h_i	h_i'
0.0	0.00000	0.536860
0.1	0.05151	0.49429
0.2	0.09886	0.45178
0.3	0.14191	0.40939
0.4	0.18074	0.36720
0.5	0.21536	0.32528
0.6	0.24581	0.28375
0.7	0.27213	0.24272
0.8	0.29436	0.20234
0.9	0.31263	0.16277
1.0	0.32697	0.12421
1.1	0.33751	0.08687
1.2	0.34439	0.05098
1.3	0.34777	0.01681
1.4	0.34782	-0.01539
1.5	0.34476	-0.04536
1.6	0.33883	-0.07284
1.7	0.33028	-0.09760
1.8	0.31941	-0.11943
1.9	0.30650	-0.13815
2.0	0.29186	-0.15367
2.2	0.25881	-0.17432
2.4	0.22276	-0.18350
2.6	0.18616	-0.18077
2.8	0.15106	-0.16890
3.0	0.11903	-0.15058
3.2	0.09107	-0.12859
3.4	0.06766	-0.10548
3.6	0.04882	-0.08327
3.8	0.03420	-0.06336
4.0	0.02327	-0.04654
4.2	0.01536	-0.03302
4.4	0.00984	-0.02266
4.6	0.00612	-0.01505
4.8	0.00368	-0.00968
5.0	0.00213	-0.00604
5.2	0.00117	-0.00366
5.4	0.00060	-0.00216
5.6	0.00027	-0.00125
5.8	0.00008	-0.00072
6.0	0.00000	-0.00042

表 9

$m = 1.0$

$$f_0''' + f_0 f_0'' + 1.0 - (f_0')^2 = 0$$

η	f_0	f_0'	f_0''
0.0	0.00000	0.00000	1.23588
0.1	0.00599	0.11826	1.13283
0.2	0.02332	0.22661	1.03445
0.3	0.05099	0.32524	0.93863
0.4	0.086056	0.41445	0.84633
0.5	0.13358	0.49464	0.75831
0.6	0.18670	0.56628	0.67517
0.7	0.24657	0.62986	0.59735
0.8	0.31442	0.68593	0.52513
0.9	0.38352	0.73707	0.45867
1.0	0.45922	0.77786	0.39801
1.1	0.53890	0.81487	0.34309
1.2	0.62202	0.84667	0.29377
1.3	0.70808	0.87380	0.24983
1.4	0.79665	0.89680	0.21100
1.5	0.88732	0.91616	0.17695
1.6	0.97977	0.93234	0.14735
1.7	1.07370	0.94577	0.12181
1.8	1.16885	0.95683	0.09996
1.9	1.26500	0.96587	0.08142
2.0	1.36197	0.97321	0.06582
2.2	1.55776	0.98385	0.04204
2.4	1.75525	0.99055	0.02602
2.6	1.95380	0.99463	0.01559
2.8	2.15299	0.99704	0.00905
3.0	2.35255	0.99842	0.00507
3.2	2.55232	0.99916	0.00275
3.4	2.75221	0.99959	0.00144
3.6	2.95215	0.99980	0.00073
3.8	3.15212	0.99991	0.00035
4.0	3.35211	0.99996	0.00017
4.2	3.55211	0.99998	0.00007
4.4	3.75210	0.99999	0.00003
4.6	3.95210	1.00000	0.00001
4.8	4.15210	1.00000	0.00000
5.0	4.35211	1.00000	0.00000

