HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	衝突振動系の非線形現象について
Author(s)	深谷, 健一; 入江, 敏博
Citation	北海道大學工學部研究報告, 58, 75-84
Issue Date	1970-12-19
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41012
Type	departmental bulletin paper
File Information	58_75-84.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

衝突振動系の非線形現象について

深谷健一*　入江敏博*

(昭和45年8月31日受理)

Nonlinear Phenomena of a Vibro-Impact System

Ken-ichi FUKAYA　Toshihiro IRIE

(Received August 31, 1970)

Abstract

The impact vibration arising when a mass collides with a rigid wall under the action of an exciting force has been studied in recent years. However, subharmonic and superharmonic impact vibrations appearing in such mechanical systems have not been dealt with sufficiently.

In this paper, a theoretical study on nonlinear phenomena of these vibro-impact systems was made and the conditions for maintaining a stable periodic vibration were obtained. From the results of the numerical calculation, it was found that the superharmonic impact vibration arises only in systems with small clearances, while the subharmonic vibration appears when the clearance and excitation frequency become large, and that some types of impact vibrations exist together in a narrow domain of system parameters.

1. まえがき

一定の距離を隔てて壁に相対するか，あるいは壁に圧着された物体に調和起振力が作用して起こる衝突振動は実際の機械や機械要素にみられる現象である。この問題に関して，周期的な衝突振動とその安定性について比較的取り扱いの簡単な一つの波の起振力が作用して1周期の運動の間に1回衝突する，いわゆる基本衝突振動についてはすでに解かれている[1)~7)]が，多数波の起振力が作用して起こる1周期の間に多数回の衝突が起こるといった複雑な運動については十分の知識が得られていない。

本報告は1周期の運動の間に n 波の起振力が作用し，m 回の衝突が起こるいわゆる高次あるいは分数衝突振動の存在を確かめるとともに，これらが起こるパラメータの範囲を求めたものである。

2. 周期的な衝突振動が起こる条件

図1のようにばねこわさ k なるばねに支えられ，一定の距離 d を隔てて壁と相対している質量 m の物体に調和起振力 $F\sin\omega t$ が作用するときは

$$m\ddot{x}+kx=F\sin\omega t \qquad (1)$$

なる運動方程式が成立する。x は物体の平衡位置から壁の方向へ測った変位であるが，予め物体が壁と圧着されているときは，壁がない物体単独の平衡位置から測った変位をとり，$x\leqq d<0$ である。物体に作用する粘性抵抗や

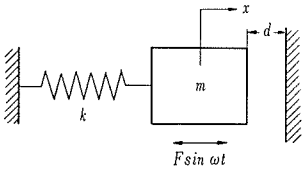

図1　壁と衝突する物体

* 機械工学第二学科　機械力学講座

その他の抵抗は問題の本質に直接関係がないのでここでは省略してある。

ある条件のもとで物体が壁と衝突して一定の周期運動をするものと考え，1周期 T の間に m 回の衝突が起こるものとする。いまこの間の衝突時刻を t_j $(j=0,1,2,\cdots,m-1)$，各衝突間の物体の変位を x_j $(t_{j-1}\leq t\leq t_j)$ と書けば，衝突の際

$$\left.\begin{aligned} &x_j(t_{j-1})=x_j(t_j)=d \\ &\dot{x}_j(t_{j-1}+0)=v_{j-1+0}, \qquad \dot{x}_j(t_j-0)=v_{j-0} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

となる。ただし $v_{j\mp0}$ は衝突直前と直後の速度であるが，衝突に際して物体と壁はともに変形することなく，衝突は瞬間的に起こり，速度の間に反発係数 ε によってきまる一定の関係

$$v_{j+0}=-\varepsilon v_{j-0} \tag{3}$$

があるものとする。

式(1)～(3)を無次元変位 $\xi_j=x_j/x_{st}$ $(x_{st}=F/k)$，無次元時間 $\tau=\omega_n t$ $(\omega_n=\sqrt{k/m})$，無次元速度 $u_{j\mp0}=v_{j\mp0}/\omega_n x_{st}$，振動数比 $\beta=\omega/\omega_n$，すき間比 $\delta=d/x_{st}$ を用いて書き直せば

$$\ddot{\xi}_j+\xi_j=\sin\beta\tau \quad (\tau_{j-1}\leq\tau\leq\tau_j) \tag{4}$$

および

$$\left.\begin{aligned} &\xi_j(\tau_{j-1})=\xi_j(\tau_j)=\delta \\ &\dot{\xi}_j(\tau_{j-1}+0)=u_{j-1+0}, \qquad \dot{\xi}_j(\tau_j-0)=u_{j-0} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$u_{j+0}=-\varepsilon u_{j-0} \tag{6}$$

