



Title	遊げきのある機械系の衝突振動について
Author(s)	深谷, 健一; Fukaya, Ken-ichi; 入江, 敏博 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 56, 27-38
Issue Date	1970-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/40988
Type	departmental bulletin paper
File Information	56_27-38.pdf



遊げきのある機械系の衝突振動について

深谷 健一* 入江 敏博*

(昭和44年11月29日受理)

On the Impact Vibration of a Mechanical System with Clearances

Ken-ichi FUKAYA Toshihiro IRIE

(Received November 29, 1969)

Abstract

Mechanical systems with clearances are used in various types of machines. In such mechanical systems, impact vibration is often seen between the elements, and the performance of machine is hindered; however, the energy of impact vibration may sometimes be used for special purposes.

In this paper, impact vibration arising when a mass collides against rigid walls under the action of a harmonic exciting force and Coulomb friction in a mass-spring system of one degree of freedom was studied and the conditions for maintaining a stable periodic vibration were analyzed.

It was found from theoretical analysis and numerical calculations that the periodic impact vibration, whose period is n times as large as the input period, appears in the mechanical system without friction; however, the domain of values of frequencies and clearances for causing a periodic vibration decrease as the friction acting on a mass becomes large.

1. は し が き

衝突現象を利用する機械は種々あり、振動輸送機、杭打機、通信機用の機械的フィルター、リードセクタ¹⁾、その他防振装置^{2),3)}(インパクトダンパ)などがあげられる。これらに関する研究も多く、1自由度系⁴⁾、2自由度系^{5)~7)}連続体⁸⁾に対する解析もあるが、とくにインパクトダンパに関しては、過渡的な取り扱い(シミュレーション)^{9),10)}、定常な等間隔周期運動^{11)~15)}、さらに一般的な不等間隔周期運動¹⁶⁾、フーリエ級数を用いて衝突力を展開したもの^{17),18)}などがみられる。このうち多数のものが、運動の安定性に触れている。

実際の機械の中には、剛体要素間を往復し衝突振動を起こす機構のものも多く、その際可動部と他要素間に摩擦力が働かないものは少ない。従来この種のものの研究が見当たらないので、本研究では、安定な周期運動の起こる条件とその存在領域を決定する方法を明らかにする。

2. 記 号

x : 物体の静止(平衡)位置から測った変位

t : 時間

m : 物体の質量

k : ばねこわさ

P : 調和起振力の振幅

* 機械工学第二学科 機械力学講座

ω : 起振力の振動数

F : クーロン摩擦力

d, d^* : 壁面の位置

$\nu = d^*/d$: 壁面位置の比

ϵ : 物体と壁面間の反発係数

n (正整数) : 1 サイクルの衝突振動の間に作用する起振力のサイクル数

$x_{st} = P/K$: 最大起振力による静たわみ

$\omega_n = \sqrt{k/m}$: 質量-ばね系の固有振動数

$\xi = x/x_{st}$: 物体の無次元変位

$\tau = \omega_n t$: 無次元時間

$\tau_{2j}, \tau_{2j+1}, \tau_{2j+2}, \dots$: 壁面に対する物体の衝突時刻

$\tau_1 = \tau_{2j+1} - \tau_{2j}, \tau_2 = \tau_{2j+2} - \tau_{2j+1}$: 衝突間の時間

φ : 外力と衝突時刻間の位相角

$\beta = \omega/\omega_n$: 固有振動数に対する起振振動数の比

$f = F/P$: 最大起振力に対するクーロン摩擦力の比

$(\delta, \delta^*) = (d, d^*)/x_{st}$: 無次元壁面位置

$u_{\mp 0}, u_{\mp 0}^*$: 衝突直前と直後における物体の無次元速度

$\theta_{\mp} = \delta \mp f - \sin \varphi, \theta_{\mp}^* = \delta^* \mp f - \sin(\beta\tau_1 + \varphi)$

$\Delta C^{(2j)}, \Delta D^{(2j)}; \Delta C^{*(2j+1)}, \Delta D^{*(2j+1)}$: 定数 C, D ; C^*, D^* の微小かく乱

$\Delta\tau^{(2j)}, \Delta\tau^{*(2j+1)}, \Delta\tau^{(2j+2)}$: 衝突時刻の微小かく乱

$\Delta u_{\mp 0}, \Delta u_{\mp 0}^*$: 衝突速度の微小かく乱

λ : 微小かく乱量に関する指標

3. 仮 定

本論文ではつぎのような振動系の振動を取り扱う。(図-1 参照)

(1) 質量とこれを支える軽い線型ばねよりなる 1 自由度振動系を考える。

(2) 物体には一定の調和起振力と、その運動と反対方向に一定のクーロン摩擦力が作用する。

(3) 物体はその両側の壁面に、 n サイクルの調和起振力が作用する間に 1 度ずつ周期的な衝突を繰り返す。

(4) 衝突によって物体も壁も変形することなく、また衝突継続時間は衝突間隔に比べてきわめて短いものとする。

(5) 衝突前後の速度の間には反発係数によってきまる一定の関係がある。

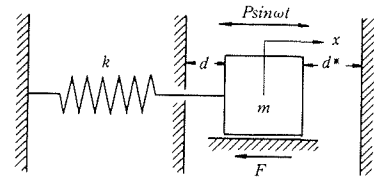


図-1 遊隙のある 1 自由度振動系

4. 周期運動が起こる条件 (非共振の場合)

4.1 非対称振動

物体に調和起振力とクーロン摩擦力が作用するときの運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = \mp F + P \sin \omega t \quad (\dot{x} \geq 0) \quad (1)$$