表 10

$m = 1.0$

$$h_0'' + P_r f_0 h_0' = 0$$

η	h_0	h_0'
0.0	1.00000	-0.50150
0.1	0.94985	-0.50143
0.2	0.89973	-0.50093
0.3	0.84969	-0.49962
0.4	0.79984	-0.49715
0.5	0.75031	-0.49323
0.6	0.70125	-0.48759
0.7	0.65285	-0.48006
0.8	0.60531	-0.47052
0.9	0.55882	-0.45889
1.0	0.51360	-0.44519
1.1	0.46985	-0.42948
1.2	0.42776	-0.41191
1.3	0.38752	-0.39266
1.4	0.34928	-0.37196
1.5	0.31317	-0.35008
1.6	0.27929	-0.32732
1.7	0.24772	-0.30401
1.8	0.21850	-0.28043
1.9	0.19164	-0.25691
2.0	0.16711	-0.23372
2.2	0.12485	-0.18942
2.4	0.09106	-0.14922
2.6	0.06481	-0.11425
2.8	0.04498	-0.08500
3.0	0.03043	-0.06145
3.2	0.02005	-0.04317
3.4	0.01286	-0.02946
3.6	0.00801	-0.01954
3.8	0.00484	-0.01259
4.0	0.00282	-0.00788
4.2	0.00158	-0.00479
4.4	0.00084	-0.00283
4.6	0.00039	-0.00162
4.8	0.00015	-0.00090
5.0	0.00001	-0.00049

表 11

m = 1.0 , n = 0.0

$$f_1''' + f_0 f_1'' + f_0'' f_1 - 2f_0' f_1' = 0$$

η	f_1	f_1'	f_1''
0.0	-1.00000	0.00000	-0.574761
0.1	-1.00267	-0.05248	-0.45671
0.2	-1.00992	-0.09171	-0.34977
0.3	-1.02067	-0.12183	-0.25460
0.4	-1.03399	-0.14303	-0.17143
0.5	-1.04902	-0.15651	-0.10018
0.6	-1.065076	-0.16345	-0.04046
0.7	-1.08153	-0.16497	0.00835
0.8	-1.09792	-0.16212	0.04706
0.9	-1.11385	-0.15586	0.07656
1.0	-1.12901	-0.14708	0.09787
1.1	-1.14320	-0.13653	0.11203
1.2	-1.15628	-0.12487	0.12009
1.3	-1.16816	-0.11268	0.12307
1.4	-1.17881	-0.10039	0.12196
1.5	-1.18825	-0.08839	0.11766
1.6	-1.19651	-0.07694	0.11100
1.7	-1.20366	-0.06624	0.10270
1.8	-1.20979	-0.05643	0.09340
1.9	-1.21498	-0.04758	0.08361
2.0	-1.21934	-0.03971	0.07377
2.2	-1.22593	-0.02685	0.05516
2.4	-1.23031	-0.01746	0.03924
2.6	-1.23311	-0.01093	0.02664
2.8	-1.23483	-0.00659	0.01730
3.0	-1.23585	-0.00382	0.01076
3.2	-1.23644	-0.00213	0.00642
3.4	-1.23676	-0.00115	0.00367
3.6	-1.23693	-0.00059	0.00201
3.8	-1.23701	-0.00029	0.00106
4.0	-1.23705	-0.00014	0.00054
4.2	-1.23707	-0.00006	0.00026
4.4	-1.23708	-0.00002	0.00012
4.6	-1.23709	-0.00000	0.00005
4.8	-1.23709	-0.00000	0.00002
5.0	-1.23709	-0.00000	0.00001

表 12

m = 1.0 , n = 0.0

$$h_1'' + P_0(f_0 h_1' + f_1 h_0') = 0$$

η	h_1	h_1'
0.0	0.00000	0.46426
0.1	0.04461	0.42805
0.2	0.08559	0.39135
0.3	0.12286	0.35381
0.4	0.15632	0.31529
0.5	0.18588	0.27582
0.6	0.21146	0.23556
0.7	0.23298	0.19483
0.8	0.25042	0.15404
0.9	0.26380	0.11369
1.0	0.27320	0.07435
1.1	0.27873	0.03659
1.2	0.28059	0.00099
1.3	0.27902	-0.03191
1.4	0.27431	-0.06166
1.5	0.26680	-0.08786
1.6	0.25686	-0.11026
1.7	0.24488	-0.12867
1.8	0.23126	-0.14306
1.9	0.21640	-0.15349
2.0	0.20069	-0.16012
2.2	0.16815	-0.16312
2.4	0.13619	-0.15489
2.6	0.10671	-0.13886
2.8	0.08094	-0.11842
3.0	0.05944	-0.09654
3.2	0.04226	-0.07550
3.4	0.02908	-0.05678
3.6	0.01934	-0.04113
3.8	0.01241	-0.02875
4.0	0.00764	-0.01940
4.2	0.00447	-0.01265
4.4	0.00244	-0.00798
4.6	0.00117	-0.00487
4.8	0.00041	-0.00288
5.0	0.00002	-0.00165

