



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ファブリ・ペロー共振器によるプラズマ定数の測定について
Author(s)	榎戸, 武楊; Enoto, Takeaki; 鈴木, 道雄 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 59, 107-119
Issue Date	1971-03-10
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41027">https://hdl.handle.net/2115/41027</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	59_107-120.pdf



# ファブリ・ペロー共振器によるプラズマ定数の測定について

榎戸 武揚\* 鈴木 道雄\*

(昭和45年9月30日受理)

## The Measurement of Plasma Parameters with a Fabry-Perot Resonator

Takeaki ENOTO Michio SUZUKI

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, Sapporo, Japan

(Received September 30, 1970)

### Abstract

The input admittance of the Fabry-Perot resonator coupled to a waveguide by means of a grating, in which an anisotropic dielectric sheet or a plasma sheet is inserted, is derived using the network formulation of the electromagnetic field. The reflection coefficient vs. frequency characteristics are calculated for some values of strip widths.

The formula which determines the dielectric constant from the reflector movement necessary to shift the resonant frequency back to its original value is derived. This formula is applicable to the case of a thick dielectric sheet, and this case can not be treated as a quasi-optic treatment. The change of the value of  $Q$  due to the dielectric loss is calculated. Lastly, the formula which determines the electron densities of the plasma from the reflector movement is derived.

### 1. ま え が き

プラズマの測定法として、光を用いる方法が良く知られているが、実験的にプラズマを研究するときに使用される測定法の一つにマイクロ波を用いる方法がある。またマイクロ波帯での誘電体の媒質定数の測定も最近問題となっている。その測定法は伝播法、反射波法、共振器法等に大別されるが、その中で種々の利点を持った測定法として、マイクロ波帯でのファブリ・ペロー共振器を用いる方法がある。ファブリ・ペロー共振器は構成が非常に簡単であり、比較的容易に高い $Q$ 値が得られるので通常の伝播法に比べ、はるかに高い測定精度が得られる。また開放形構造であるので試料の出し入れが容易であるという利点を持っており、従来の閉じた空洞共振器では困難であるプラズマ<sup>1)</sup>あるいは運動媒質の定数の測定のみならず<sup>2)</sup>、誘電体の媒質定数の測定にも有効な共振器である<sup>3)</sup>。更に共振特性を直視することにより媒質定数を非常に短時間に測定することが出来るので、時間的に変化する定数の測定にも用いられる。

ファブリ・ペロー共振器の共振周波数や回折損失については数多くの論文が発表されているが<sup>4)</sup>、導波管と孔で結合したファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンスを求めたものは余りない<sup>5),6)</sup>。更に内部に媒質を含む場合を電磁界的に解析したものは見あたらず<sup>7)</sup>、準光学的取扱<sup>2),8)</sup>あるいは従来の閉じた空洞共振器からの類推で行なわれている<sup>1)</sup>。

本論文は二次元的ファブリ・ペロー共振器内に異方性誘電体板あるいは板状の磁化プラズマが含まれる場合を電磁界の回路網的取り扱いにより解析し、グレーティングにより結合している導

\* 電子工学科 電波応用工学講座

波管側から見た入力アドミタンスを求めている<sup>7)</sup>。その結果を誘電体の複素誘電率の測定に適用して、試料の有無にかかわらず同一周波数で共振するように鏡面間隔を変えて、その変化長から比誘電率を求める関係式を導き図示した。このことより比誘電率の測定に際し、媒質の厚さが非常に薄いという場合以外には、従来の測定では考慮されていなかった共振器の共振姿態の違いを考慮しなければならないことを新たに示した<sup>8)</sup>。また誘電体損失を試料の挿入による共振器の負荷  $Q$  値の変化から求める関係式を導き一例を図示した。最後にプラズマを含む場合の入力アドミタンスから誘電体の場合と同様にして、電子密度を鏡面間隔の変化長から求める関係式を導いた。

2. 異方性誘電体を含むファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンス

解析を簡単にするため図1に示すように  $x$  方向に無限長共焦点楕円面反射鏡よりなる二次元共振器で、一方の鏡面がグレーティングにより平行平板導波管に結合されている場合を考え、内部に厚さ  $2d$  の異方性誘電体板を挿入した場合を解析する。