であるが、これを無次元量を用いて

$$\ddot{\xi} + \xi \pm f = \sin \beta \tau \quad (\dot{\xi} \geq 0) \quad (2)$$

と書く。・は無次元時間 τ に関する微分を表わしている。図-2 のように物体が時刻 $\tau = \tau_{2j}$ にお

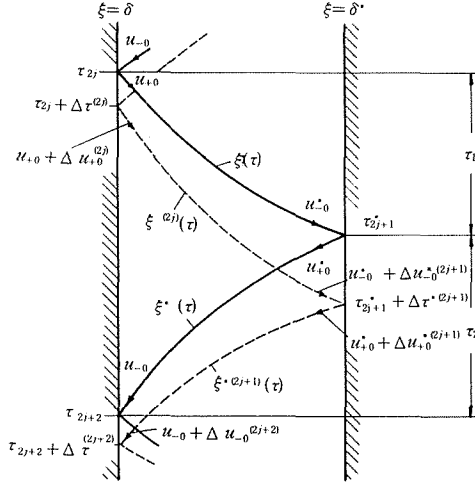


図-2 定常な周期運動とかく乱をうけた運動

いて壁面 $\xi = \delta$ に衝突したのち、時刻 $\tau = \tau_{2j+1}^*$ に他の壁面 $\xi = \delta^*$ に衝突するものとすれば、この間の物体の変位は

$$\xi(\tau) = C \sin \tau + D \cos \tau + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \beta \tau - f \quad (\tau_{2j} \leq \tau \leq \tau_{2j+1}^*) \quad (3)$$

速度は

$$\dot{\xi}(\tau) = C \cos \tau - D \sin \tau + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \beta \tau (> 0) \quad (\tau_{2j} \leq \tau \leq \tau_{2j+1}^*) \quad (4)$$

とくに壁面 ($\xi = \delta$) に衝突した直後 ($\tau = \tau_{2j} + 0$) では

$$\left. \begin{aligned} \delta &= C \sin \tau_{2j} + D \cos \tau_{2j} + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \beta \tau_{2j} - f \\ u_{+0} &= C \cos \tau_{2j} - D \sin \tau_{2j} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \beta \tau_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

他方の壁 ($\xi = \delta^*$) に衝突する直前 ($\tau = \tau_{2j+1}^* - 0$) では

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= C \sin \tau_{2j+1} + D \cos \tau_{2j+1} + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \beta \tau_{2j+1} - f \\ u_{-0}^* &= C \cos \tau_{2j+1} - D \sin \tau_{2j+1} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \beta \tau_{2j+1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(5)より定数 C, D を求め、これを式(6)へ入れて整理することによって

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= (\delta + f - \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi) \cos \tau_1 + (u_{+0} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi) \sin \tau_1 + \frac{1}{1-\beta^2} \sin (\beta \tau_1 + \varphi) - f \\ u_{-0}^* &= -(\delta + f - \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi) \sin \tau_1 + (u_{+0} - \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi) \cos \tau_1 + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos (\beta \tau_1 + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。また物体が壁面 ($\xi = \delta^*$) と衝突後、時刻 $\tau = \tau_{2j+2}$ に最初の壁面 ($\xi = \delta$) に再び衝突するまでの間の変位と速度は

$$\xi^*(\tau) = C^* \sin \tau + D^* \cos \tau + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \beta \tau + f \quad (\tau_{2j+1}^* \leq \tau \leq \tau_{2j+2}) \quad (8)$$

$$\dot{\xi}^*(\tau) = C^* \cos \tau - D^* \sin \tau + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \beta\tau (<0) \quad (\tau_{2j+1}^* \leq \tau \leq \tau_{2j+2}^*) \quad (9)$$

式(7)を導いたと同様の計算によって

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \left\{ \delta^* - f - \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\beta\tau_1 + \varphi) \right\} \cos \tau_2 + \left\{ u_{+0}^* - \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos(\beta\tau_1 + \varphi) \right\} \sin \tau_2 + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi + f \\ u_{-0} &= - \left\{ \delta^* - f - \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\beta\tau_1 + \varphi) \right\} \sin \tau_2 + \left\{ u_{+0}^* - \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos(\beta\tau_1 + \varphi) \right\} \cos \tau_2 + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

そして衝突直前と直後の速度の間には

$$u_{+0} = -\varepsilon u_{-0}, \quad u_{+0}^* = -\varepsilon u_{-0}^* \quad (11)$$

なる関係が存在する。周期衝突振動が起きるときは衝突間隔 τ_1 と τ_2 は一定の値をもち、かつ

$$\tau_1 + \tau_2 = 2n\pi/\beta \quad (12)$$

は衝突振動の周期に等しくなる。

いま式(7)および(10)を整理してつぎのようなマトリックス形で書く。

$$N(\beta, \tau_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi \\ \frac{1}{1-\beta^2} \cos \varphi \\ u_{-0} \\ u_{-0}^* \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} 1 - \nu \cos \tau_2 \\ \nu \sin \tau_2 \\ \nu - \cos \tau_1 \\ \sin \tau_1 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau_2 \\ \sin \tau_2 \\ -(1 - \cos \tau_1) \\ -\sin \tau_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$N(\beta, \tau_1) = \begin{pmatrix} 1 - \cos \beta\tau_1 \cos \tau_2 + \beta \sin \beta\tau_1 \sin \tau_2 & -\sin \beta\tau_1 \cos \tau_2 - \beta \cos \beta\tau_1 \sin \tau_2 & 0 & -\varepsilon \sin \tau_2 \\ \cos \beta\tau_1 \sin \tau_2 + \beta \sin \beta\tau_1 \cos \tau_2 & \sin \beta\tau_1 \sin \tau_2 + \beta(1 - \cos \beta\tau_1 \cos \tau_2) & -1 & -\varepsilon \cos \tau_2 \\ \cos \beta\tau_1 - \cos \tau_1 & \sin \beta\tau_1 - \beta \sin \tau_1 & -\varepsilon \sin \tau_1 & 0 \\ \sin \tau_1 - \beta \sin \beta\tau_1 & \beta(\cos \beta\tau_1 - \cos \tau_1) & -\varepsilon \cos \tau_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$N(\beta, \tau_1)$ の逆マトリックスを用いると、式(13)は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi \\ \frac{1}{1-\beta^2} \cos \varphi \\ u_{-0} \\ u_{-0}^* \end{pmatrix} = N^{-1}(\beta, \tau_1) \left\{ \delta \begin{pmatrix} 1 - \nu \cos \tau_2 \\ \nu \sin \tau_2 \\ \nu - \cos \tau_1 \\ \sin \tau_1 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau_2 \\ \sin \tau_2 \\ -(1 - \cos \tau_1) \\ -\sin \tau_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (15)$$

