



|                  |   |
|------------------|---|
| Title            | 平面壁に衝突する物体の挙動   |
| Author(s)        | 深谷, 健一; Fukaya, Ken-ichi; 入江, 敏博 他  |
| Citation         | 北海道大學工學部研究報告, 57, 115-126   |
| Issue Date       | 1970-10-31  |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/41003">https://hdl.handle.net/2115/41003</a> |
| Type             | departmental bulletin paper   |
| File Information | 57_115-126.pdf  |



# 平面壁に衝突する物体の挙動

深谷 健一\* 入江 敏博\*

(昭和45年5月7日受理)

## Dynamic Behavior of a Body Colliding with a Plane Wall

Ken-ichi FUKAYA Toshihiro IRIE

### Abstract

The problems of the motion of a body and forces caused when a body impacting upon a wall are important in engineering.

In this paper, two dimensional motion when a body collides with a plane wall was analyzed theoretically with the body-wall system represented by an equivalent mechanical model. Neglecting the friction of the wall surface, the dynamic behavior of the body after collision, duration of impact, coefficient of restitution, impact force and absorbed energy were calculated.

The results of a few experiments carried out on a rectangular steel plate colliding with a beam (a wall model) were in agreement with the theoretical results, and, thus, it was shown that the theory is reasonable. It was also shown that the impact problem of such a system can be explained by a simple model.

### 1. ま え が き

物体が壁に衝突する際の物体の運動や力の関係は、機械要素の衝撃問題として重要である。自動車がガードレールや障害物に衝突したり、相互に衝突する交通事故もこの種の力学的問題で外国<sup>1),2)</sup> やわが国<sup>3),4)</sup> でも理論的な解析や大がかりな実物実験が行われている。

本研究は物体が壁面に斜めに衝突する際の物体の挙動や、壁との衝突時間、衝撃力、吸収するエネルギーなどについて、物体を含め壁面を、これと等価なばね、ダンパ、固体摩擦系でおきかえて理論解析を行うと同時に、室内実験を実施して問題の解明を試みたものである。

### 記 号 一 覧

$c$ : 壁面の粘性減衰係数

$c_{\varphi}$ : 等価回転減衰係数

$d$ : 物体の幅

$e_x$ : 壁面と直角方向のコーナー反発係数

$E$ : 物体の有する力学エネルギー

---

\* 機械工学第二学科 機械力学講座

- $\Delta E$ : 衝突によって失われるエネルギー  
 $F$ : 壁面に働く固体摩擦力  
 $J$ : 物体の重心まわりの慣性モーメント  
 $k, nk$ : 壁を構成するばね要素のこわさ  
 $k_\phi$ : 等価ねじりばねこわさ  
 $l_1, l_2$ : 物体の重心と前, 後端間の長さ  
 $l$ : 物体の長さ  
 $M$ : 物体の質量  
 $N$ : 壁面と直角な衝突力成分  
 $p, q$ : 物体の重心から衝突力成分にいたるアームの長さ  
 $r$ : 物体の重心まわりの回転半径  
 $t_1$ : 衝突継続時間  
 $t_2$ : 壁面に平行な物体速度が0となる時刻  
 $t_m$ : 衝突力がピーク値をとる時刻  
 $t^*$ : 物体が壁面に再衝突する時刻  
 $u, v$ : 物体の重心の壁面と直角および平行な方向の速度成分  
 $w$ : 物体コーナーの壁面と直角な速度成分  
 $x, y$ : 物体の重心位置を表わす座標  
 $z$ : 壁面ダンパ要素の変位  
 $X(S), Y(S); Z(S)$ :  $x, y; z$  のラプラス変換  
 $\alpha = \zeta\sqrt{1+\lambda_0^2} \omega_n$   
 $\beta = \sqrt{\zeta^2-1} \sqrt{1+\lambda_0^2} \omega_n (\zeta > 1), \quad \beta^* = \sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{1+\lambda_0^2} \omega_n (\zeta < 1)$   
 $\zeta = c/c_c (c_c = 2\sqrt{Mk} / \sqrt{1+\lambda_0^2})$ : 等価減衰比  
 $\zeta^* = c/2\sqrt{Mk}$ : 減衰比  
 $\theta$ : 物体の姿勢角  
 $\lambda = p/r$ : 物体の回転半径に対する衝撃力アームの比  
 $\mu$ : 壁面とコーナー間の動摩擦係数  
 $\xi, \eta$ : 壁面の変位  
 $\varphi = \theta - \theta_0$ : 物体の姿勢角変化  
 $\omega$ : 物体の回転速度  
 $\omega_n = \sqrt{k/M}$ : 物体-壁系の固有振動数

添字 0: 衝突の瞬間の値に付す

添字 1: 衝突が終る時刻の値に付す

## 2. 等価力学系と基礎関係式

図-1 に示すような長方形物体が水平面上を運動し、平面壁に斜めに衝突する際の 2 次元問題を考える。物体は壁に比べてかたく、その重心は (左右) 対称面内にあるものとする。壁面は、図のように、これと直角な方向に作動する 2 つのばね  $k, nk$  とダンパ  $c$  から構成され、壁面と平行に物体-壁間の垂直力に比例する固体 (クローン) 摩擦力が働くものとする。物体が壁面に