となる。式(2)の解は

$$\left.\begin{aligned} &\xi_j(\tau)=C_j\sin\tau+D_j\cos\tau+f\sin\beta\tau \quad (\tau_{j-1}\leq\tau\leq\tau_j) \\ &f=1/(1-\beta^2) \quad (\beta\neq1) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

各衝突の間において条件式(5)を適用して積分定数を消去すれば

$$\left.\begin{aligned} \delta&=(\delta-f\sin\beta\tau_{j-1})\cos z_j+(u_{j-1+0}-\beta f\cos\beta\tau_{j-1})\sin z_j+f\sin\beta\tau_j \\ u_{j-0}&=-(\delta-f\sin\beta\tau_{j-1})\sin z_j+(u_{j-1+0}-\beta f\cos\beta\tau_{j-1})\cos z_j+\beta f\cos\beta\tau_j \\ &\qquad (j=1,2,\cdots,m) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

φ はある衝突時刻の起振力に対する位相角で，$z_j=\tau_j-\tau_{j-1}$ は衝突の間の時間間隔である（図2参照）。式(8)はつぎのように書くことができる。

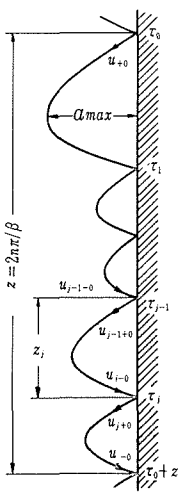

図2 物体の運動

$$\left.\begin{aligned} F_{11}&=(\delta-f\sin\varphi)\cos z_1+(-\varepsilon u_{-0}-\beta f\cos\varphi)\sin z_1 \\ &\qquad -\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}=0 \\ F_{12}&=-(\delta-f\sin\varphi)\sin z_1+(-\varepsilon u_{-0}-\beta f\cos\varphi)\cos z_1 \\ &\qquad -\{u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}=0 \\ F_{21}&=\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}\cos z_2+\{-\varepsilon u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}\sin z_2 \\ &\qquad -\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1+\beta z_2)\}=0 \\ F_{22}&=-\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}\sin z_2+\{-\varepsilon u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}\cos z_2 \\ &\qquad -\{u_{2-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1+\beta z_2)\}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{m1}&=\{\delta-f\sin(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m-1}z_r)\}\cos z_m \\ &\qquad +\{-\varepsilon u_{m-1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m-1}z_r)\}\sin z_m \\ &\qquad -\{\delta-f\sin(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m}z_r)\}=0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{m2} = &-\{\delta - f\sin(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m-1}z_r)\}\sin z_m + \{-\varepsilon u_{m-1-0} - \beta f\cos(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m-1}z_r)\}\cos z_m \\ &- \{u_{-0} - \beta f\cos(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{m}z_r)\} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$z = \sum_{r=1}^{m} z_r$ は運動の無次元周期で，起振力の波数を n $(=1,2,3,\cdots\cdots)$ とすれば $z = 2n\pi/\beta$ と書くことができる。

周期運動は式(9)の合計 $2m$ 個の式から同数の未知量 $\varphi, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}; u_{-0}, u_{1-0}, \cdots u_{m-1-0}$ を解くことによって求まるが，式(9)はこれらに関する超越方程式で代数的に解けないので，計算機によって数値的に解かなければならない。

実際に周期運動が存在するためにはおのおのの衝突速度が

$$u_{-0} > 0, \quad u_{1-0} > 0, \cdots\cdots, \quad u_{m-1-0} > 0 \tag{10}$$

であり，また常に

$$\dot{\xi}_j(\tau) \leq \delta \quad (\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j) \tag{11}$$

が満足されねばならない。

つぎに $m = 1, 2, 3$ の各場合について計算してみる。

(1) $m = 1$ の場合

周期運動が存在するための条件式(8)は単に

$$\left.\begin{aligned} &(\delta - f\sin\varphi)\cos z + (-\varepsilon u_{-0} - \beta f\cos\varphi)\sin z - (\delta - f\sin\varphi) = 0 \\ &-(\delta - f\sin\varphi)\sin z + (-\varepsilon u_{-0} - \beta f\cos\varphi)\cos z - (u_{-0} - \beta f\cos\varphi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となる。この式から $f\sin\varphi$, $f\cos\varphi$ が代数的に解けて

$$\left.\begin{aligned} f\sin\varphi &= \delta + \frac{1+\varepsilon}{2}u_{-0}\cot\frac{z}{2} \\ f\cos\varphi &= \frac{1-\varepsilon}{2\beta}u_{-0} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式(13)より位相角は

$$\varphi = \tan^{-1}\left\{\frac{2\beta\delta}{(1-\varepsilon)u_{-0}} + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta\cot\frac{z}{2}\right\} \tag{14}$$