なる形で解くことができる。このうち $\sin \varphi$ および $\cos \varphi$ を

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi &= \delta p_\delta(\beta, \tau_1; \nu) - f p_f(\beta, \tau_1; \nu) \\ \frac{1}{1-\beta^2} \cos \varphi &= \delta q_\delta(\beta, \tau_1; \nu) - f q_f(\beta, \tau_1; \nu) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と書き、これより φ を消去することによって、遊げきの大きさ δ に関する2次方程式

$$(p_\delta^2 + q_\delta^2) \delta^2 - 2f(p_\delta p_f + q_\delta q_f) \delta + (p_f^2 + q_f^2) f^2 - \frac{1}{(1-\beta^2)^2} = 0 \quad (17)$$

が得られる。周期衝突振動が起こるためには、式(17)を満足する δ が実根を持てばよいので、判別式 ≥ 0 より

$$0 \leq |1-\beta^2| f < \frac{\sqrt{p_\delta^2 + q_\delta^2}}{|p_\delta q_f - p_f q_\delta|} \quad (18)$$

また両面の壁に対する衝突(直前の)速度は、式(15)より

$$\left. \begin{aligned} u_{-0} &= \delta r_{\delta}(\beta, \tau_1; \nu) - f r_f(\beta, \tau_1; \nu) \\ u_{-0}^* &= \delta r_{\delta}^*(\beta, \tau_1; \nu) - f r_f^*(\beta, \tau_1; \nu) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

なる形で求められる。これらの速度は上記によってそれぞれ $u_{-0} < 0$, $u_{-0}^* < 0$ なる符号をもたなければならぬ。以上の他周期振動が起こるためには、常に

$$\delta \leq \xi(\tau) \leq \delta^*, \quad \delta \leq \xi^*(\tau) \leq \delta^* \quad (20)$$

が満足される必要がある。

4.2 対 称 振 動

とくに $\delta^* = -\delta$ ($\nu = -1$)、すなわち物体（の静止位置）と両側壁面間の遊げきが等しいときは両壁面における衝突時間間隔が等しい ($\tau_1 = \tau_2 = n\pi/\beta$, n は奇数) 対称振動が起こる可能性がある。この場合

$$\xi^*(\tau) = -\xi(\tau), \quad \dot{\xi}^*(\tau) = -\dot{\xi}(\tau) \quad (u_{\pm 0}^* = -u_{\pm 0}) \quad (21)$$

となり、式(7)および(10)はいずれも

$$\left. \begin{aligned} -\delta^* &= (\delta^* - f + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi) \cos \frac{n\pi}{\beta} + (\varepsilon u_{-0} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi) \sin \frac{n\pi}{\beta} + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi + f \\ u_{-0} &= (-\delta^* + f - \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi) \sin \frac{n\pi}{\beta} + (\varepsilon u_{-0} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi) \cos \frac{n\pi}{\beta} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

なる2つの式で表わされる。式(22)を $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ について解くと

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \varphi &= -\delta^* - \frac{1+\varepsilon}{2} u_{-0} \tan \frac{n\pi}{2\beta} \\ \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \varphi &= -f \tan \frac{n\pi}{2\beta} + \frac{1-\varepsilon}{2} u_{-0} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

さらに位相角 φ を消去することによって、衝突速度に関する

$$\left\{ \left(\frac{1-\varepsilon}{2\beta} \right)^2 + \left(\frac{1+\varepsilon}{2} \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2 \right\} u_{-0}^2 - \left\{ -(1+\varepsilon)\delta^* + \frac{1-\varepsilon}{\beta^2} f \right\} u_{-0} \tan \frac{n\pi}{2\beta} + \delta^{*2} + \left(\frac{f \tan \frac{n\pi}{2\beta}}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{(1-\beta^2)^2} = 0 \quad (24)$$

が得られる。周期運動が存在するためには、上記符号の取り方にしたがって u_{-0} は少なくとも一つの負根をもたなければならぬ。そのためには式(24)の判別式 ≥ 0 より

$$\delta^{*2} + \left(2 \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} f \tan^2 \frac{n\pi}{2\beta} \right) \delta^* - \frac{1}{(1-\beta^2)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \beta \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2 \right\} + \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} f \tan^2 \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2 \leq 0 \quad (25)$$

あるいはこれを解いて遊げき

$$0 < \delta^* < \frac{1}{|1-\beta^2|} \sqrt{1 + \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \beta \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2} - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} f \tan^2 \frac{n\pi}{2\beta} \quad (26)$$

なる範囲以外の値をとることはできない。さらに

$$(1) \quad \delta^* > \frac{1}{|1-\beta^2|} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\beta^2}{\beta} f \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2} \quad (27)$$

$$\left(-\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \delta^* + \frac{f}{\beta^2} \right) \tan \frac{n\pi}{2\beta} < 0 \quad (28)$$

$0 < n/\beta < 1$, $2 < n/\beta < 3$, ……の範囲では

$$\delta^* > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{f}{\beta^2} > 0 \quad (29)$$

$1 < n/\beta < 2$, $3 < n/\beta < 4$, ……の範囲では

$$0 < \delta^* < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{f}{\beta^2} \quad (30)$$

のとき u_{-0} に関する2負根が存在し、

$$(2) \quad 0 < \delta^* < \frac{1}{|1-\beta^2|} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\beta^2}{\beta} f \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right)^2} \quad (31)$$

のときただ1つの負根が存在する。そしていずれの場合でも運動が起こるためには摩擦力には一定の限界

$$0 \leq f \leq \frac{\beta}{|1-\beta^2|} \left| \cot \frac{n\pi}{2\beta} \right| \quad (32)$$