比べて極端にかたくないときは、このモデルは物体と壁を合成した力学系とみなすことができよう。

ここで  $n \rightarrow 0$  とすれば単一ばねで構成される完全弾性体、 $n \rightarrow \infty$  とすれば通常の並列ばね-ダンパ系となり、また  $k \rightarrow 0$  としたとき直列ばね-ダンパで表わされる粘弾性体 (マックスウェル・モデル) となる。

解析に当っては、図-2 のように長方形物体の1つのコーナーが、壁と衝突する瞬間の物体の重心位置を原点にとるのが便利であって、これより壁に向かって壁面と直角に  $x$  軸、平行に  $y$  軸をとる。衝突前後の物体の位置と姿勢は、その重心位置  $(x, y)$  と、物体の前後軸 (対称軸) が  $x$  軸となす角 (姿勢角)  $\theta$  によって表わされる。

衝突の際における物体のコーナー (たとえば右前コーナー) の、壁と直角、およびこれと平行な方向の変位は、物体に接触する壁面の変位

$$\xi = x + l_1 (\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{d}{2} (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (1)$$

$$\eta = y + l_1 (\sin \theta - \sin \theta_0) - \frac{d}{2} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2)$$

に等しいとみなすことができる。衝突時、壁面から物体に作用する衝撃力によって、物体は

$$M\dot{a} = -N \quad (3)$$

$$M\dot{j} = -F \quad (4)$$

$$J\ddot{\theta} = l_1 (N \sin \theta - F \cos \theta) - \frac{d}{2} (N \cos \theta + F \sin \theta) \quad (5)$$

に支配される運動をする。衝突時の運動を考える場合、物体と水平面 (床) との間に働く摩擦力は、衝突力に比べて小さいので省略してある。

衝突の際、物体と壁面との間に働く力の大きさは、壁面の変位と、物体-壁の摩擦特性に関係があり

$$N = k\xi + c(\dot{\xi} - \dot{z}) \quad (6)$$

$$F = \pm \mu N = \pm \mu \left\{ k\xi + c(\dot{\xi} - \dot{z}) \right\} \quad (\dot{\gamma} \geq 0) \quad (7)$$

またばね  $nk$  とダンパ  $c$  の間には

$$c(\dot{\xi} - \dot{z}) = nkz \quad (8)$$

なる力が作用する。

実際には壁面のこわさはかなり大きく、したがって衝突時間は短く、衝突の間における物体の角変化  $\varphi = \theta - \theta_0$  も小さいのが普通なので、 $\sin \varphi \approx \varphi$ 、 $\cos \varphi \approx 1$  として十分であり、式 (1), (2) は

$$\xi = x - p_0 \varphi, \quad \eta = y - q_0 \varphi \quad (9)$$

のように簡単に書ける。ただし衝突の瞬間における、物体の重心から衝突力の成分  $N$ ,  $F$  にいたるアームの長さは

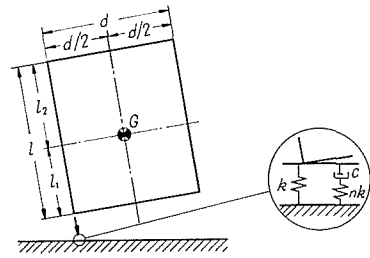


図-1 壁の等価力学モデル

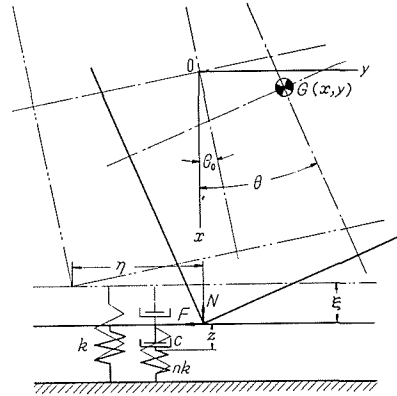


図-2 衝突時の壁の変形

$$p_0 = l_1 \sin \theta_0 - \frac{d}{2} \cos \theta_0, \quad q_0 = -l_1 \cos \theta_0 - \frac{d}{2} \sin \theta_0 \quad (10)$$

式 (6), (7), (9) を運動方程式 (3)~(5) へ代入し, 高次の微小項を省略することによって, つぎの線形 (連立) 微分方程式が得られる。

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0(c\dot{\varphi} + k\varphi) + c\dot{z} \quad (11)$$

$$M\ddot{y} = \mp \mu \left\{ c\dot{x} + kx - p_0(c\dot{\varphi} + k\varphi) - c\dot{z} \right\} \quad (12)$$

$$J\ddot{\varphi} + c_\varphi \dot{\varphi} + k_\varphi \varphi = (p_0 \pm \mu q_0)(c\dot{x} + kx - c\dot{z}) \quad (\dot{\varphi} \geq 0) \quad (13)$$