式(13)の両辺を2乗して加えることによって，衝突速度の計算式

$$\left\{\left(\frac{1-\varepsilon}{2\beta}\right)^2 + \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\cot\frac{z}{2}\right)^2\right\}u_{-0}^2 + (1+\varepsilon)\delta u_{-0}\cot\frac{z}{2} + \delta^2 - f^2 = 0 \tag{15}$$

が得られる。

周期解が存在するためには $u_{-0} > 0$ なる根が存在しなければならないが，そのためには式(15)の判別式 $D \geq 0$ より

$$|\delta| \leq \sqrt{1 + \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\beta\cot\frac{z}{2}\right)^2}\,|f| \tag{16}$$

そして

(A) $$|\delta| > |f|, \qquad \delta\cot(z/2) < 0 \tag{17}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} &\delta < f < 0, \qquad 0 < z < \pi/2, \qquad \pi < z < 3\pi/2, \cdots \\ &\delta > f > 0, \qquad \pi/2 < z < \pi, \qquad 3\pi/2 < z < 2\pi, \cdots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

のとき u_{-0} に正の2根が存在し

(B) $$-f < \delta < f \tag{19}$$

のとき u_{-0} のただ一つの正根が存在する。

(2) $m=2$ の場合

条件式(8)は

$$\left.\begin{aligned}
&(\delta-f\sin\varphi)\cos z_1+(-\varepsilon u_{-0}-\beta f\cos\varphi)\sin z_1-\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}=0\\
&-(\delta-f\sin\varphi)\sin z_1+(-\varepsilon u_{-0}-\beta f\cos\varphi)\cos z_1-\{u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}=0\\
&\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}\cos z_2+\{-\varepsilon u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}\sin z_2-(\delta-f\sin\varphi)=0\\
&-\{\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\}\sin z_2+\{-\varepsilon u_{1-0}-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)\}\cos z_2-(u_{-0}-\beta f\cos\varphi)=0
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

となる。式(20)より u_{-0}, u_{1-0} を消去すれば

$$\left.\begin{aligned}
F(\varphi,z_1)&=D_0(\sin z_1-\varepsilon\sin z_2)-D_1(\sin z_1\cos z_2-\varepsilon\sin z_2\cos z_1)\\
&\quad-(1+\varepsilon)V_1\sin z_1\sin z_2=0\\
G(\varphi,z_1)&=D_1(\sin z_2-\varepsilon\sin z_1)-D_0(\sin z_2\cos z_1-\varepsilon\sin z_1\cos z_2)\\
&\quad-(1+\varepsilon)V_0\sin z_1\sin z_2=0
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

と書ける。ただし

$$\left.\begin{aligned}
D_0&=\delta-f\sin\varphi, \qquad D_1=\delta-f\sin(\varphi+\beta z_1)\\
V_0&=-\beta f\cos\varphi, \qquad V_1=-\beta f\cos(\varphi+\beta z_1)
\end{aligned}\right\}$$

式(21)は φ と z_1 に関する超越方程式で，2元ニュートン法による反復計算によって数値的に解くことができる。すなわち式(21)の各式を φ と z_1 の近似値 φ_p, z_{1p} の近くで展開し，2次以上の項を省略すれば

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial F}{\partial z_1}\\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial G}{\partial z_1}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}\Delta\varphi\\ \Delta z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix}_p\tag{22}$$

p は第 p 反復値を意味する添字で，$\Delta\varphi=\varphi_{p+1}-\varphi_p$, $\Delta z_1=z_{1p+1}-z_{1p}$ は反復による補正量である。式(22)を解くことにより

$$\varphi_{p+1}=\varphi_p-|J|_\varphi/|J|, \qquad z_{1p+1}=z_{1p}-|J|_{z1}/|J|\tag{23}$$

$|J|$ は式(22)左辺のマトリックスから作られる行列式（ヤコビアン）を表わし，$|J|_\varphi$, $|J|_{z1}$ はマトリックスのそれぞれに対応する列の値を $(F,G)_p$ で置きかえた行列式である。ヤコビアンが $|J|\neq 0$ である限り，反復値は2次以上の収束性をもち，1元ニュートン法と同様，反復値が根の近くに接近するとそのごの収束はきわめて速い。速度は式(20)より得た

$$\left.\begin{aligned}
u_{-0}&=\frac{1}{\varepsilon}(V_0+D_0\cot z_1-D_1\operatorname{cosec} z_1)\\
u_{1-0}&=\frac{1}{\varepsilon}(V_1+D_1\cot z_2-D_0\operatorname{cosec} z_2)
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