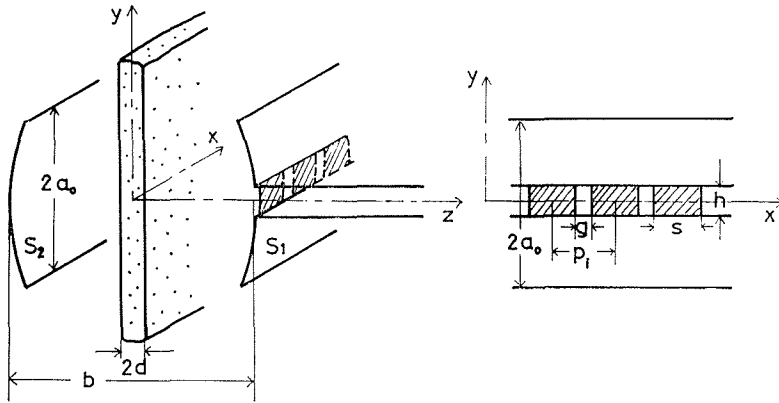


図1 異方性誘電体板を含むファブリ・ペロー共振器

誘電体のテンソル誘電率  $\underline{\epsilon}$  が

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ 0 & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32} \tag{1}$$

で与えられたとする。この時異方性の影響が現われる  $TE$ -type 波 ( $E_x = 0$ ) で  $x$  方向に界は一様な場合を考える。  $z$  方向を線路と考える伝送方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j \frac{\omega^2 \epsilon_{33} \mu_0 - \beta^2}{\omega \epsilon_{33}} I(z) - j \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} \beta V(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega \left( \epsilon_{22} - \frac{\epsilon_{23} \epsilon_{32}}{\epsilon_{33}} \right) V(z) - j \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \beta I(z) \end{aligned} \tag{2}$$

また空気中での伝送方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2}{\omega \epsilon_0} I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j\omega \epsilon_0 V(z) \end{aligned} \tag{3}$$

ここに  $\beta$  は  $y$  方向の位相定数である。

横電磁界はこの姿態電圧、電流により

$$E_y(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(z) e^{-j\beta y} d\beta \tag{4}$$

によって求められる。磁界  $H_m(y, z)$  は上式で  $V(z)$  を  $I(z)$  で置き換えると得られる。

鏡面  $S_1, S_2$  面上の電流  $J_1, J_2$  により共振器内に生ずる電界表示を求めるには (4) 式で  $V(z)$  が求まっておればよい。それには図 2 に示す  $z = -c$ , または  $z = c$  に負単位電流源があるときに  $z = z$  に生ずる電圧 (インピーダンスグリーン関数) を求め、波源の分布にわたって積分すればよい。(2), (3) 式から  $z > d, z < -d$  に対するインピーダンスグリーン関数は  $z = -c$  に電流源がある場合<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} Z(z > d, -c) &= \frac{z_0}{2} T(\beta) e^{-j\kappa_0(c+z) + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d + j\tau\beta 2d} \\ Z(z < d, -c) &= \frac{z_0}{2} \left\{ e^{-j\kappa_0(c+z)} - R(\beta) e^{-j\kappa_0(c+z) + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$z = c$  に電流源がある場合のグリーン関数  $Z(z < -d, c)$ ,  $Z(z > d, c)$  は (5) 式の  $Z(z > d, -c)$ ,  $Z(z < -d, c)$  の右辺の  $z$  を  $-z$  に,  $\tau$  を  $-\tau$  に置き換えることにより得られる。ここに

$$\begin{aligned} R(\beta) &= \frac{j}{D(\beta)} \left(1 - \frac{y_0^2}{y_1^2}\right) \sin 2\kappa_1 d \\ T(\beta) &= \frac{1}{D(\beta)} \frac{2y_0}{y_1} \\ D(\beta) &= \frac{2y_0}{y_1} + j \sin 2\kappa_1 d \cdot \left(1 - \frac{y_0}{y_1}\right)^2 \cdot e^{-j2\kappa_1 d} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{z_0} = \frac{\omega\mu_0}{\kappa_0}, & \kappa_0 &= \sqrt{k_0^2 - \beta^2}, & k_0^2 &= \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \\ y_1 &= \frac{\omega\mu_0}{\kappa_1}, & \kappa_1 &= \sqrt{k_1^2 - p\beta^2} \\ k_1^2 &= \omega^2 \varepsilon_{32} \mu_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{p}\right), & \tau &= \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}}, & p &= \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \end{aligned} \quad (7)$$

鏡面上の電流  $J_1, J_2$  による姿態電圧は

$$\begin{aligned} V(z) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_1} J_1(y') Z(z, +c) e^{-j\beta y'} dy' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_2} J_2(y') Z(z, -c) e^{-j\beta y'} dy' \end{aligned} \quad (8)$$