がある。対称振動においては常に

$$-\delta^* \leq \dot{\xi}(\tau) \leq \delta^* \quad (33)$$

でなくてはならないが、これを満足する領域は計算過程において常に判断する以外、これを陽に求めることはできない。

5. 周期運動の安定性 (非共振の場合)

5.1 非対称振動

以上の周期運動が長時間にわたって持続するためには、運動中に生じたなんらかの微小かく乱が、衝突を繰り返さず間に逐次減少し、もとの周期運動にもどろうとする、いわゆる動的に安定な性質がなければならない。

図-2の点線は微小なかく乱による運動を示すが、時刻 τ_{2j} の衝突以後、時刻 τ_{2j+1}^* におけるつぎの衝突にいたる間のかく乱をうけた変位を

$$\xi^{(2j)}(\tau) = (C + \Delta C^{(2j)}) \sin \tau + (D + \Delta D^{(2j)}) \cos \tau + \frac{1}{1-\beta^2} \sin \beta\tau - f \quad (\tau_{2j} \leq \tau \leq \tau_{2j+1}^*) \quad (34)$$

速度を

$$\dot{\xi}^{(2j)}(\tau) = (C + \Delta C^{(2j)}) \cos \tau - (D + \Delta D^{(2j)}) \sin \tau + \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos \beta\tau \quad (\tau_{2j} \leq \tau \leq \tau_{2j+1}^*) \quad (35)$$

と書く。とくに一方の壁に対する衝突直後の変位と速度のかく乱は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi^{(2j)}(\tau_{2j}) &= \Delta C^{(2j)} \sin \tau_{2j} + \Delta D^{(2j)} \cos \tau_{2j} + u_{+0} \Delta \tau^{(2j)} = 0 \\ \Delta \dot{\xi}^{(2j)}(\tau_{2j}) &= \Delta C^{(2j)} \cos \tau_{2j} - \Delta D^{(2j)} \sin \tau_{2j} - (\delta + f - \sin \beta\tau_{2j}) \Delta \tau^{(2j)} = \Delta u_{+0}^{(2j)} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

他の壁面に衝突する直前では

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi^{(2j)}(\tau_{2j+1}^*) &= \Delta C^{(2j)} \sin \tau_{2j+1}^* + \Delta D^{(2j)} \cos \tau_{2j+1}^* + u_{-0}^* \Delta \tau^{*(2j+1)} = 0 \\ \Delta \dot{\xi}^{(2j)}(\tau_{2j+1}^*) &= \Delta C^{(2j)} \cos \tau_{2j+1}^* - \Delta D^{(2j)} \sin \tau_{2j+1}^* - \{\delta^* + f - \sin(\beta\tau_{2j+1}^*)\} \Delta \tau^{*(2j+1)} = \Delta u_{-0}^{*(2j+1)} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式(36)より $\Delta C^{(2j)}$, $\Delta D^{(2j)}$ を求め、これを式(37)へ代入して整理すれば

$$\left. \begin{aligned} \{-u_{+0} \cos \tau_1 + (\delta + f - \sin \varphi) \sin \tau_1\} \Delta \tau^{(2j)} + u_{-0}^* \Delta \tau^{*(2j+1)} + \sin \tau_1 \Delta u_{+0}^{(2j)} &= 0 \\ \{u_{+0} \sin \tau_1 + (\delta + f - \sin \varphi) \cos \tau_1\} \Delta \tau^{(2j)} - \{\delta^* + f - \sin(\beta\tau_1 + \varphi)\} \Delta \tau^{*(2j+1)} \\ + \cos \tau_1 \Delta u_{+0}^{(2j)} - \Delta u_{-0}^{*(2j+1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

同様につぎの衝突区間では

$$\left. \begin{aligned} \{-u_{+0}^* \cos \tau_2 + \{\delta^* - f - \sin(\beta\tau_1 + \varphi)\} \sin \tau_2\} \Delta \tau^{*(2j+1)} + u_{-0} \Delta \tau^{(2j+2)} + \sin \tau_2 \Delta u_{+0}^{*(2j+1)} &= 0 \\ \{u_{+0}^* \sin \tau_2 + \{\delta^* - f - \sin(\beta\tau_1 + \varphi)\} \cos \tau_2\} \Delta \tau^{*(2j+1)} - (\delta - f - \sin \varphi) \Delta \tau^{(2j+2)} \\ + \cos \tau_2 \Delta u_{+0}^{*(2j+1)} - \Delta u_{-0}^{(2j+2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

衝突前後における速度のかく乱量の間には

$$\Delta u_{+0}^{*(2j+1)} = -\varepsilon \Delta u_{-0}^{*(2j+1)}, \quad \Delta u_{+0}^{(2j+2)} = -\varepsilon \Delta u_{-0}^{(2j+2)} \quad (40)$$

なる関係がある。

式(38)~式(40)において

$$\Delta \tau^{(v)} = T \lambda^{(v)}, \quad \Delta \tau^{*(v)} = T^* \lambda^{(v)}; \quad \Delta u_{\pm 0}^{(v)} = U_{\pm 0} \lambda^v, \quad \Delta u_{\pm 0}^{*(v)} = U_{\pm 0}^* \lambda^v \quad \text{とおき} \quad T, \quad T^*, \quad U_{\pm 0}, \quad U_{\pm 0}^* \quad \text{を}$$

消去すれば、特性方程式

$$\begin{vmatrix} -u_{+0} \cos \tau_1 + \theta_+ \sin \tau_1 & u_{-0}^* \lambda & \sin \tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{+0} \sin \tau_1 + \theta_+ \cos \tau_1 & -\theta_+^* \lambda & \cos \tau_1 & 0 & 0 & -\lambda \\ u_{-0} \lambda & u_{+0}^* \cos \tau_2 + \theta_-^* \sin \tau_2 & 0 & 0 & \sin \tau_2 & 0 \\ -\theta_- \lambda & u_{+0}^* \sin \tau_2 + \theta_-^* \cos \tau_2 & 0 & -\lambda & \cos \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

が得られる。これを展開することによって

$$\lambda^4 - S(\beta, \tau_1; \delta, f) \lambda^2 + \varepsilon^4 = 0 \quad (42)$$