回転運動に関する等価ばねこわさ  $k_\varphi$ , 等価減衰係数  $c_\varphi$  の大きさは

$$\left. \begin{aligned} k_\varphi &= p_0(p_0 \pm \mu q_0) k \\ c_\varphi &= p_0(p_0 \pm \mu q_0) c \quad (\dot{\varphi} \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

すべて衝突する瞬間の物体の姿勢に関係がある。

以上では, 物体の右前コーナーが壁面と衝突する場合を取り扱ったが, 左前コーナー, 右後コーナー, 左後コーナーが衝突するときには上記の  $(l_1, d/2)$  の代わりに, それぞれ  $(l_1, -d/2)$ ,  $(-l_2, d/2)$ ,  $(-l_2, -d/2)$  を用いればよい。

衝突による物体の運動は式 (11)~(13) を衝突直前の (初期) 条件

$$t = 0: \quad \left. \begin{aligned} x = y = 0, \quad \theta = \theta_0 \\ \dot{x} = u_0, \quad \dot{y} = v_0; \quad \dot{\theta} = \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で, 式 (6) を

$$t = 0: \quad z = \dot{z} = 0 \quad (16)$$

で解くことによって求められる。そのためにはこれらの式をラプラス変換するのが便利で

$$\left. \begin{aligned} (Ms^2 + cs + k) X(s) - p_0(cs + k) \Phi(s) - cs Z(s) &= Mu_0 \\ \pm \mu(cs + k) X(s) + Ms^2 Y(s) \mp \mu p_0(cs + k) \Phi(s) \mp \mu cs Z(s) &= Mv_0 \\ -(p_0 \pm \mu q_0)(cs + k) X(s) + (Js^2 + c_\varphi s + k_\varphi) \Phi(s) + (p_0 \pm \mu q_0) cs Z(s) &= J\omega_0 \\ -cs X(s) + p_0 cs \Phi(s) + (cs + nk) Z(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式 (17) より  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $\Phi(s)$ ,  $Z(s)$  を解き, これを逆変換することによって  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $z$  が計算できる。

衝突が終る瞬間は壁から物体に作用する力がなくなって,  $\ddot{x} = \ddot{x} - p_0 \ddot{\varphi}$  が 0 となる時刻  $t_1$  である。衝突中に働く力の大きさは式 (6) および (7) によって計算される。

衝突する直前におけるコーナーの壁と直角方向の速度成分  $\dot{x} = \tau\omega_0$  と, 衝突直後の  $\dot{x} = \tau\omega_1$  から, コーナーにおける反発係数

$$e = -\frac{\tau\omega_1}{\tau\omega_0} \quad (18)$$

の値が決定する。

衝突が終る瞬間の物体の位置と速度の値

$$t = t_1: \quad \left. \begin{aligned} x = x_1, \quad y = y_1; \quad \theta = \theta_1 \\ \dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = v_1; \quad \dot{\theta} = \omega \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を知ることによって, 衝突によって物体や壁に吸収されるエネルギー

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} M \left\{ (u_0^2 + v_0^2) - (u_1^2 + v_1^2) \right\} + \frac{1}{2} J(\omega_0^2 - \omega_1^2) \quad (20)$$

が求められる。衝突後の物体の運動は

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + u_1(t-t_1), & y &= y_1 + v_1(t-t_1) \\ \theta &= \theta_1 + \omega_1(t-t_1) & (t > t_1) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} x_1 + u_1(t-t_1) + l^* \cos \left\{ \theta_1 + \omega_1(t-t_1) \right\} + \frac{d^*}{2} \sin \left\{ \theta_1 + \omega_1(t-t_1) \right\} \\ = l_1 \cos \theta_0 + \frac{d}{2} \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (22)$$

を満足する時刻  $t^*$  で、物体は再び壁と衝突する。 $l^*$ ,  $d^*/2$  は再衝突が起こるコーナーの位置で、これに各コーナーの数値を入れて計算しても、式 (22) を満足する  $t^*$  の値が存在しないときは再衝突は起こらない。再衝突が起こった場合、その後の運動は上記と同じ手順で計算することができる。

### 3. 壁面に働く固体摩擦を省略した計算

取扱いの簡単のため、壁面に働く固体摩擦力を省略し、 $n \rightarrow \infty$  とした場合について計算を進めよう。このとき式 (17) はつぎのように解くことができる。