と表わされる。この式を (4) 式に代入すると電界表示式が得られるが,  $S_1$  面上の電界を求めるには  $z = c$  において

$$\begin{aligned} E_y(y, c) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z_0 \left[ \int_{S_1} J_1(y') dy' - \int_{S_1} J_1(y') R(\beta) e^{-j2\kappa_0 c + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d} dy' \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_2} J_2(y') T(\beta) e^{-2\kappa_0 c + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d + j\tau\beta 2d} dy' \right] e^{-j\beta(y-y')} dy' \end{aligned} \quad (9)$$

以上電界表示を求めるのに鏡面を平面として取り扱って来たが, 鏡面は実際には曲率を持っている。この曲率 (曲率半径を  $2P_0$  とする) を考慮するには (9) 式の  $c$  に

$$2c = b - \frac{y^2 + y'^2}{4P_0} \quad (10)$$

を代入すればよい。この  $\beta$  に関する積分を, 波長に比べ鏡面間隔  $b$  が十分に大きいことから近軸光近似を用いて行ない,  $y = a_0 t$  と変数変換すると<sup>7)</sup>

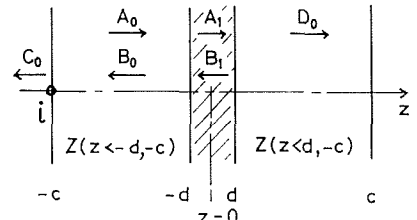


図 2 インピーダンス・グリーン関数

$$\begin{aligned}
E_y(t, S_1) = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left[ J_1(t) - \int_{-1}^1 J_1(t') \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} R(0) e^{j\left(\frac{\pi}{4} - k_0 b_a\right) + j c_1 t' - j \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2)} dt' \right. \\
& \left. + \int_{-1}^1 J_2(t') T(0) \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - k_0 b_a - \frac{k_0 (2\tau d)^2}{2b_e}\right) + j c_1 t' - j \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2) - j c_2(t-t')} dt' \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

となる。\$S\_2\$ 面上の電界 \$E\_y(t, S\_2)\$ は (11) 式で添字 1 と 2 を入れ換え、\$c\_2\$ を \$-c\_2\$ とすると得られる。ここに

$$\begin{aligned}
b_a &= b + \left(\frac{k_1}{k_0} - 1\right) 2d, & b_e &= b + \left(p \frac{k_0}{k_1} - 1\right) 2d \\
c_1 &= \frac{k_0 a_0^2}{b_e}, & c_0 &= c_1 \left(1 - \frac{b_e}{2P_0}\right), & c_2 &= c_1 \frac{2\tau d}{a_0}
\end{aligned} \quad (12)$$

(11) 式の積分に関連して

$$\chi_m \psi_m(t) = \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \psi_m(t') e^{j c_1 t' + j c_2(t-t') - j \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2)} dt' \quad (13)$$

なる Fredholm 型同次第二種の積分方程式を考える。この積分方程式は解析的には解けないが、鏡面間隔 \$b\$ を適当に選ぶことにより \$c\_0 = 0\$ とすることができ、\$c\_2\$ は一般に十分小さいから

$$\chi_{m0} \psi_m(t) = \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \psi_m(t') e^{j c_1 t'} dt' \quad (14)$$

と変形できる。この場合の固有値、固有関数は厳密に求められている<sup>4)</sup>。従って (13) 式の固有値は媒質の挿入により \$c\_0 \neq 0\$ となった場合次のように近似できる。

$$\chi_m = \chi_{m0} + \delta \chi_m + \Delta \chi_m \quad (15)$$

$$\delta \chi_m = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_m(t) \psi_m(t') e^{j c_1 t'} [e^{-j \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2)} - 1] dt' \quad (16)$$

$$\Delta \chi_m = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_m(t) \psi_m(t') e^{j c_1 t' - j \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2)} [e^{j c_2(t-t')} - 1] dt'$$

$$M = \int_{-1}^1 \psi_m^2(t) dt \quad (17)$$

ここに \$\chi\_{m0}\$ は (14) 式の固有値で<sup>10)</sup>

$$\chi_{m0} = \sqrt{\frac{2c_1}{\pi}} e^{j \frac{m\pi}{2}} R_{0m}^{(1)}(c_1, 1) \quad (18)$$

\$R\_{0m}^{(1)}(c\_1, 1)\$: Radiol Prolate Spheroidal Function

となる。また固有関数 \$\psi\_m(t)\$ は厳密には Angular Prolate Spheroidal Function となるが、鏡面の中心付近では、ほぼガウス分布とエルミート多項式の積で近似できて

$$\psi_m(t) = \sqrt{\frac{1}{m!}} \sqrt{\frac{c_1}{\pi}} \Phi_m(\sqrt{2c_1} t) \quad (19)$$

$$\Phi_m(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} H_m(t), \quad H_m(t): \text{Hermite 関数}$$