ただし

$$\begin{aligned} S(\beta, \tau_1; \delta, f) = & 2\varepsilon^2 \cos \frac{2n\pi}{\beta} + \varepsilon \left\{ \varepsilon \left(\frac{\theta_-}{u_{-0}} + \frac{\theta_+^*}{u_{-0}^*} \right) + \left(\frac{\theta_+}{u_{-0}} + \frac{\theta_-^*}{u_{-0}^*} \right) \right\} \sin \frac{2n\pi}{\beta} \\ & + \left\{ \varepsilon^2 \frac{\theta_-}{u_{-0}} \frac{\theta_+^*}{u_{-0}^*} + \varepsilon \left(\frac{\theta_+}{u_{-0}} \frac{\theta_+^*}{u_{-0}^*} + \frac{\theta_-}{u_{-0}} \frac{\theta_-^*}{u_{-0}^*} \right) + \frac{\theta_+}{u_{-0}} \frac{\theta_-^*}{u_{-0}^*} \right\} \sin \tau_1 \sin \tau_2 \end{aligned} \quad (43)$$

となり式(42)の根 $|\lambda| < 1$ のとき、周期運動は安定となるが、そのためには

$$|S(\beta, \tau_1; \delta, f)| < 1 + \varepsilon^4 \quad (44)$$

でなくてはならない。

5.2 対称振動

この場合は

$$\theta_{\pm}^* = -\theta_{\pm} = \delta^* \mp f + \sin \varphi \quad (45)$$

と書け、したがって式(42)は

$$\begin{aligned} & \left(\lambda^2 - \left\{ \left(\varepsilon \frac{\theta_-}{u_{-0}} + \frac{\theta_+}{u_{-0}} \right) \sin \frac{n\pi}{\beta} + 2\varepsilon \cos \frac{n\pi}{\beta} \right\} \lambda + \varepsilon^2 \right) \\ & \times \left(\lambda^2 + \left\{ \left(\varepsilon \frac{\theta_-}{u_{-0}} + \frac{\theta_+}{u_{-0}} \right) \sin \frac{n\pi}{\beta} + 2\varepsilon \cos \frac{n\pi}{\beta} \right\} \lambda + \varepsilon^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

この場合の安定条件は

$$\left| \left(\varepsilon \frac{\theta_-}{u_{-0}} + \frac{\theta_+}{u_{-0}} \right) \sin \frac{n\pi}{\beta} + 2\varepsilon \cos \frac{n\pi}{\beta} \right| < 1 + \varepsilon^2 \quad (47)$$

いま式(46)の第1式を式(45)に用いれれば

$$\theta_{\pm} = -\delta^* \pm f - (1 - \beta^2) \left(-\delta^* - \frac{1 + \varepsilon}{2} u_{-0} \tan \frac{n\pi}{2\beta} \right) \quad (48)$$

となるが、この θ_{\pm} の値を安定運動の領域(47)の境界線に相当する

$$(\varepsilon \theta_- + \theta_+) \frac{1}{u_{-0}} \sin \frac{n\pi}{\beta} + 2\varepsilon \cos \frac{n\pi}{\beta} = \pm(1 + \varepsilon^2) \quad (49)$$

に用い、式(49)より得た u_{-0} を逆に式(48)へ入れることによって δ^* に関する2次方程式が得られる。若干の計算ののち式(49)右辺複号のうち+を取ったものは周期解の境界を表わす式(29)に一致し、-を取ったものが安定領域を与えることがわかる。

6. 共振時の安定な周期振動

6.1 周期運動の条件

共振時 ($\beta=1$) には式(3)および式(4)は

$$\xi(\tau) = C \sin \tau + D \cos \tau - \frac{1}{2} \tau \cos \tau - f \quad (50)$$

$$\dot{\xi}(\tau) = C \cos \tau - D \sin \tau - \frac{1}{2} (\cos \tau - \tau \sin \tau) \quad (51)$$

したがって式(7)は

$$\left. \begin{aligned} \delta^* &= \left(\delta + f + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi \right) \cos \tau_1 + \left\{ u_{+0} + \frac{1}{2} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \right\} \sin \tau_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\tau_1 + \varphi) \cos (\tau_1 + \varphi) - f \\ u_{-0}^* &= - \left(\delta + f + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi \right) \sin \tau_1 + \left\{ u_{+0} + \frac{1}{2} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \right\} \cos \tau_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \cos (\tau_1 + \varphi) - (\tau_1 + \varphi) \sin (\tau_1 + \varphi) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

式(10)は

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \left\{ \delta^* - f + \frac{1}{2} (\tau_1 + \varphi) \cos (\tau_1 + \varphi) \right\} \cos \tau_2 \\ &\quad + \left\{ u_{+0}^* + \frac{1}{2} \left\{ \cos (\tau_1 + \varphi) - (\tau_1 + \varphi) \sin (\tau_1 + \varphi) \right\} \right\} \sin \tau_2 - \frac{1}{2} (2n\pi + \varphi) \cos \varphi + f \\ u_{-0} &= - \left\{ \delta^* - f + \frac{1}{2} (\tau_1 + \varphi) \cos (\tau_1 + \varphi) \right\} \sin \tau_2 \\ &\quad + \left\{ u_{+0}^* + \frac{1}{2} \left\{ \cos (\tau_1 + \varphi) - (\tau_1 + \varphi) \sin (\tau_1 + \varphi) \right\} \right\} \cos \tau_2 - \frac{1}{2} \left\{ \cos \varphi - (2n\pi + \varphi) \sin \varphi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