表 13

m = 1.0 , n = 0.5

$$f_1''' + f_0 f_1'' + 1.5 f_0' f_1 - 2.5 f_0' f_1' = 0$$

$$f_1(0) = -2/3$$

η	f_1	f_1'	f_1''
0.0	-0.66666	0.00000	-0.56162
0.1	-0.66927	-0.05017	-0.44362
0.2	-0.67632	-0.08910	-0.33696
0.3	-0.68675	-0.11769	-0.24242
0.4	-0.69962	-0.13800	-0.16030
0.5	-0.71410	-0.15044	-0.09046
0.6	-0.72950	-0.15648	-0.03244
0.7	-0.74522	-0.15729	0.01447
0.8	-0.76082	-0.15393	0.05117
0.9	-0.77591	-0.14737	0.07869
1.0	-0.79021	-0.13846	0.09811
1.1	-0.80355	-0.12798	0.11055
1.2	-0.81578	-0.11655	0.11712
1.3	-0.82684	-0.10471	0.11888
1.4	-0.83672	-0.09290	0.11682
1.5	-0.84544	-0.08144	0.11186
1.6	-0.85303	-0.07059	0.10480
1.7	-0.85958	-0.06055	0.09634
1.8	-0.86517	-0.05135	0.08708
1.9	-0.86988	-0.04312	0.07750
2.0	-0.87383	-0.03585	0.06800
2.2	-0.87976	-0.02405	0.06032
2.4	-0.88367	-0.01553	0.05445
2.6	-0.88615	-0.00965	0.02386
2.8	-0.88766	-0.00577	0.01537
3.0	-0.88855	-0.00333	0.00949
3.2	-0.88906	-0.00184	0.00562
3.4	-0.88933	-0.00098	0.00319
3.6	-0.88948	-0.00050	0.00174
3.8	-0.88955	-0.00024	0.00092
4.0	-0.88959	-0.00011	0.00046
4.2	-0.88960	-0.00004	0.00023
4.4	-0.88961	-0.00001	0.00011
4.6	-0.88961	-0.00000	0.00005
4.8	-0.88961	-0.00000	0.00003
5.0	-0.88961	-0.00000	0.00001

表 14

m = 1.0 , n = 0.5

$$h_1'' + P_0(f_0 h_1' + 1.5 f_1 h_0' - 0.5 f_1' h_1) = 0$$

η	h_1	h_1'
0.0	0.00000	0.41671
0.1	0.03986	0.38055
0.2	0.07610	0.34417
0.3	0.10868	0.30744
0.4	0.13758	0.27036
0.5	0.16275	0.23304
0.6	0.18418	0.19568
0.7	0.20189	0.15857
0.8	0.21592	0.12206
0.9	0.22634	0.08655
1.0	0.23328	0.05249
1.1	0.23690	0.02030
1.2	0.23742	-0.00959
1.3	0.23507	-0.03682
1.4	0.23015	-0.06108
1.5	0.22296	-0.08211
1.6	0.21384	-0.09977
1.7	0.20312	-0.11398
1.8	0.19116	-0.12478
1.9	0.17828	-0.13227
2.0	0.16480	-0.13663
2.2	0.13726	-0.13706
2.4	0.11057	-0.12862
2.6	0.08721	-0.11421
2.8	0.06509	-0.09662
3.0	0.04761	-0.07824
3.2	0.03373	-0.06083
3.4	0.02313	-0.04552
3.6	0.01534	-0.03283
3.8	0.00982	-0.02286
4.0	0.00774	-0.01539
4.2	0.00552	-0.01002
4.4	0.00391	-0.00632
4.6	0.00291	-0.00387
4.8	0.00200	-0.00230
5.0	0.00153	-0.00133