(16) 式の固有値を求めるのに、この固有関数を用いると

$$\chi_0 = \chi_{00} - jq - \frac{3}{4} q^2 - \frac{k_0}{2b_e} (\tau d)^2 \quad (20)$$

$$\chi_m = \chi_{m0} \quad (m \geq 1)$$

$$q = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b_e}{2P_0} \right) \quad (21)$$

さて  $S_1, S_2$  面上の電界は鏡面上で次の境界条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} -E_y(t, S_1) + R_S J_1(t) &= -\varepsilon(x, t) - E_N(x, t) \\ -E_y(t, S_2) + R_S J_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

ここに  $R_S$  は鏡面の抵抗,  $\varepsilon(t)$  は結合面上の電界,  $E_N(x, t)$  はその  $x$ -dependent な電界である。 $J_1(t), J_2(t)$  を (19) 式の固有関数で展開し

$$J_i(t) = \sum A_{im} \phi_m(t), \quad i = 1 \text{ or } 2 \quad (23)$$

規格直交性

$$\int_{-1}^1 \phi_m(t) \phi_n(t) dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \delta_{mn} \quad (24)$$

を用いて境界条件から展開係数を求めると

$$A_{1m} = - \frac{\left( \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - R_m \right) \frac{2}{p_i} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-1}^1 \varepsilon(x', t') \phi_m(t') dt' dx'}{\left( \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - R_m \right)^2 - T_m^2} \quad (25)$$

$$A_{2m} = \frac{T_m \frac{2}{p_i} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-1}^1 \varepsilon(x', t') \phi_m(t') dt' dx'}{\left( \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - R_m \right)^2 - T_m^2}$$

$$\begin{aligned} R_m &= R(0) (\chi_{m0} + \delta\chi_m) e^{j\left(\frac{\pi}{4} - k_0 b_a\right)} \\ T_m &= T(0) (\chi_{m0} + \delta\chi_m + \Delta\chi_m) e^{j\left(\frac{\pi}{4} - k_0 b_a - \frac{k_0 (2\tau d)^2}{2b_c}\right)} \end{aligned} \quad (26)$$

次に共振器内の磁界を  $x$ -independent な  $H_{cx,0}$  とスリット面から少しはなれると急速に減衰する  $x$ -dependent な磁界  $H_{cx,h}$  とに分けて  $H_{cx} = H_{cx,0} + H_{cx,h}$  とおく。 $H_{cx,0}$  は前述の電界の  $z$  微分から求められる。また  $H_{cx,h}$  は  $x$  方向に  $p_i$  の周期関数であり, かつ鏡面のごく近傍でのみ寄与することから, 鏡面上で

$$H_{cx,0} = - \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-1}^1 \varepsilon(x', t') \frac{1}{p_i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_{m=0}^{\infty} G_m \phi_m(t') \phi_m(t) dt' dx' \quad (27)$$

$$H_{cx,h} = - \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \varepsilon(x') \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{p_i}\right)^2 - k^2}} \frac{2}{p_i} \cos \frac{2n\pi x}{p_i} \cos \frac{2n\pi x'}{p_i} dx' \quad (28)$$

$$G_m = \frac{\left( \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - R_m \right) \left( 1 + R_m \right) + T_m^2}{\left( \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - R_m \right)^2 - T_m^2} \quad (29)$$

一方導波管側磁界は  $TE$ -type 波の場合, よく知られているように

$$\begin{aligned}
H_{wz} &= \sum I_{mn}(z) h_{mn}(x, y) \\
I_{mn}(z) &= - \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon(x', y') \frac{\omega \varepsilon_0}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - \left(\frac{2n\pi}{p_i}\right)^2}} e^{-j\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - \left(\frac{2n\pi}{p_i}\right)^2} z} h_{mn}(x', y') dx' dy' \\
h_{mn} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{p_i h}} \cos \frac{m\pi y}{h} \cos \frac{2n\pi x}{p_i} \\
\varepsilon_m &= \begin{cases} 1 & : m = 0 \\ 2 & : m \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{30}$$

したがって結合面上の磁界は、導波管の最低次姿態電流を  $I_{00}$  として ( $\varepsilon(y') = 1$  と仮定)

$$H_{wz} = \frac{I_{00}}{\sqrt{h p_i}} - \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \varepsilon(x') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{p_i}\right)^2 - k_0^2}} \frac{2}{p_i} \cos \frac{2n\pi x}{p_i} \cos \frac{2n\pi x'}{p_i} dx' \tag{31}$$