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \frac{Mu_0(Js^2 + c_\varphi s + k_\varphi) + p_0 J\omega_0(cs + k)}{s^2 \{J(Ms^2 + cs + k) + M(c_\varphi s + k_\varphi)\}} = \frac{\mathfrak{A}}{s^2} + \frac{\mathfrak{B}}{(s + \alpha)^2 - \beta^2} \\ Y(s) &= \frac{v_0}{s} \\ \phi(s) &= \frac{p_0 Mu_0(cs + k) + J\omega_0(Ms^2 + cs + k)}{s^2 \{J(Ms^2 + cs + k) + M(c_\varphi s + k_\varphi)\}} = \frac{\mathfrak{A}/\lambda_0}{s^2} - \frac{\lambda_0 \mathfrak{B}/r}{(s + \alpha)^2 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\lambda_0 u_0}{1 + \lambda_0^2} \left( \lambda_0 + \frac{r\omega_0}{u_0} \right), & \mathfrak{B} &= \frac{u_0}{1 + \lambda_0^2} \left( 1 - \lambda_0 \frac{r\omega_0}{u_0} \right) \\ \alpha &= \zeta \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n, & \beta &= \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n \quad (\zeta > 1) \\ \zeta &= \frac{c}{c_c} \left( c_c = \frac{2\sqrt{Mk}}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \right), & \lambda_0 &= \frac{p_0}{r} \end{aligned}$$

式 (23) は  $\zeta > 1$  (過減衰) の場合であるが、 $\zeta = 1$  (限界減衰) では  $\beta = 0$ ,  $\zeta < 1$  (減衰振動) の場合は  $\beta = j\beta^*$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) におきかえればよい。ここで

$$\beta^* = \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n$$

式 (23) を逆変換することによって、物体の重心の位置と姿勢角変化は

$$\left. \begin{aligned} \frac{x(t)}{u_0/\omega_n} &= \begin{cases} \frac{\lambda_0(\lambda_0 + r\omega_0/u_0)}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t + \frac{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)}{\sqrt{\zeta^2 - 1} (1 + \lambda_0^2)^{3/2}} e^{-\alpha t} \sinh \beta t & (\zeta > 1) \\ \frac{\lambda_0(\lambda_0 + r\omega_0/u_0)}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t + \frac{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t e^{-\alpha t} & (\zeta = 1) \\ \frac{\lambda_0(\lambda_0 + r\omega_0/u_0)}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t + \frac{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)}{\sqrt{1 - \zeta^2} (1 + \lambda_0^2)^{3/2}} e^{-\alpha t} \sin \beta^* t & (\zeta < 1) \end{cases} \\ \frac{y(t)}{v_0/\omega_n} &= \omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{\varphi(t)}{u_0/r\omega_n} = \begin{cases} \frac{\lambda_0 + r\omega_0/u_0}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t - \frac{\lambda_0 \{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)\}}{\sqrt{\zeta^2 - 1} (1 + \lambda_0^2)^{3/2}} e^{-\alpha t} \sinh \beta t & (\zeta > 1) \\ \frac{\lambda_0 + r\omega_0/u_0}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t - \frac{\lambda_0 \{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)\}}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t & (\zeta = 1) \\ \frac{\lambda_0 + r\omega_0/u_0}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t - \frac{\lambda_0 \{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)\}}{\sqrt{1 - \zeta^2} (1 + \lambda_0^2)^{3/2}} e^{-\alpha t} \sin \beta^* t & (\zeta < 1) \end{cases} \quad (0 < t < t_1)$$

衝突継続時間は無次元の形で

$$\omega_n t_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \tanh^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\zeta^2 - 1} & (\zeta > 1) \\ \frac{2}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} & (\zeta = 1) \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \tan^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} & (\zeta < 1) \end{cases} \quad (26)$$

衝突力は

$$\frac{N(t)}{ku_0/\omega_n} = \begin{cases} \frac{2\zeta^2 - 1}{\sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \left(1 - \lambda_0 \frac{r\omega_0}{u_0}\right) e^{-\alpha t} \left(-\sinh \beta t + \frac{2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\zeta^2 - 1} \cosh \beta t\right) & (\zeta > 1) \\ \left(1 - \lambda_0 \frac{r\omega_0}{u_0}\right) e^{-\sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n t} \left(-\omega_n t + \frac{2}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}}\right) & (\zeta = 1) \\ \frac{2\zeta^2 - 1}{\sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \left(1 - \lambda_0 \frac{r\omega_0}{u_0}\right) e^{-\alpha t} \left(-\sin \beta^* t + \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} \cos \beta^* t\right) & (\zeta < 1) \end{cases} \quad (0 < t < t_1) \quad (27)$$

最大衝撃力は、 $\zeta < 1/2$  のとき

$$\omega_n t_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{1 + \lambda_0^2}} \tan^{-1} \left( \frac{4\zeta^2 - 1}{4\zeta^2 - 3} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (28)$$

で起こり、 $\zeta > 1/2$  のときは衝突の瞬間に起こる。

衝突前後のコーナーにおける、壁と直角方向の速度成分は

$$w_0 = u_0 - p_0 \omega_0, \quad w_1 = -(n_0 - p_0 \omega_0) e^{-\alpha t_1} \quad (29)$$

であるから、コーナーの反発係数は

$$e_x = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \tanh^{-1} \left( \frac{2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\zeta^2 - 1} \right) \right\} & (\zeta > 1) \\ 1/e^2 = 0.135 & (\zeta = 1) \\ \exp \left\{ -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1} \right) \right\} & (\zeta < 1) \end{cases} \quad (30)$$