によって計算される。

(3) $m=3$ の場合

この場合式(21)に相当する式は

$$\left.\begin{aligned}
F(\varphi,z_1,z_2)&=-\varepsilon D_0\sin z_2-D_1(\sin z_1\cos z_2-\varepsilon\sin z_2\cos z_1)\\
&\quad+D_2\sin z_1-(1+\varepsilon)V_1\sin z_1\sin z_2=0\\
G(\varphi,z_1,z_2)&=-\varepsilon D_1\sin z_3-D_2(\sin z_2\cos z_3-\varepsilon\sin z_3\cos z_2)\\
&\quad+D_0\sin z_2-(1+\varepsilon)V_2\sin z_2\sin z_3=0\\
H(\varphi,z_1,z_2)&=-\varepsilon D_2\sin z_1-D_0(\sin z_3\cos z_1-\varepsilon\sin z_1\cos z_3)\\
&\quad+D_1\sin z_3-(1+\varepsilon)V_3\sin z_3\sin z_1=0
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \delta - f\sin(\varphi+\beta z_1+\beta z_2) \\ V_2 &= -\beta f\cos(\varphi+\beta z_1+\beta z_2) \end{aligned}\right\}$$

この場合の速度は

$$\left.\begin{aligned} u_{-0} &= \frac{1}{\varepsilon}(V_0+D_0\cot z_1-D_1\operatorname{cosec} z_1) \\ u_{1-0} &= \frac{1}{\varepsilon}(V_1+D_1\cot z_2-D_2\operatorname{cosec} z_2) \\ u_{2-0} &= \frac{1}{\varepsilon}(V_2+D_2\cot z_3-D_0\operatorname{cosec} z_3) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

から計算される。

3. 周期運動の安定性

上記の周期運動が実際に存在するためには，運動が安定でなければならない。このためにはある衝突の時刻に生じた微小なかく乱が衝突を繰り返すにしたがって漸次消滅する必要がある。

第 q 回目の周期運動において第 j 回目の衝突後のかく乱運動は

$$\left.\begin{aligned} \xi_j^{(q)}(\tau) &= (C_j+\Delta C_j^{(q)})\sin\tau+(D_j+\Delta D_j^{(q)})\cos\tau+f\sin\beta\tau \\ \dot{\xi}_j^{(q)}(\tau) &= (C_j+\Delta C_j^{(q)})\cos\tau-(D_j+\Delta D_j^{(q)})\sin\tau+\beta f\cos\beta\tau \\ &\qquad (j=1,2,\cdots,m) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

と書け，したがってこの衝突区間の最初の時刻 $(\tau_{j-1+0}^{(q)})$ におけるかく乱量は

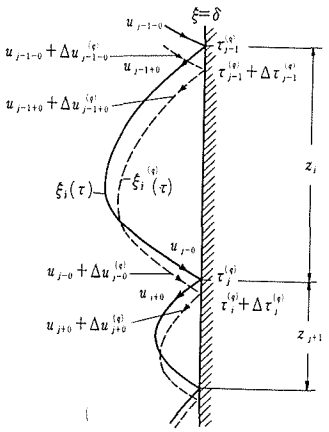

図 3 かく乱された運動

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Delta C_j^{(q)}\sin\tau_{j-1}^{(q)}+\Delta D_j^{(q)}\cos\tau_{j-1}^{(q)}+u_{j-1+0}\Delta\tau_{j-1}^{(q)} \\ \Delta u_{j-1+0}^{(q)} &= \Delta C_j^{(q)}\cos\tau_{j-1}^{(q)}-\Delta D_j^{(q)}\sin\tau_{j-1}^{(q)}-\theta_{j-1}\Delta\tau_{j-1}^{(q)} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

この区間の終りの時刻 $(\tau_{j-0}^{(q)})$ では

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Delta C_j^{(q)}\sin\tau_j^{(q)}+\Delta D_j^{(q)}\cos\tau_j^{(q)}+u_{j-1-0}\Delta\tau_j^{(q)} \\ \Delta u_{j-0}^{(q)} &= \Delta C_j^{(q)}\cos\tau_j^{(q)}-\Delta D_j^{(q)}\sin\tau_j^{(q)}-\theta_j\Delta\tau_j^{(q)} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

に等しい。ただし $\theta_j=\delta-\sin(\varphi+\beta\sum_{r=1}^{j}z_r)$

式(28)と(29)より $\Delta C_j^{(q)}$, $\Delta D_j^{(q)}$ を消去することによって

$$\left.\begin{aligned} &(\theta_{j-1}\sin z_j-u_{j-1+0}\cos z_j)\Delta\tau_{j-1}^{(q)}+u_{j-0}\Delta\tau_j^{(q)}+\Delta u_{j-1+0}^{(q)}\sin z_j=0 \\ &(\theta_{j-1}\cos z_j+u_{j-1+0}\sin z_j)\Delta\tau_{j-1}^{(q)}-\theta_j\Delta\tau_j^{(q)}+\Delta u_{j-1+0}^{(q)}\cos z_j-\Delta u_{j-0}^{(q)}=0 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