結合面上では共振器側磁界と導波管側磁界とが連続でなければならないから

$$H_{cz,0} + H_{cz,h} = H_{wz} \tag{32}$$

この境界条件から  $I_{00}$  が  $\varepsilon(x')$  で表わされる。一方この面上での端子電圧  $V_{00}$  が

$$V_{00} = \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon(x') \varepsilon(y') h_{00}(x', y') dx' dy' \tag{33}$$

で与えられるから、 $I_{00}$  との比を取れば結合面で共振器を見た入力アドミタンス  $\bar{Y}$  は次のように停留表示される。

$$\bar{Y} = Y_c + Y_w \tag{34}$$

$$Y_c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}c_1}{2\pi}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon(y) \varepsilon(y') \sum G_m \frac{1}{m!} \phi_m \left( \sqrt{\frac{k_0}{c_e}} y' \right) \phi_m \left( \sqrt{\frac{k_0}{c_e}} y \right) dy dy'}{\left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon(y) dy \right\}^2} \tag{35}$$

$$Y_w = - \frac{4 \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \varepsilon(x') \varepsilon(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{p_i}\right)^2 - k_0^2}} \cos \frac{2n\pi x'}{p_i} \cos \frac{2n\pi x}{p_i} dx dx'}{\left\{ \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \varepsilon(x) dx \right\}^2} \tag{36}$$

(36) 式はインダクティブ・グレーティングのアドミタンスの停留表示式になっているのでその結果を利用すると<sup>11)</sup> ( $\lambda$ : 自由空間波長)

$$Y_w = -j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\lambda}{p_i} \frac{1}{\log \operatorname{cosec} \frac{\pi s}{2p_i}} \tag{37}$$

$m$  が大きくなると、 $\varkappa_m$  が急速に零に近づくことに注目して、 $G_m$  を次のように変形すると

$$\begin{aligned}
G_m &= \frac{A(R_m + T_m)}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} + 1 - R_m - T_m} + \frac{A(R_m - T_m)}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} + 1 - R_m + T_m} + \frac{1}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} + 1} \\
A &= \frac{1 + \frac{R_s}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}{1 + \frac{2R_s}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}
\end{aligned} \tag{38}$$

最初の2項のみを含む級数は急速に取れんする。この級数和は文献(6)により与えられるが、その結果を用いて(35)の停留表示を計算すると次式となる。

$$Y_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[ \frac{1}{2R_S} + \sqrt{\frac{k_0 h^2}{2\pi c \varepsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} G_{2m,0} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}} \right] \quad (39)$$

ここに

$$G_{2m,0} = \frac{D_{2m}^0 - 1 - \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}{D_{2m}^0} + \frac{D_{2m}^e - 1 - \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}{D_{2m}^e} \quad (40)$$

$$D_{2m}^e = \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - (1 - A_{\pm} - \alpha)(\chi_{m0} + \delta\chi_m) e^{j\Phi_{\pm}} - \frac{1 + j\chi_{m0}}{M_0} \Delta\chi_m e^{j\Phi_{\pm} - j\nu} \quad (41)$$

$$\Phi_+ = \frac{\pi}{4} - k_0 b_a - \varphi + \nu \quad (42)$$

$$\Phi_- = \frac{5\pi}{4} - k_0 b_a - \varphi - \nu$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left\{ \frac{(1-r_0)^2 \tan \beta}{2r_0 + (1+r_0^2) \tan^2 \beta} \right\} \quad (43)$$

$$\nu = \tan^{-1} \left\{ \frac{(1-r_0^2)}{2r_0} \sin \beta \right\}$$

$$\begin{aligned} A_{\pm} = \frac{1}{2M_0} \left[ \alpha \left\{ \frac{(1-r_0)^2}{r_0} - \frac{(1-r_0^2)^2}{2r_0^2} \sin^2 \beta \mp \frac{(1-r_0^2)}{r_0} \cos \beta \right\} \right. \\ \left. + \delta \left\{ \frac{(1-r_0^2)}{r_0^2} \cos \beta \sin \beta \mp \frac{(1+r_0^2)}{r_0^2} \sin \beta \right\} \right] \quad (44) \end{aligned}$$

$$M_0 = \sqrt{1 + \frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^2} \sin^2 \beta}$$