衝突終了時の重心の並進速度と重心のまわりの回転速度は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{A} - \mathfrak{B} e^{-\alpha t_1}, & v_1 &= v_0 \\ r\omega_1 &= \mathfrak{A}/\lambda_0 + \lambda_0 \mathfrak{B} e^{-\alpha t_1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となるから、衝突前のエネルギーに対する損失エネルギーの割合は

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{(\lambda_0 + r\omega_0/u_0)^2 + (1 - \lambda_0 r\omega_0/u_0)^2 e^{-2\alpha t_1}}{(1 + \lambda_0^2) \{1 + (r\omega_0/u_0)^2\}} \quad (32)$$

以上いずれも衝突前の物体の姿勢や速度に関するのはいうまでもない。減衰比 $\zeta$ が

$$\zeta = \zeta^* \sqrt{1 + \left( \frac{l_1}{r} \sin \theta_0 - \frac{d}{2r} \cos \theta_0 \right)^2} \quad (33)$$

( $\zeta^* = c/2\sqrt{Mk}$ ) のように物体の姿勢に関係することに注意すべきである。

壁が完全弾性体 ( $c=0$ ) であるとする

$$\left. \begin{aligned} \frac{x(t)}{u_0/\omega_n} &= \frac{\lambda_0(\lambda_0 + r\omega_0/u_0)}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t + \frac{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)}{(1 + \lambda_0^2)^{3/2}} \sin \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n t \\ \frac{y(t)}{v_0/\omega_n} &= \omega_n t \\ \frac{\varphi(t)}{u_0/r\omega_n} &= \frac{\lambda_0 + r\omega_0/u_0}{1 + \lambda_0^2} \omega_n t - \frac{\lambda_0 \{1 - \lambda_0(r\omega_0/u_0)\}}{(1 + \lambda_0^2)^{3/2}} \sin \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n t \quad (0 < t < t_1) \end{aligned} \right\} (34)$$

衝突時間は単に

$$\omega_n t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \quad (35)$$

衝撃力は

$$\frac{N(t)}{ku_0/\omega_n} = \frac{1 - \lambda_0 r\omega_0/u_0}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \sin \sqrt{1 + \lambda_0^2} \omega_n t \quad (0 < t < t_1) \quad (36)$$

この場合の反発係数は  $e_x=1$  でエネルギー損失はない。

図-3は衝突の際における物体重心の、壁面と直角な方向の運動、図-4は衝突力の大きさの変化を計算した例である。減衰が小さいとき ( $\zeta < 1/2$ ) は衝突力にピーク値が現われるが、減衰が大きくなると衝突の瞬間最大値が発生する。 $\zeta \rightarrow \infty$  のとき、衝突時間はごく短く、衝突力はき

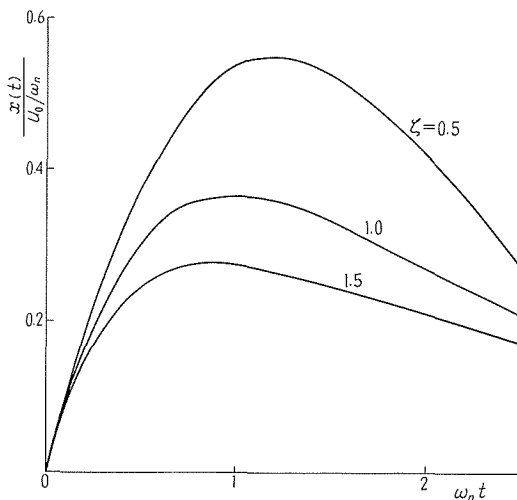


図-3 物体重心の壁面と直角方向の運動 ( $\lambda_0=0.5, r\omega_0/u_0=0$ )

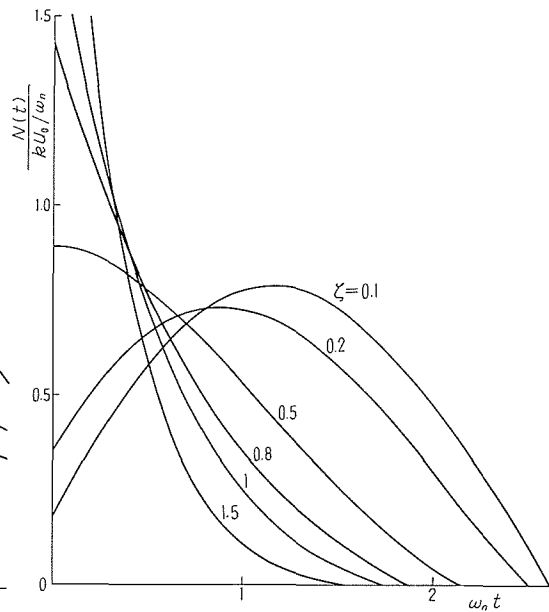


図-4 衝突力の大きさの変化 ( $\lambda_0=0.5, r\omega_0/u_0=0$ )