表 15

$m = 1.0, n = 1.0$

$$f''' + f_0 f'' + 3f_0' f' - 4f_0'' f = 0$$

$$f_1(0) = -0.5$$

η	f_1	f_1'	f_1''
0.0	-0.50000	0.00000	-0.795627
0.1	-0.50367	-0.07058	-0.61882
0.2	-0.51355	-0.12436	-0.45999
0.3	-0.52805	-0.16523	-0.32081
0.4	-0.54577	-0.18920	-0.20181
0.5	-0.56552	-0.20426	-0.10260
0.6	-0.58632	-0.21034	-0.02216
0.7	-0.60736	-0.20927	0.04100
0.8	-0.62799	-0.20266	0.08867
0.9	-0.64775	-0.19198	0.12277
1.0	-0.66630	-0.17849	0.14527
1.1	-0.68339	-0.16325	0.15810
1.2	-0.69892	-0.14713	0.16307
1.3	-0.71282	-0.13084	0.16187
1.4	-0.72510	-0.11491	0.15600
1.5	-0.73583	-0.09975	0.14677
1.6	-0.74509	-0.08563	0.13531
1.7	-0.75299	-0.07273	0.12254
1.8	-0.75966	-0.06114	0.10922
1.9	-0.76527	-0.05089	0.09593
2.0	-0.76990	-0.04194	0.08313
2.2	-0.77679	-0.02768	0.06012
2.4	-0.78125	-0.01759	0.04149
2.6	-0.78404	-0.01078	0.02740
2.8	-0.78572	-0.00636	0.01735
3.0	-0.78670	-0.00362	0.01055
3.2	-0.78725	-0.00198	0.00616
3.4	-0.78754	-0.00104	0.00347
3.6	-0.78769	-0.00052	0.00188
3.8	-0.78776	-0.00024	0.00099
4.0	-0.78780	-0.00009	0.00051
4.2	-0.78781	-0.00002	0.00026
4.4	-0.78781	-0.00000	0.00014
4.6	-0.78781	-0.00000	0.00009
4.8	-0.78781	-0.00000	0.00007

表 16

$m = 1.0, n = 1.0$

$$h'' + P_2(f_0' h_1' + 2f_1 h_0' - f_0'' h_1) = 0$$

η	h_1	h_1'
0.0	0.00000	0.40388
0.1	0.03858	0.36774
0.2	0.07354	0.33144
0.3	0.10486	0.29493
0.4	0.13252	0.25823
0.5	0.15650	0.22147
0.6	0.17682	0.18487
0.7	0.19349	0.14869
0.8	0.20658	0.11329
0.9	0.21619	0.07903
1.0	0.22244	0.04633
1.1	0.22552	0.15593
1.2	0.22564	-0.01281
1.3	0.22305	-0.03855
1.4	0.21803	-0.06134
1.5	0.21088	-0.08098
1.6	0.20194	-0.09734
1.7	0.19153	-0.11037
1.8	0.17997	-0.12014
1.9	0.16760	-0.12676
2.0	0.15472	-0.13044
2.2	0.12851	-0.13000
2.4	0.10326	-0.12136
2.6	0.08033	-0.10727
2.8	0.06054	-0.09040
3.0	0.04421	-0.07295
3.2	0.03128	-0.05654
3.4	0.02145	-0.04219
3.6	0.01424	-0.03036
3.8	0.00913	-0.02110
4.0	0.00564	-0.01418
4.2	0.00373	-0.00922
4.4	0.00184	-0.00582
4.6	0.00092	-0.00356
4.8	0.00036	-0.00213
5.0	0.00003	-0.00124