さらに式(13), (14)は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin \varphi \\ \frac{1}{2} \cos \varphi \\ u_{-0} \\ u_{-0}^* \end{pmatrix} = N^{-1}(\beta=1, \tau_1) \left\{ \delta \begin{pmatrix} 1 - \nu \cos \tau_2 \\ \nu \sin \tau_2 \\ \nu - \cos \tau_1 \\ \sin \tau_1 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau_2 \\ \sin \tau_2 \\ -(1 - \cos \tau_1) \\ -\sin \tau_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (54)$$

$$N(\beta=1, \tau_1) = \begin{pmatrix} \sin^2 \tau_1 & -2\pi + \tau_1 - \sin \tau_1 \cos \tau_1 & 0 & \varepsilon \sin \tau_1 \\ 2\pi - \tau_1 - \sin \tau_1 \cos \tau_1 & -\sin^2 \tau_1 & -1 & -\varepsilon \cos \tau_1 \\ -\tau_1 \sin \tau_1 & -\tau_1 \cos \tau_1 + \sin \tau_1 & -\varepsilon \sin \tau_1 & 0 \\ \tau_1 \cos \tau_1 + \sin \tau_1 & \tau_1 & -\varepsilon \cos \tau_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

と書くことができる。

対称振動の場合には式(52)あるいは(53)から直ちに

$$\cos \varphi = \frac{4f}{n\pi} \quad (56)$$

$$u_{-0} = -\frac{n\pi}{2(1+\varepsilon)} \sqrt{1 - \left(\frac{4f}{n\pi} \right)^2} \quad (57)$$

また

$$f \leq \frac{n\pi}{4} \quad (58)$$

6.2 安定性

式(3)はこの場合

$$S(\beta=1, \tau_1; \delta, f) = 2\varepsilon^2 + \left\{ \varepsilon^2 \theta_{-+}^* + \varepsilon (\theta_{++}^* + \theta_{--}^*) + \theta_{+-}^* \right\} \frac{\sin \tau_1 \sin \tau_2}{u_{-0} u_{-0}^*} \quad (59)$$

対称振動では式(2)は $(\lambda^2 - \varepsilon^2)^2 = 0$ となるが, これより $|\lambda| = \varepsilon < 1$ 。したがって運動は常に安定で

ある。

7. 数値計算例

以上の理論にもとづいて計算した結果を図-3 以下に示す。

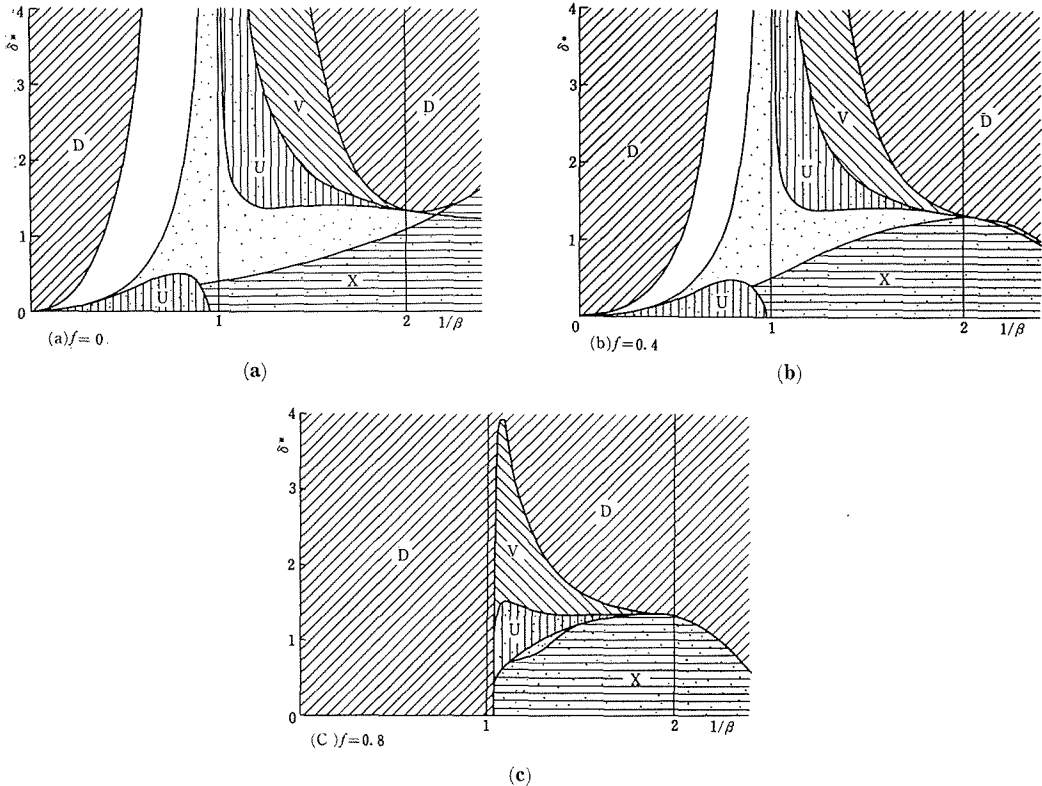


図-3 安定な周期対称振動の存在領域 ($n=1, \epsilon=0.5$)

まず図-3は $n=1, \epsilon=0.5$ の場合における安定な周期対称振動が存在する $1/\beta - \delta^*$ 領域を求めたものであって、図中の白地と、ハッチングのない点を付した領域内の振動数と遊げきの値をもつ振動系にのみ、安定な周期運動の発生が期待できる。この領域はつぎの手順によって決定される。判別式(25)によって斜線 D の部分が除かれ、つぎに式(27)~(31)にもとづき $u_{-0} < 0$ とならない斜線 V の領域が除かれる。残った領域のうち、白地の部分では2(負)根、点を付した部分では1(負)根を有するが、式(27)により縦線 U の部分が不安定領域として除かれる。なお2負根のうち1根は常に不安定である。最後に式(33)の条件が、数値的に検討されて横線 X 領域が除かれ、残った領域が求めるものとなる。共振時の計算は式(50)以下によっていることはいうまでもない。

図-3の各図を比較してわかるように、物体に働く摩擦力が増加するにしたがって安定な周期振動の起こる領域は小さくなってくる。

図-4は安定な周期運動が存在する場合の衝突速度 u_{+0} の値を示したものであるが、各曲線の両端を結ぶ点線は安定な運動が存在する範囲である。

図-5は $\epsilon=0.2$ の場合について図-3と同様な $1/\beta - \delta^*$ 領域を求め、三つの摩擦力の場合についてこれらを重ね合わせたものであるが、図-3 ($\epsilon=0.5$) と比較して領域がいくらか $1/\beta$ の小さい側へ移動する以外、その大きさについては著しい差は認められない。また図-6は $\epsilon=0.2$ の場