わめて大きくなる。適当な減衰を与えたとき、衝撃力のピーク値が最も小さくなる。

図-5は $\zeta$ に対する衝突時間, 反発係数, 損失エネルギー割合を計算した例である。衝突時間は $\zeta$ が大きいくほど減少する。減衰がないときは $e_x=1, \Delta E/E_0=0$ であるが, 減衰が大きくなると,  $e_x$ は単調に減少してやがて0となり, 逆に $\Delta E/E_0$ は増加して, ほとんど衝突エネルギーが壁に吸収されることになる。

4. 壁面の固体摩擦を考慮した計算

壁面の固体摩擦の影響をみるために, 質点が壁に衝突する場合を考える。このときは $l=d=0, J=0$ となるから, 式(17)は

$$\left. \begin{aligned} (Ms^2+k) X(s) &= Mu_0 \\ \mu k X(s) + Ms^2 Y(s) &= Mv_0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

と書ける。簡単のため壁の粘性減衰を省略し, また衝突の瞬間 $\dot{y}>0$ と考えている。式(37)を解くと

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \frac{u_0}{s^2 + \omega_n^2}, \\ Y(s) &= \frac{v_0 - \mu u_0}{s^2} + \frac{\mu u_0}{s^2 + \omega_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

逆変換することにより

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{u_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \\ y(t) &= (v_0 - \mu u_0) t + \frac{\mu u_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

衝突継続時間は

$$\omega_n t_1 = \pi \quad (40)$$

$v_0 > 2\mu u_0$  のとき, 衝突終了時の速度は

$$u_1 = -u_0, \quad v_1 = v_0 - 2\mu u_0 \quad (41)$$

で, その後

$$\left. \begin{aligned} x &= -u_0 \left( t - \frac{\pi}{\omega_n} \right) \\ y &= (v_0 - 2\mu u_0) \left( t - \frac{\pi}{\omega_n} \right) + (v_0 - \mu u_0) \frac{\pi}{\omega_n} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

なる運動をする。損失エネルギーは

$$\Delta E = 2m\mu u_0 (v_0 - \mu u_0) \quad (43)$$

$0 < v_0 < 2\mu u_0$  のときは

$$\omega_n t_2 = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{v}{\mu u_0} \right) \quad (44)$$

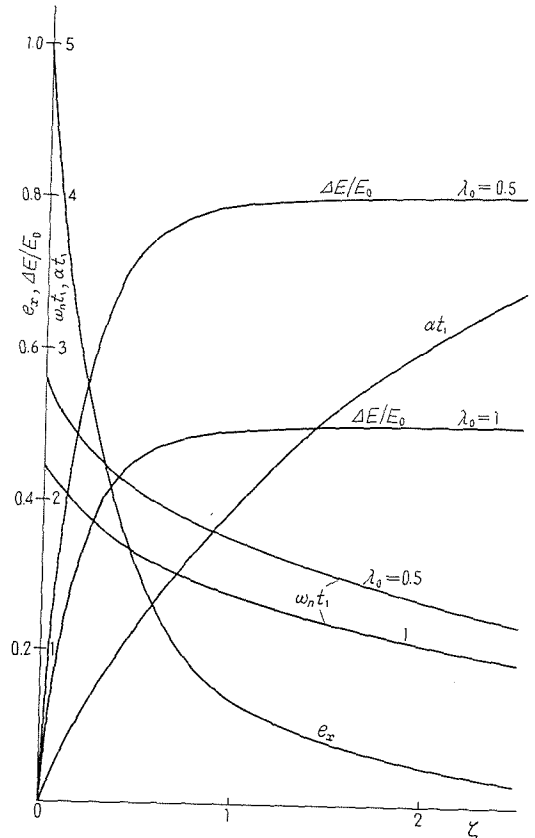


図-5 衝突時間, 反発係数, 損失エネルギー割合

で壁面に沿った速度が0となりその後この方向には運動しなくなる。このときの損失エネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{45}$$

に等しい。

### 5. 室内実験と理論計算の検討

#### 5.1 実験装置と方法

銅板 ( $l=207$  mm,  $d=116$  mm, 厚さ=9 mm) の4隅の近くに質量を付加した重量  $W=3.55$  kg, 重心まわりの慣性モーメント  $J=2.60$  kg $\cdot$ mm $\cdot$ s $^2$  (回転半径  $r=85$  mm) の長方形物体を, 細くて長いピアノ線でつり, 細い片持はりの一点に斜めに衝突させる。図-6 のようにはりの固定端の近くに貼ったひずみゲージの出力を, ひずみ計を通してシンクロスコープで記録し, 衝突力を測定すると同時に, 物体の衝突前後の運動を一定時間をへだてて照射するストロボ高照度装置の閃光によって写真撮影する。図-7 にその一例を示す。