表 A 1

$n = 0$

$$f_0''' - (f_0')^2 + 1 = 0$$

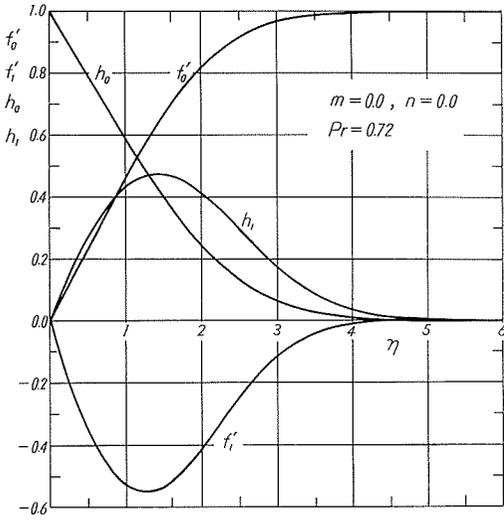
η	f_0	f_0'	f_0''
0.0	0.00000	0.00000	1.154701
0.1	0.00561	0.11048	1.095512
0.2	0.02177	0.21110	0.95781
0.3	0.04751	0.30218	0.86431
0.4	0.08189	0.38418	0.77639
0.5	0.12406	0.45765	0.69421
0.6	0.17377	0.52323	0.61836
0.7	0.22846	0.58154	0.54896
0.8	0.28925	0.63323	0.48595
0.9	0.35491	0.67894	0.42907
1.0	0.42486	0.71924	0.37802
1.2	0.57566	0.78589	0.29179
1.4	0.73820	0.83718	0.22392
1.6	0.90974	0.87646	0.17108
1.8	1.08816	0.90642	0.13027
2.0	1.27182	0.92920	0.09894
2.2	1.45947	0.94648	0.07501
2.4	1.65014	0.95958	0.05678
2.6	1.84309	0.96949	0.04293
2.8	2.03777	0.97698	0.03244
3.0	2.23376	0.98263	0.02449
3.2	2.43073	0.98690	0.01849
3.4	2.62845	0.99012	0.01395
3.6	2.82673	0.99255	0.01032
3.8	3.02543	0.99439	0.00793
4.0	3.22445	0.99577	0.00598
4.2	3.42372	0.99681	0.00451
4.4	3.62316	0.99760	0.00340
4.6	3.82274	0.99819	0.00256
4.8	4.02242	0.99864	0.00193
5.0	4.22219	0.99897	0.00146
5.2	4.42201	0.99922	0.00110
5.4	4.62188	0.99942	0.00083
5.6	4.82178	0.99957	0.00063
5.8	5.02170	0.99968	0.00048
6.0	5.22165	0.99976	0.00037
6.2	5.42160	0.99983	0.00029
6.4	5.62158	0.99988	0.00023
6.6	5.82156	0.99992	0.00019
6.8	6.02155	0.99996	0.00017
7.0	6.22154	0.99999	0.00016