となるが，式(30)を $\Delta\tau_j^{(q)}$ と $\Delta u_{j-0}^{(q)}$ について解くことによって

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_j^{(q)}\\ \Delta u_{j-0}^{(q)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}_j^{(q)}\begin{pmatrix}\Delta\tau_{j-1}^{(q)}\\ \Delta u_{j-1-0}^{(q)}\end{pmatrix} \tag{31}$$

となる。$\boldsymbol{T}_j^{(q)}$ はせん移マトリックスで

$$\boldsymbol{T}_j^{(q)}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{u_{j-0}}(\theta_{j-1}\sin z_j+\varepsilon u_{j-1-0}\cos z_j) & \varepsilon\dfrac{1}{u_{j-1}}\sin z_j \\ \dfrac{\theta_j}{u_{j-0}}(\theta_{j-1}\sin z_j+\varepsilon u_{j-1-0}\cos z_j)+(\theta_{j-1}\cos z_j-\varepsilon u_{j-1-0}\sin z_j) & -\varepsilon\dfrac{\theta_j}{u_{j-1}}\sin z_j-\cos z_j\end{pmatrix}$$

式(31)は衝突時刻と衝突速度のかく乱に関する漸化式で，1周期にわたって衝突が繰り返されると

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_m^{(q)} \\ \Delta u_{m-0}^{(q)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_m^{(q)}\ \boldsymbol{T}_{m-1}^{(q)} \cdots\cdots\cdots \boldsymbol{T}_1^{(q)} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0^{(q)} \\ \Delta u_{-0}^{(q)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0^{(q)} \\ \Delta u_{-0}^{(q)} \end{pmatrix} \tag{32}$$

となる。

微小かく乱を $\Delta\tau_j^{(q)} = T_0\lambda^{q+j}$, $u_{j-0}^{(q)} = U_0\lambda^{q+}$ とおき，これらを式(32)へ代入したのち，T_0, U_0 を消去することによって，安定性に関するつぎの特性方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda^m & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda^m \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

ここで T_{ij} はせん移マトリックス $\boldsymbol{T}$ の要素である。式(33)を展開することによって λ^m の2次方程式

$$\lambda^{2m}-(T_{11}+T_{22})\lambda^m+T_{11}T_{22}-T_{12}T_{21} = 0 \tag{34}$$

がえられるが，ここで常に

$$T_{11}T_{22}-T_{12}T_{21} = \varepsilon^{2m} \tag{35}$$

に等しく，また

$$T_{11}+T_{22} = b_m(\delta, \beta, \varepsilon; m/n)\varepsilon^m \tag{36}$$

はつぎのような量である。

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= 2\cos z+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\theta_0}{u_{-0}}\sin z \\
b_2 &= 2\cos z+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\theta_0}{u_{-0}}+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\right)\sin z+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\sin z_1\sin z_2 \\
b_3 &= 2\cos z+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\theta_0}{u_{-0}}+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}+\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\right)\sin z \\
&\quad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\left\{\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\sin z_1\sin(z-z_1)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\sin z_2\sin(z-z_2)+\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\frac{\theta_0}{u_{-0}}\sin z_3\sin(z-z_3)\right\} \\
&\quad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^3\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\sin z_1\sin z_2\sin z_3 \\
b_4 &= 2\cos z+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\theta_0}{u_{-0}}+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}+\frac{\theta_2}{u_{2-0}}+\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\right)\sin z \\
&\quad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\left\{\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\sin z_1\sin(z-z_1)+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\sin z_2\sin(z-z_2)\right. \\
&\qquad+\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin z_3\sin(z-z_3)+\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\frac{\theta_0}{u_{-0}}\sin z_4\sin(z-z_4) \\
&\qquad\left.+\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\sin(z_1+z_2)\sin(z_3+z_4)+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin(z_2+z_3)\sin(z_1+z_4)\right\} \\
&\quad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^3\left\{\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\sin z_1\sin z_2\sin(z_3+z_4)\right. \\
&\qquad+\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin z_2\sin z_3\sin(z_1+z_4)+\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin z_3\sin z_4\sin(z_1+z_2) \\
&\qquad\left.+\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin z_1\sin z_4\sin(z_2+z_3)\right\} \\
&\quad+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^4\frac{\theta_0}{u_{-0}}\frac{\theta_1}{u_{1-0}}\frac{\theta_2}{u_{2-0}}\frac{\theta_3}{u_{3-0}}\sin z_1\sin z_2\sin z_3\sin z_4 \\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