なお光電式ピックアップによって衝突のタイミングをとらえ, さらに物体とはりの間に電気回路を作って, 接触中電流を通すことにより衝突時間を測定した。

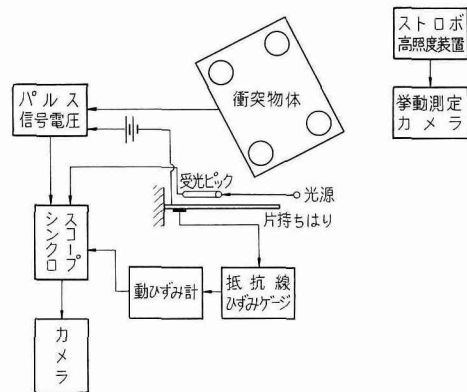


図-6 実験装置の概略

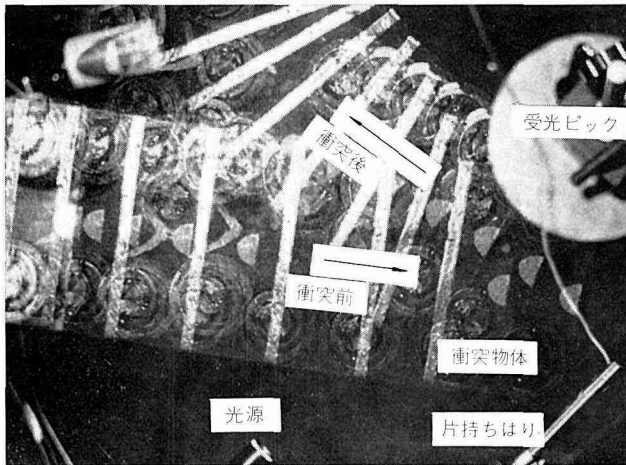


図-7 衝突物体の運動のストロボ写真

#### 5.2 実験結果と理論計算との比較

以上の装置により実験した結果を理論値と比較してみる。図-8 以下の実線は理論によるもの, ○印はすべて実験値である。物体が衝突する位置における片持はりのばねこわさは 10~15 kg/mm の範囲で, 反発実験によって測定した物体とはりの反発係数がおおむね 0.85 であることから, はりの減衰比は  $\zeta^*=0.055$  程度の値となった。

図-8 は衝突直前の物体の姿勢角と物体重心のはりに直角な方向の速度成分の関係を示す。上記理論による計算では  $\theta_0=30^\circ$  の付近で最大値をもつが, 実験結果もこれと比較的よく一致し

ているといえよう。

図-9は姿勢角と衝突直後の回転角速度の関係を示したものである。 $\theta_0=30^\circ$ の付近で角速度の符号が変わるのは、物体の重心と右前コーナーを通る直線がはりと直角になるのが $\theta = \tan^{-1}(116/207)=29^\circ$ のときであり、この角度を境として回転の向きが逆になるからである。実験の結

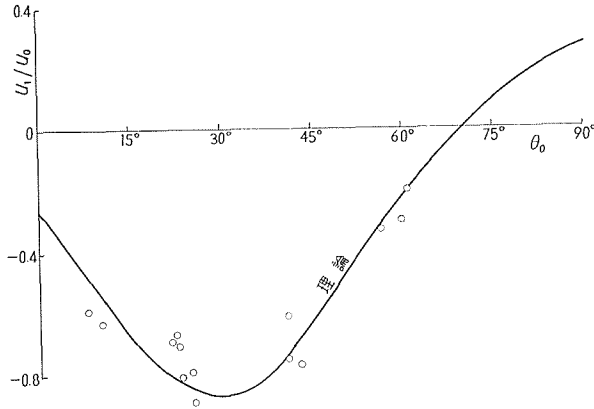


図-8 物体の姿勢角と重心の衝突前後の壁面と直角方向の速度 ( $\omega_0=0, \zeta^*=0.055$ )

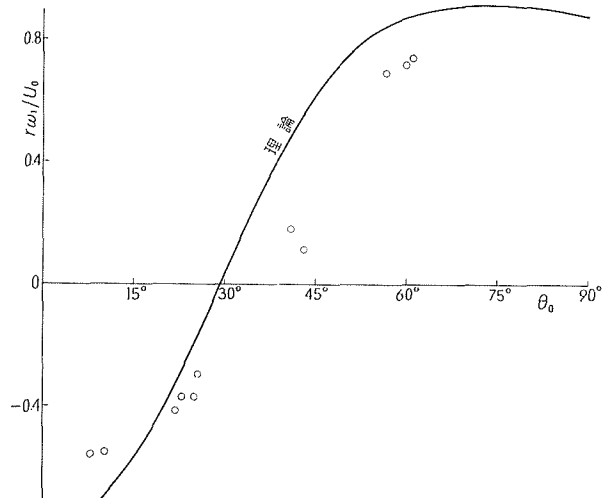


図-9 物体の姿勢角と衝突直後の回転角速度 ( $\omega_0=0, \zeta^*=0.055$ )