表 A 2

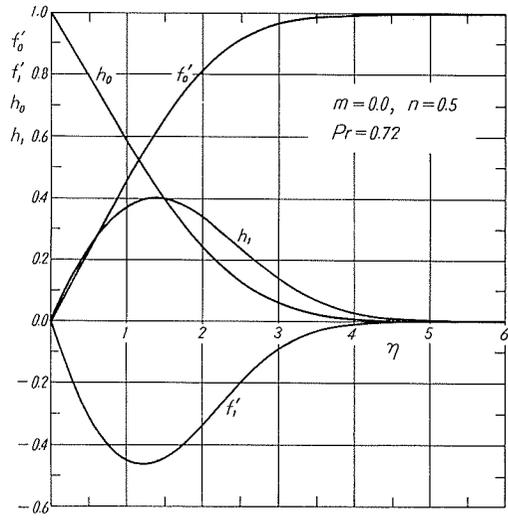
$n = 0$

$$f_1''' - f_0' f_1' - f_0'' f_1 = 0$$

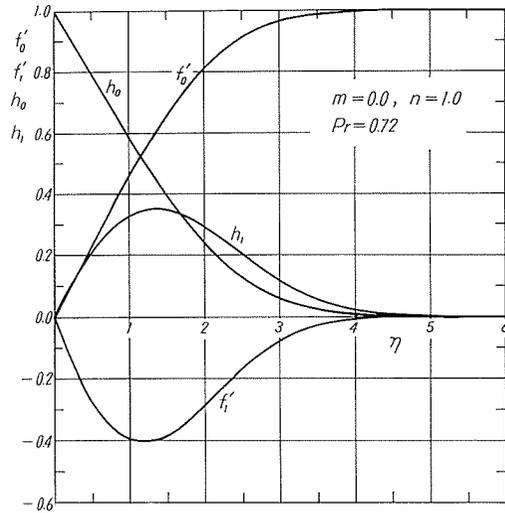
η	f_1	f_1'	f_1''
0.0	1.00000	0.00000	-0.577348
0.1	0.99730	-0.05214	-0.46717
0.2	0.98992	-0.09381	-0.36838
0.3	0.97885	-0.12621	-0.28156
0.4	0.96495	-0.15052	-0.20664
0.5	0.94897	-0.16792	-0.14305
0.6	0.93156	-0.17848	-0.08993
0.7	0.91324	-0.18522	-0.04626
0.8	0.89445	-0.18901	-0.01095
0.9	0.87554	-0.18865	-0.01709
1.0	0.85680	-0.18580	-0.07900
1.2	0.82064	-0.17486	0.06758
1.4	0.78713	-0.15974	0.08162
1.6	0.75686	-0.14285	0.08601
1.8	0.73000	-0.12574	0.08434
2.0	0.70651	-0.10935	0.07914
2.2	0.68618	-0.09420	0.07211
2.4	0.66873	-0.08055	0.06435
2.6	0.65386	-0.06847	0.05656
2.8	0.64124	-0.05791	0.04913
3.0	0.63060	-0.04877	0.04230
3.2	0.62165	-0.04094	0.03616
3.4	0.61415	-0.03426	0.03073
3.6	0.60787	-0.02860	0.02599
3.8	0.60265	-0.02382	0.02191
4.0	0.59829	-0.01979	0.01842
4.2	0.59468	-0.01642	0.01544
4.4	0.59159	-0.01359	0.01292
4.6	0.58922	-0.01122	0.01080
4.8	0.58718	-0.00925	0.00903
5.0	0.58549	-0.00759	0.00754
5.2	0.58412	-0.00621	0.00632
5.4	0.58299	-0.00505	0.00531
5.6	0.58209	-0.00407	0.00449
5.8	0.58136	-0.00324	0.00383
6.0	0.58079	-0.00253	0.00330
6.2	0.58034	-0.00191	0.00289
6.4	0.58002	-0.00137	0.00259
6.6	0.57979	-0.00087	0.00240
6.8	0.57967	-0.00034	0.00229
7.0	0.57963	-0.00006	0.00222