さらに loss を考慮した複素誘電率  $\varepsilon_{ii} = \varepsilon'_i - j\varepsilon''_i$  により

$$\begin{aligned} \beta &= 2k_0 n_2 d \left( 1 - \frac{\varepsilon_{23}^2}{2\varepsilon_2' \varepsilon_3'} \right), & \alpha &= 2k_0 n_2 d \frac{\varepsilon_2''}{2\varepsilon_2'} \\ \gamma_0 &= \frac{1}{n_2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{23}^2}{2\varepsilon_2' \varepsilon_3'} \right), & \delta &= \frac{1}{n_2} \frac{\varepsilon_2''}{2\varepsilon_2'} \\ n_2 &= \sqrt{\varepsilon_2'}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_2'/\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (45)$$

添字, o, e は共振器の中心面 ( $z = 0$ ) で電界が零となるような odd mode と, 電界が最大となるような even mode を表わす。

### 3. 複素誘電率の測定

前章で求めた入力アドミタンスを用いて, グレーティング幅  $s$  の二, 三の値について反射係数の周波数特性を計算した結果を図3に示す。

図3は数値例  $b = 2P_0 = 32.4$  cm,  $a_0 = 9$  cm,  $h = 1$  cm,  $p_i = 2$  cm で, 無媒質の場合であるが損失のある誘電体板を挿入した場合についても同様な計算により, 複素誘電率を共振周波数のずれ, および  $Q$  値の変化で表わすことが可能である。しかしながらこの方法を一般に行なうには時間がかかるので, 次の近似による方法が便利である。

グレーティングの空隙が狭い場合には, 共振特性は  $D_{2m}^0$  または  $D_{2m}^e$  の虚数部を零とする周波数の近傍で,  $m = 0$  の最低次姿態のみの変化で決まることを考慮すると, 共振は

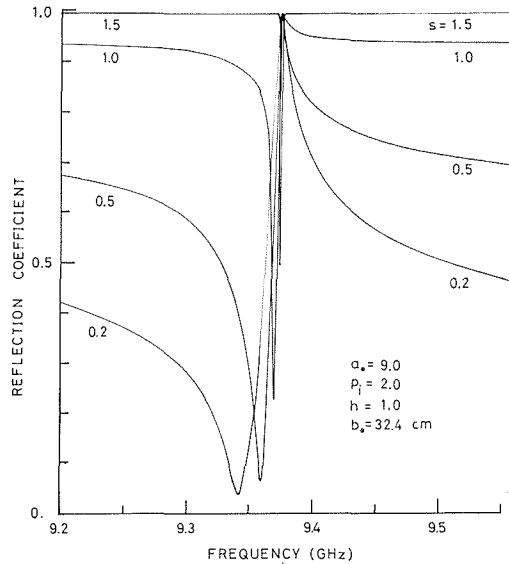


図3 反射係数の周波数特性

$$\phi_{\pm \text{res}} = 2l\pi - \frac{q}{\chi_{00} - \frac{3}{4}q^2} \quad \begin{array}{l} \text{odd} \\ \text{even} \end{array} \quad (46)$$

で起こる。このとき分母  $D_0^0$  は

$$D_{\text{res}}^0 = \frac{2R_s}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} + 1 - \chi_{00} + (\Delta_{\pm} + \alpha)\chi_{00} + \frac{q^2}{4\chi_{00}} + \frac{\Delta\chi_0}{M_0} \left\{ -\cos\left(\frac{q}{\chi_{00}} \mp \nu\right) + \chi_{00} \sin\left(\frac{q}{\chi_{00}} \mp \nu\right) \right\} \quad (47)$$

となる。右辺第3項目までが媒質を入れない共振器の回折損失と反射損失、第4項目が誘電体損失、第5項目が媒質を挿入したことによる共焦点条件 ( $q = 0$ ) からのずれによる回折損失の増加、第6項目が異方性による損失の増加を表わしている。

以下簡単のため異方性のない誘電体を考え、その複素誘電率  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  を測定する方法を示す。共振条件から明らかのように、誘電体板を挿入したことによる共振周波数のずれを、鏡面間隔を  $b = 2P_0 - \Delta b$  と狭くすることによって挿入しないときの共振周波数  $f_{01}$  ( $k_{01} = \frac{2\pi}{c}f_{01}$ ) に等しくすることができるので、この  $\Delta b$  を測定することによって  $n = \sqrt{\epsilon'}$  が求められる。

$$\Delta b = \frac{k_{01} + \frac{1}{2\chi_{00} \cdot 2P_0 \cdot n}}{k_{01} - \frac{1}{2\chi_{00} \cdot 2P_0}} (n-1)2d + \frac{\varphi \mp \nu}{k_{01} - \frac{1}{2\chi_{00} \cdot 2P_0}} \quad (48)$$