運動が安定であるためには $|\lambda|<1$ でなくてはならないが，その条件は式(34)より

$$|b_m(\delta, \beta, \varepsilon; m/n)|\varepsilon^m < 1+\varepsilon^{2m} \tag{38}$$

のように簡単に書くことができる。

4. 数値計算ならびに考察

以上の理論にもとづいて計算した結果を図4以下に示す。

図4は物体と壁間の反発係数が 0.5 なる場合について1周期の間に一つの波の起振力が作用して1回の衝突が起こる安定な基本(1/1)衝突振動(図4-a)，2回衝突が起こる高次(2/1)振動(図4-b)，2波の起振力が作用して1回の衝突が起こる分数(1/2)衝突振動(図4-c)が存在する $1/\beta-\delta$ の範囲を求めたものである。これらの横軸に通常の振動数比の逆数 $(1/\beta)$ がとられているが，その理由は衝突時間間隔 $z=2n\pi/\beta$ が周期運動が起こる条件や，安定性を判定する上に大きい役割りを果たしているので計算や取扱い上便利であること，また高次衝突振動の領域を拡大できて安定な周期運動が存在する領域が見易い形状となるからである。しかし逆に分数衝突振動の安定領域は狭くなるので，とくにこの運動に注目するときは，通常の振動数比に変換するのがのぞましい。図4に示す領域のうち，振動系に安定な周期運動が発生するのは白地の領域内に含まれる振動数比とすきま比の値をもつ場合だけで，斜線Dのパラメータ範囲では周期解そのものが全く存在しない。

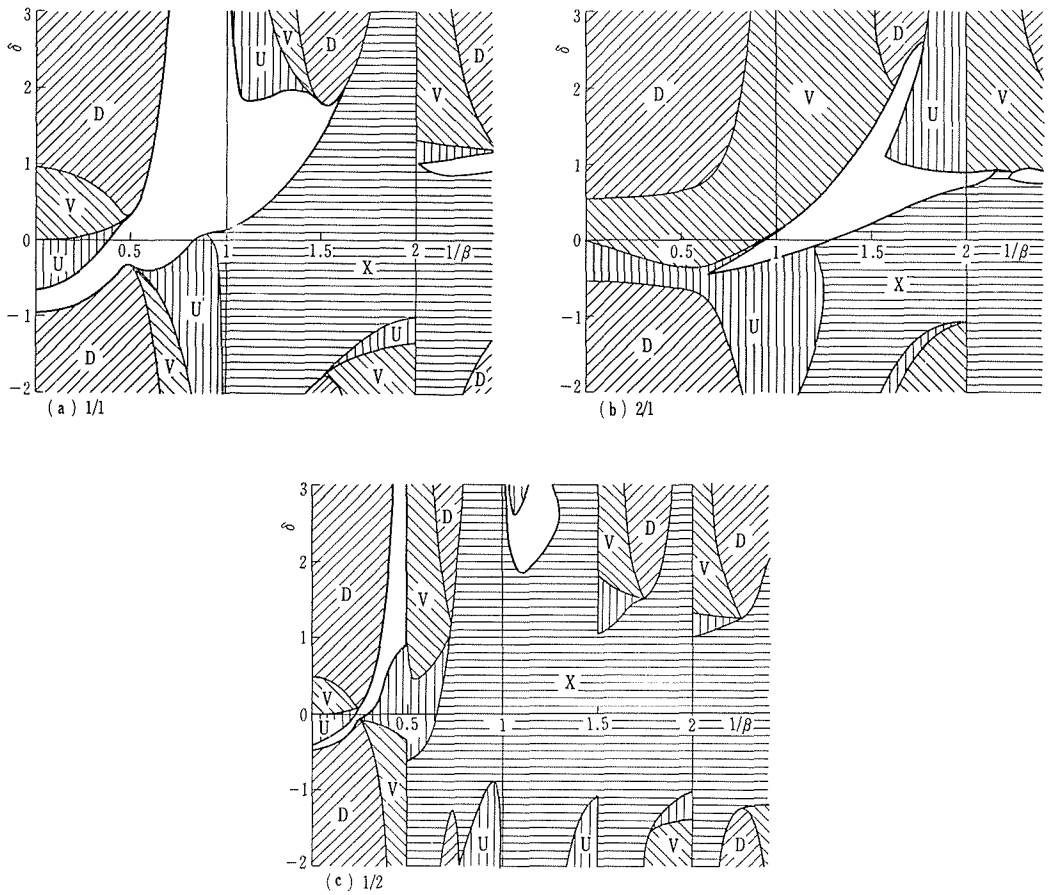

図 4 安定な周期運動の存在領域 (ε=0.5)