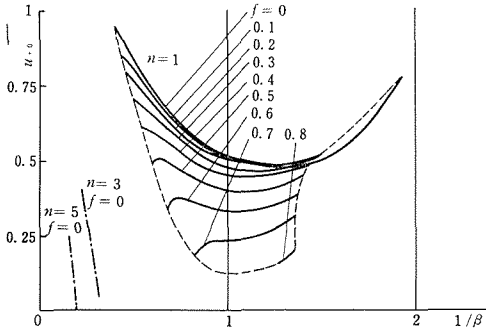


図-4 対称振動の衝突(直後の)速度 ($\varepsilon=0.5$)

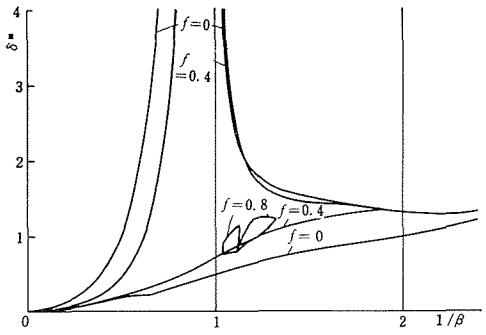


図-5 安定な周期対称振動の存在領域 ($n=1, \varepsilon=0.2$)

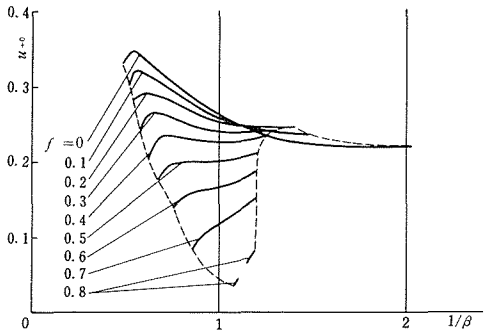


図-6 対称振動の衝突(直後の)速度 ($n=1, \varepsilon=0.2$)

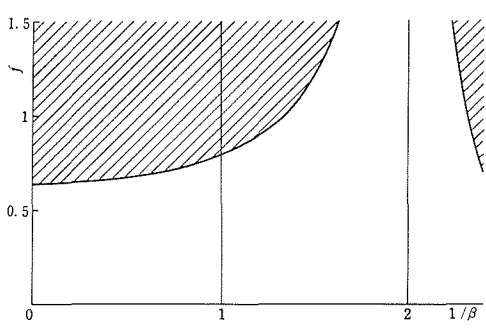


図-7 対称振動の起こる摩擦力の範囲 ($n=1$)

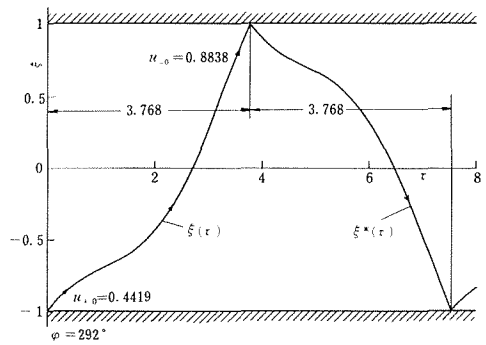


図-8 安定な対称振動の例
($n=1, \varepsilon=0.5, f=0.4, 1/\beta=1.2, \delta=-1$)

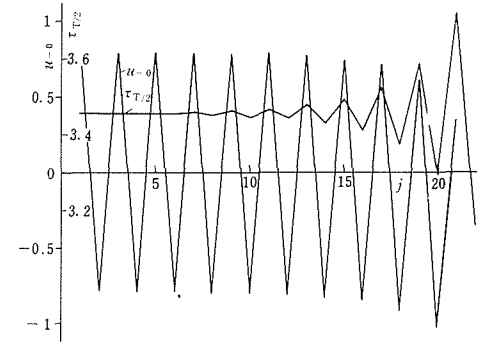


図-9 不安定な対称振動の例
($n=1, \varepsilon=0.5, f=0, 1/\beta=1.1, \delta=-2$)

合の衝突速度を示したものであるが、図-4と比較してわかるように反発係数の値によって速度の大きさはかなり小さくなっている。

このような周期運動は式(3)あるいは図-7に示す一定の摩擦力を越えない場合にだけ起こり得るが、その限界値は n と $1/\beta$ の値にだけ関係している。図-8は上記によって判定された安定な周期運動、図-9は不安定な運動の例であり、後者の場合、衝突が繰り返されるにつれて衝突時の速度や衝突時間間隔が次第に変動してゆく。

図-10は摩擦力のない場合について、安定な3,5倍周期振動($n=3,5$)の存在する領域を $n=1$ の場合と併記したもので、 $n=1$ の場合と比較して極端に小さくなっている感じを与えるが、座

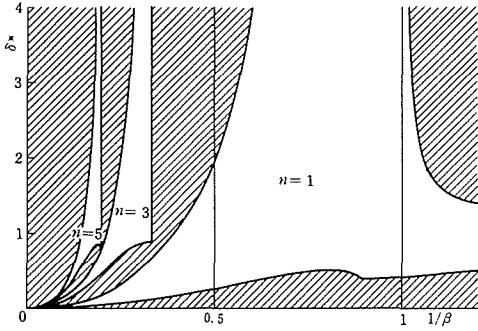


図-10 安定な n 倍周期振動の存在領域
($\varepsilon=0.5, f=0$)