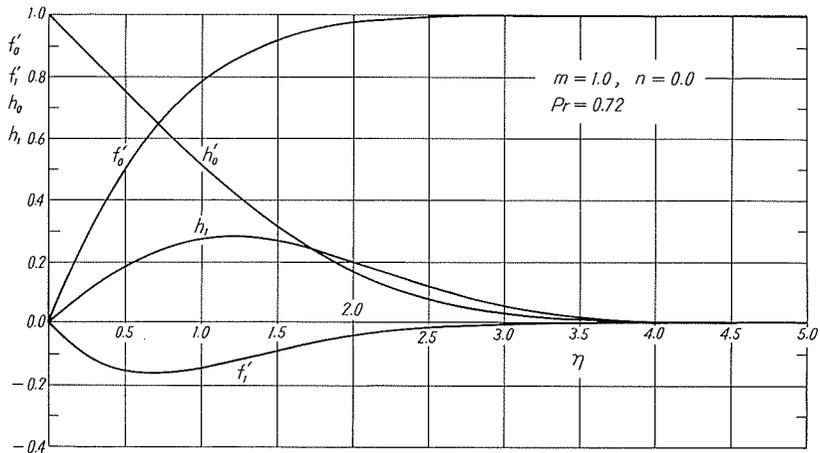
第 2 図



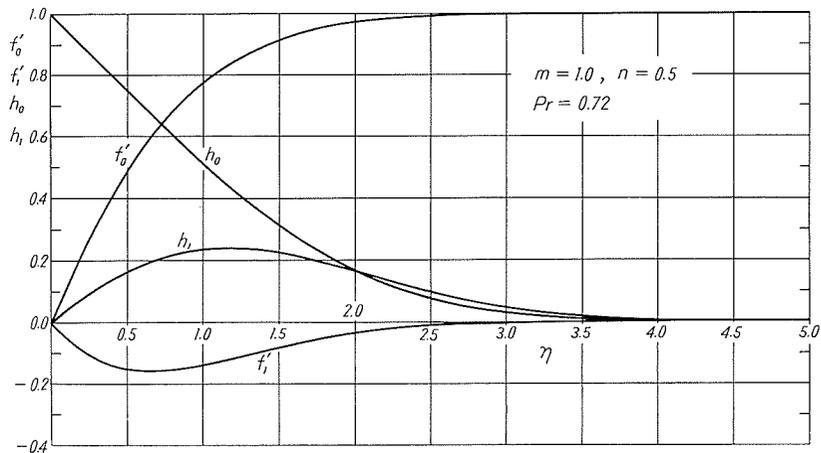
第 3 図



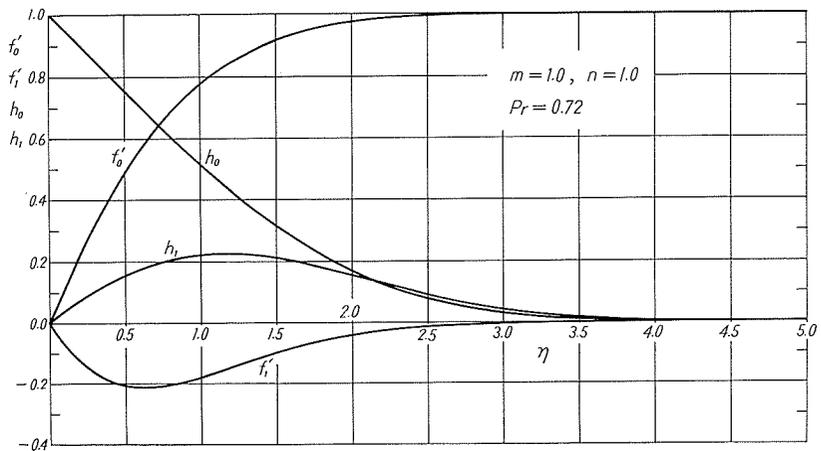
第 4 図



第 5 図



第 6 図



第 7 図

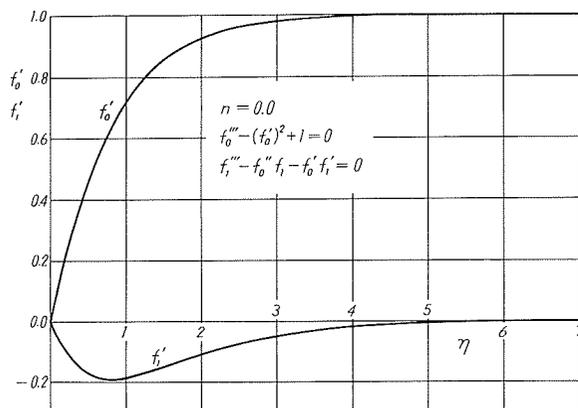


図 A 1