ここで  $\varphi, \nu$  は(43)式で  $\beta = 2nk_{01}d$ ,  $\gamma_0 = 1/n$  とおけばよい。

前述の数値例では odd mode 共振は  $f_{01} = 9.375$  GHz で、even mode 共振は  $f_{01} = 9.838$  GHz で生じるが、内部に厚さ 1 cm の誘電体を挿入した場合につき、 $n$  の変化による  $\Delta b$  の変化を求め図4に示した。このグラフより比誘電率が求められる。従来簡単には図7にも示した  $\Delta b = (n-1)2d$  なる関係式が用いられていたが、この近似は試料の厚さが非常に薄く、かつ比誘電率も余り大きくない場合でないと用いられない。さらに同じ  $\Delta b$  に対して even mode と odd mode 共振との  $\epsilon_s$  の値が大きく違っていることから、従来の幾何光学的取り扱いでは考慮されなかった共振 mode の違いを考えなければ大きな誤差となることが分かった。

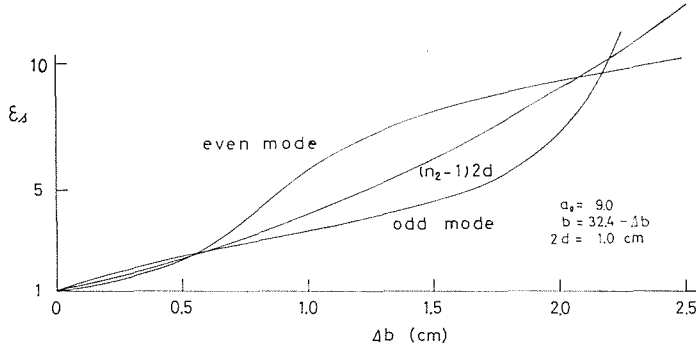


図 4  $\epsilon_s$  対  $\Delta b$  曲線 ( $f_{0\text{ odd}} = 9.375$  GHz,  $f_{0\text{ even}} = 9.838$  GHz)

損失ある誘電体を挿入した時には一般に誘電体損の他に (47) 式で示される  $q^2/4\chi_{00}$  の共焦点条件のずれによる損失増加が加わる。この損失を打消すには  $q$  を零とすればよい。そのためには鏡面間隔を

$$b = 2P_0 + \left(\frac{n-1}{n}\right)2d \quad (49)$$

と広げればよい。さらに試料の厚さを

$$\beta = 2k_{02}nd = \pi \quad (50)$$

となるように選ぶ。(この条件は本質的に必要な条件ではないが、このように選ぶと誘電体損失の項が非常に簡単になる)

ここに  $k_{02}$  は  $b$  を変えたことによる新しい共振時位相定数で

$$k_{02} = k_{01} - \frac{n^2-1}{n^2} \frac{\pi}{2P_0} \quad (51)$$

誘電体損は odd mode の場合  $\Delta_+ + \alpha = n\alpha$  となり

$$D_0^0 = \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} + 1 - \chi_{00}(1-n\alpha)e^{j\Phi_+} \quad (52)$$

$$\Phi_+ = \frac{\pi}{4} - k_0 \left( 2P_0 + \frac{n^2-1}{n} 2d \right)$$

odd mode 共振点付近での界振幅は  $E = K/D_0^0$  で近似でき、 $\Phi_+$  が共振時の  $\Phi_{+\text{res}}$  から  $\Delta\Phi$  だけずれたときに  $D_0^0 = D_{\text{res}}^0(1 \pm j)$  となったとすると

$$\Delta\Phi = \frac{\frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} + 1 - \chi_{00} + n\alpha\chi_{00}}{\chi_{00}} = \pm \frac{\Delta\omega}{c} \left\{ 2P_0 + \frac{n^2-1}{n} 2d \right\} \quad (53)$$

したがって、共振器の  $Q$  値は

$$\frac{1}{Q_l} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_{02}} = \frac{\frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} + 1 - \chi_{00}}{\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_{+\text{res}}\right)\chi_{00}} + \frac{n\alpha}{\frac{\pi}{4} - \Phi_{+\text{res}}} = \frac{1}{Q_{FP}} + \frac{1}{Q_d} \quad (54)$$

ここに右边第 1 項は共振器のみのときの  $Q$  値、第 2 項は誘電体損による  $Q$  値の変化分を表わしている。実際には結合により外部導波管で失われる損失がこれに加わる。

前記共振器では  $f_{01} = 9.375$  GHz で共振するとき  $Q_{FP} = 127,000$  であるが、 $2d = 1.16$  cm,  $\epsilon_s = 2$  なる誘電体を挿入すると、共焦点条件は  $b = 2P_0 + 0.34$  cm で満たされ、共振周波数は  $f_{02} = 9.1441$  GHz となる。このときには  $Q_{FP} = 106,000$  となり、さらに導波管との結合により  $Q$  値が低下し、 $s = 1.6$  cm の場合  $Q'_{FP} = 80,000$  となる。(54) 式より媒質の損失  $\epsilon''$  と  $Q_l$  (負荷