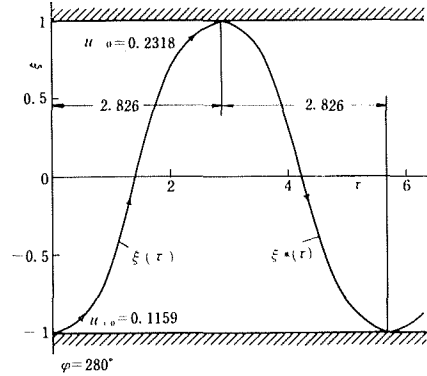


図-11 安定な 3 倍周期振動の例
($\varepsilon=0.5, f=0, 1/\beta=0.3, \delta=-1$)

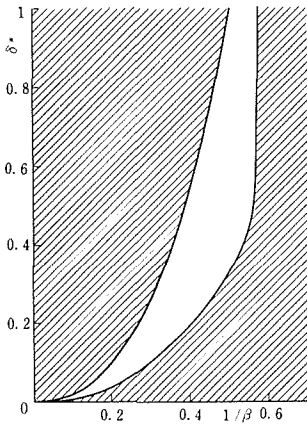


図-12 安定な非対称周期振動の存在領域
($n=1, \varepsilon=0.5, f=0.4, \nu=-0.5$)

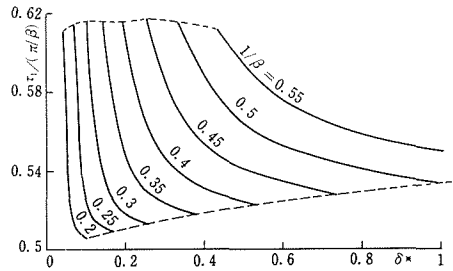


図-13 非対称振動の衝突間隔
($n=1, \varepsilon=0.5, f=0.4, \nu=-0.5$)

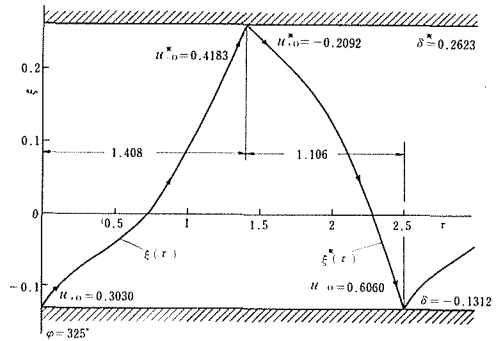


図-14 非対称振動の例
($n=1, \varepsilon=0.5, f=0.4, 1/\beta=0.4, \nu=-0.5$)

標軸に $1/\beta$ をとっている関係上、外見的に縮小されたにすぎない。図-4 に鎖線で $n=3, 5$ の衝突速度を示す。また図-11 に安定な 3 倍周期運動の例を示したが、 $n=1$ の場合と比較して、運動はかなりまろやかとなっている。

以上はいずれも対称振動に関する計算結果であったが、非対称振動の $1/\beta-\delta^*$ 領域の例を示したものが図-12 である。この場合は $1/\beta < 1$ 、かつ小さい振動数の範囲に限られている。図-13 はこの場合の衝突時間 $\tau_1/(\pi/\beta) (> 0.5)$ の値を示したものであるが、両壁面が物体の静止位置に対して非対称な位置におかれているため、 $\tau_1/(\pi/\beta) = 0.5$ すなわち衝突間隔が等しい運動は起こり得ず、物体が左と右に運動する際に、相互の時間間隔は同じ振動数に対しては δ^* が小さいほど

不ぞろいなものとなる。図-14 に非対称運動の一例を示す。

8. 結 言

(1) ある遊びきを隔てて相対する壁面間を振動する 1 自由度ばね-質量系に、調和起振力とクーロン摩擦力が作用した場合に安定な周期衝突振動が発生する条件を求め、その運動の存在領域の決定法を明らかにした。

(2) 物体に作用する摩擦力の値が増すにしたがって、安定な周期運動が起こる振動数と遊びきは狭い範囲に限られてくる。

(3) しかし物体と壁の間の反発係数の値によって、振動数と遊びきの存在範囲の大きさが著しく変化することはない。

(4) 摩擦力が作用しないか、小さい場合には、安定な 3, 5…倍周期運動も、ある振動数と遊びきの範囲では十分に起こり得る。したがって遊びきの調整によって、起振力の 3, 5…倍の周期の振動を発生させる一種の機械的周波数変換器としての応用が可能なものと思われる。

(5) 両壁面が物体の静止位置に対して非対称な位置にあるときは、衝突間隔も一定でなく、安定な周期運動が起こり得る範囲も小さくなる。

参 考 文 献

- 1) 岡淵：電子通信学会論文誌, 51-A-11 (昭43), 413.
- 2) P. Lieber and D. P. Jensen : Trans. ASME, 67 (1945), 523.
- 3) M. M. Sadek : Proc. 7th Intern. MTDR (1966), 243.
- 4) 川井, 小寺：機械学会論文集, 35-274 (昭44), 1233.
- 5) W. H. Park : Trans. ASME, B, 89-4 (1967), 587.
- 6) 深谷, 入江：機械学会講演論文集, 215 (昭44), 83.
- 7) 深谷, 入江：機械学会北海道支部第13回講演論文集 (昭44), 63.
- 8) 得丸, 小寺：機械学会論文集, 35-277 (昭44), 1864.
- 9) C. Grubin : J. Appl. Mech., 23 (1956), 373.
- 10) M. I. Feigin : PMM, 30-5 (1966), 942.
- 11) A. E. Kobrinskij : Izvestija Akad. Nauk SSSR, OTN, 5 (1957), 15.
- 12) H. G. Kaper : Appl. Sci. Res., 10 (1961), 369.
- 13) K. Kuphal : ZAMM, 45-213 (1965), 73.
- 14) S. F. Masri and T. K. Caughey : Trans. ASME, E, 33-3 (1966), 586.
- 15) D. M. Egle : Trans. ASME, B, Paper 67 Vibr 10 (1967).
- 16) H. Dittrich : Ingenieur-Archiv., 35 (1966), 150.
- 17) R. N. Arnold : Congrès International de Mécanique Appliquée, Actes 7 (1957), 407.
- 18) M. M. Sadek : Proc. Instn. Mech. Engrs., 180 (1)-38 (1965-66), 895.