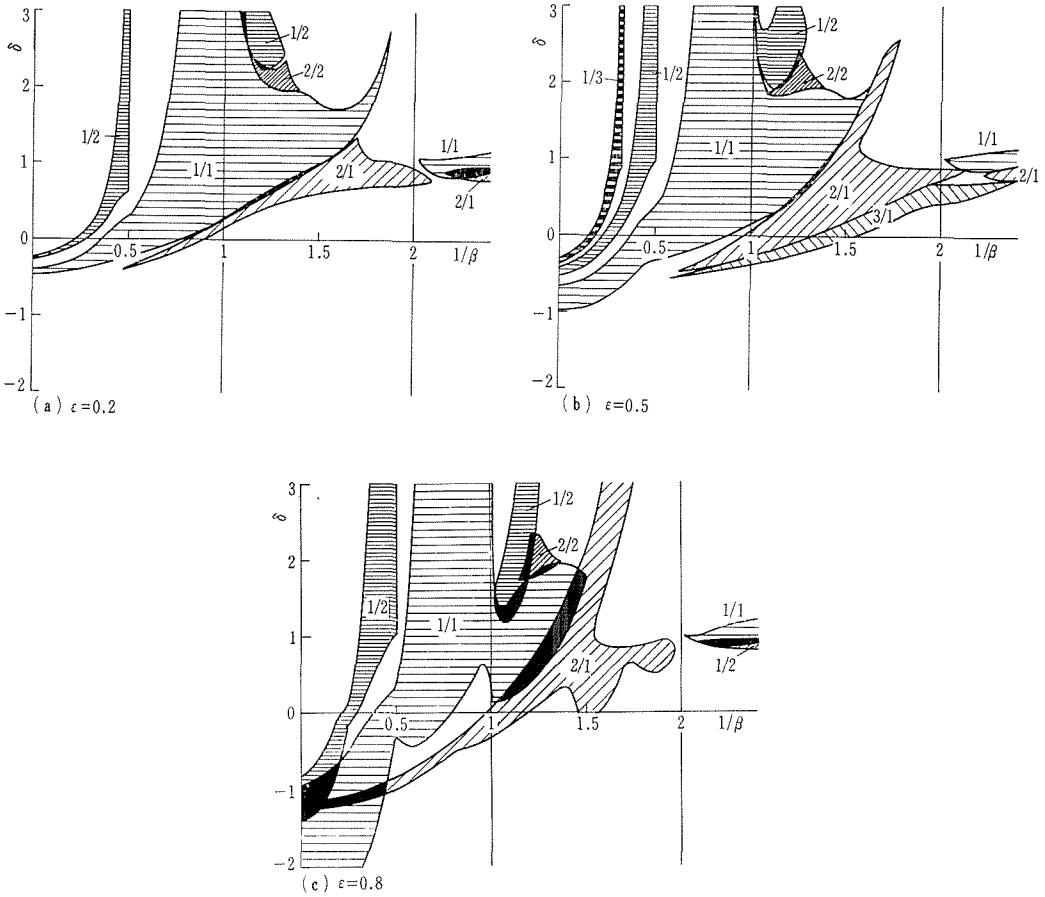

図 5 安定な周期運動の存在領域

また斜線Vの領域では正の衝突速度が得られず，縦線Uでは運動が不安定，横線Xの領域では物体が壁に交さするなど実際に安定な周期運動が起こり得ない。

図5のおのおのの図は $\varepsilon = 0.2, 0.5, 0.8$ の場合の比較的簡単な形の安定な基本衝突振動，高次衝突振動および分数衝突振動が起こる領域を示したものである。これらの図から次数が高い ($1/1 \to 2/1 \to 3/1 \cdots\cdots$) 高次衝突振動ほど，すき間比の小さいところに存在し，また分数衝突振動はすき間比の大きい場合か，振動数比が高い ($1/\beta$ が小さい) 場合に発生することがわかる。そして基本衝突振動は最も存在範囲が広く，次数が高い高次衝突振動や分数衝突振動ほど狭い範囲に限られてくる。

ごく狭い範囲(図の黒地の部分)ではあるが，これら各種の振動形が共存するパラメータの範囲があり，衝突振動系が強い非線形系であるために，このパラメータの範囲では初期値によって，発生する定常振動形が異なってくる[8),9)]。とくに 2/2 衝突振動は不等時間間隔をもつ基本衝突振動と見なしうるが，これは基本衝突振動と2次衝突振動の小さい谷間に介在している。

白地の部分にはいっそう高次の振動が存在すると考えられるが，それを求めるには計算上，とくに多元超越方程式を解くことに困難さがあるので，むしろ計算機シミュレーションによって，適当な初期値から出発した過渡解が定常振動にいたる過程を調べた方が便利である。一般に物体と壁の間の反発係数が大きくなるにしたがって，基本衝突振動以外の振動の安定領域が拡がり，