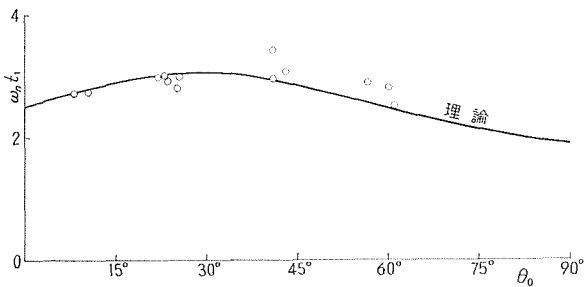


図-10 物体の姿勢角と衝突時間 ( $\omega_0=0, \zeta^*=0.055$ )

果が  $40^\circ$  付近で符号が変わっているのは、変形したはりの勾配の影響によるものと思われる。

図-10 は衝突 (接触) 時間を示したものであるが、実験と理論の結果は比較的よく一致している。当然衝突力は 図-11 のように  $\theta_0 = 30^\circ$  のときピーク値を示す。

図-12 に入力エネルギーに対する吸収エネルギーの割合を示す。衝突時の角度が大きくなるにつれて、理論値に比べ実験値の方が大きい値を示すが、理論計算では物体とはりの間の固体摩擦を省略しているのに対し、姿勢角が大きいとき物体のコーナーは壁面に沿ってすべり、その間にエネルギーが失われるためであろう。

図-13 は物体のコーナーとはりの間の反発係数の値を求めたものである。計算値がほぼ一定の値を示すのに対し、実験結果はこの値より小さい。これも上記吸収エネルギーの大きさと同様の理由によるものであろう。

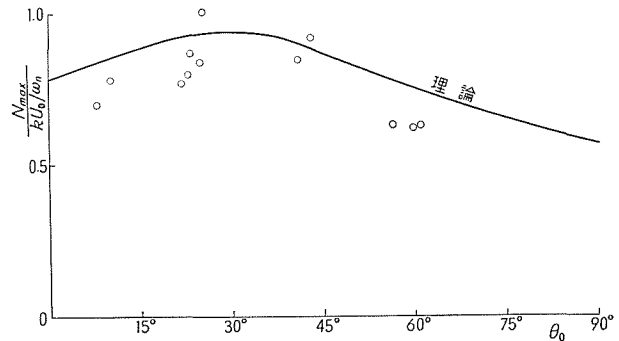


図-11 物体の姿勢角と最大衝突力 ( $\omega_0 = 0, \zeta^* = 0.055$ )

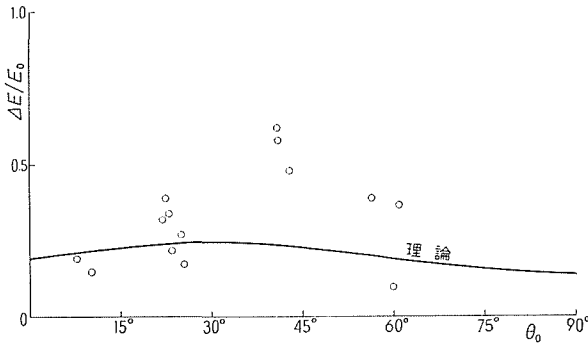


図-12 物体の姿勢角とエネルギー吸収割合  
( $\omega_0 = 0, \zeta^* = 0.055$ )

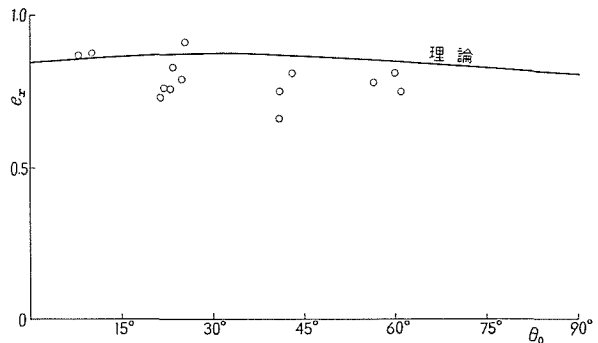


図-13 物体の姿勢角と反発係数  
( $\omega_0 = 0, \zeta^* = 0.055$ )

## 6. 結 論

物体が平面壁に衝突する際の運動について、物体を含め壁面を、これと等価なばね、ダンパ、固体摩擦系でおきかえて理論解析を行なった。とくに物体と壁面の間に摩擦が作用しない場合について計算を進め、衝突後の物体の挙動、衝突時間、衝突力、反発係数、吸収エネルギーなどの大きさを明らかにした。

長方形鋼板で作った物体をはり(壁面模形)に衝突させて実験した結果を、理論による計算値と比較したところ、おおむね等しいことが認められた。その結果、上記理論が正しく、かつこの程度の簡単な力学モデルで、物体と壁の間の衝突問題がよく説明できることがわかった。

終りに本実験にご協力頂いた富士電機工業株式会社中島和徳君に厚く謝意を表す。

## 文 献

- 1) D. M. Severy, ほか2名: SAE Trans., **67** (1959), 238.
- 2) E. Marquard: ATZ, **64-5** (1962), 141.
- 3) 森沢, 佐藤, 林: 自動車技術, **23-2** (昭44), 170.
- 4) 入江, 深谷: 機械学会北海道支部第12回講演論文集 (昭42), 173.