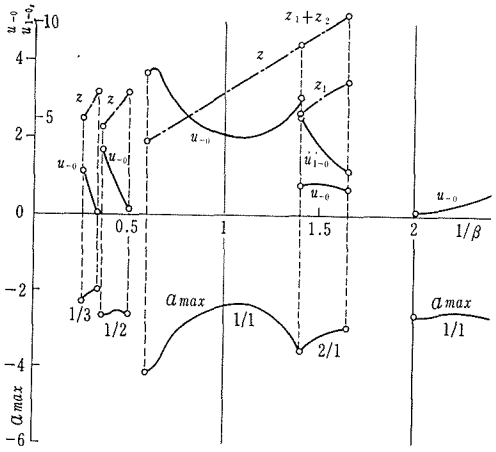

図 6　最大振幅，衝突速度，衝突時間間隔
($\varepsilon=0.5$, $\delta=1$)

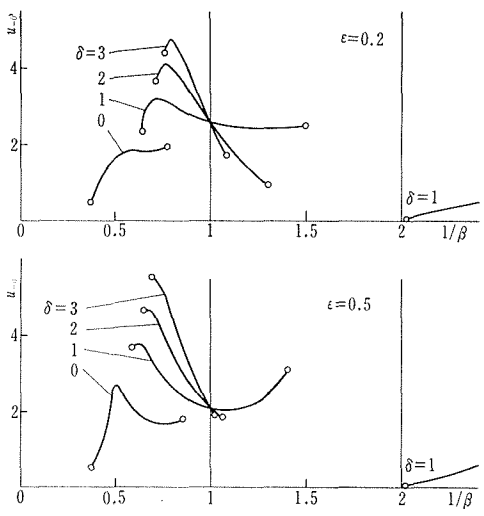

図 7　基本衝突振動の衝突速度

$\varepsilon=0.8$ になるとかなり広範囲にわたって同じパラメータで複数の振動形が発生するにいたる。

図6は反発係数0.5，すき間比1の場合について，物体の最大振幅，衝突速度，衝突時間間隔を示したものである。共振点付近ではいずれの値も小さくなっており，また当然なことではあるが最大速度が大きいほど，最大振幅が大きくなっている。機械の目的によって衝突速度を大きくする必要がある場合には，共振点から離れた基本衝突振動を利用するのが有利であるが，安定な振動数の領域を越えないように注意する必要がある。

図7は基本衝突振動の衝突速度を各種の反発係数とすき間比について描いたものである。すき間が大きいほど衝突速度は大きいが，安定な運動が起こる振動数の幅は小さくなる。また反発係数が大きいほど衝突速度は大きい。

5. 結　　論

(1) 従来あまり研究されていなかった高次衝突振動や分数衝突振動について解析し，安定な周期運動の生ずるパラメータ範囲を求めた。

(2) 高次衝突振動の安定領域は次数が高いほど (2/1 → 3/1…) すき間比の小さい側に移り，かつしだいに狭くなる。

(3) 分数衝突振動は起振振動数が高く，すき間比の大きい側に存在する。

(4) ある狭いパラメータの範囲ではいくつかの振動形が共存し，初期値によってそのどれかの振動が発生する。

(5) 大きい衝突速度を継続して得るためには，大きい反発係数とすき間をもった振動系に発生する，共振点からなるべく離れた基本衝突振動を利用するのが有利であるが，安定な振動数の限界を超えないよう注意することが必要である。

(6) 1周期の間に多数回の衝突を繰り返す高次衝突振動 ($m=4$ 以上) を取り扱うためには多元

超越方程式を計算する困難さがあり，計算機シミュレーションによってその存在を調べるのが得策である。

参 考 文 献

1) C. C. Fu and B. Paul: Intern. J. Solids Structures, 4 (1968), 897.
2) C. C. Fu: Trans. ASME, Ser. E, **36**-4 (1969). 743.
3) М. Я. Израцлобич: МАЩИН. 1 (1969), 39.
4) A. E. Kobrinskii: Dynamics of mechanisms with elastic connections and impact systems (translated from Russian) (1970), ILIFFE Books Ltd.
5) 川井良二，小寺　忠：機械学会論文集，**35**-274 (昭 44)，1233.
6) 深谷健一，入江敏博：北大工学部研究報告，56 (昭 45)，27.
7) 入江敏博，深谷健一：機械学会講演論文集 (第 2 回シンポジウム＝非線形振動)，700-10 (昭 45-8)，37.
8) C. Hayashi: Nonlinear oscillations in physical systems (1964), McGraw-Hill Books Co.
9) 深谷健一，入江敏博：機械学会北海道支部第 14 回講演論文集 (昭 45-10)，77.