$Q$  値) の関係を求めると

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\pi - 2\theta_{+res}}{n} \left\{ \frac{1}{Q_t} - \frac{1}{Q'_{FP}} \right\} \quad (55)$$

この結果を図5に示す。なお高次姿態までも含めた計算機による計算結果も合わせて示した。

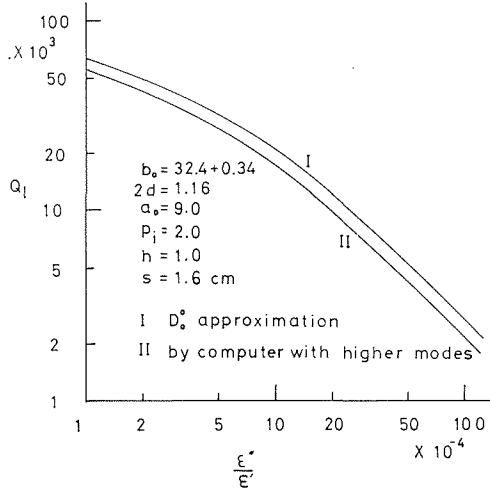


図5 損失  $\epsilon''/\epsilon'$  による  $Q$  値の変化 ( $\epsilon' = 2$ )

#### 4. プラズマを含むファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンス

本章では2章の異方性誘電体板の代わりに板状のプラズマが挿入された場合を解析する。プラズマとしては理想的なモデルとして次式のようなテンソル誘電率で示される磁化プラズマを考える。

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & j\epsilon_3 \\ 0 & -j\epsilon_3 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \cdot \epsilon_0 \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu_c)} & \epsilon_2 &= 1 - \Omega \\ \epsilon_3 &= \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \Omega, & \Omega &= \frac{\omega - j\nu_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\{(\omega - j\nu_c)^2 - \omega_c^2\}} \\ \omega_p^2 &= \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}, & \omega_c &= -\frac{e B_0}{m} \end{aligned} \quad (56)$$

ここで  $m$ ,  $e$ ,  $n_0$  はそれぞれ電子の質量、電荷、平均密度を表わす。また  $\omega_p$  はプラズマ角周波数、 $\omega_c$  はサイクロトロン角周波数、 $\nu_c$  は衝突周波数であり、外部磁界  $B_0$  は  $x$  方向に印加されている。この場合  $z$  方向を線路と考える伝送方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{dV(z)}{dz} &= j \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (1 - \Omega) - \beta^2}{\omega \epsilon_0 (1 - \Omega)} I(z) - \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \frac{\Omega}{1 - \Omega} \beta V(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} &= j \omega \epsilon_0 (1 - \Omega) \left\{ 1 - \left( \frac{\Omega}{1 - \Omega} \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \right)^2 \right\} V(z) + \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \frac{\Omega}{1 - \Omega} \beta I(z) \end{aligned} \quad (57)$$

となる。2章と同様にしてインピーダンスグリーン関数を求めると(5)式と同形の

$$Z(z > d, -c) = \frac{z_0 T(\beta) e^{-j\kappa_0(c+z) + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d}}{2}$$

$$Z(z < -d, -c) = \frac{z_0}{2} \left[ e^{-j\kappa_0(c+z)} - R_-(\beta) e^{-j\kappa_0(c-z) + j(\kappa_0 - \kappa_1)2d} \right]$$
(58)

が得られる。 $T(\beta)$ は(6)式と同一であるが、他は次式を用いる。

$$R_{\pm}(\beta) = \frac{j}{D(\beta)} \left\{ 1 - \left( \frac{y_0}{y_1} \mp jy_c \right)^2 \right\} \sin 2\kappa_1 d$$

$$D(\beta) = \frac{2y_0}{y_1} + j \sin 2\kappa_1 d \left\{ \left( 1 - \frac{y_0}{y_1} \right)^2 + y_c^2 \right\} e^{-j2\kappa_1 d}$$
(59)

$$y_1 = \frac{\omega \varepsilon_0 (1 - \Omega) \kappa_1}{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (1 - \Omega) - \beta^2}$$

$$y_c = \frac{\Omega}{1 - \Omega} \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \frac{\beta}{\kappa_1}$$
(60)

$$\kappa_1 = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (1 - \Omega) \left\{ 1 - \left( \frac{\Omega}{1 - \Omega} \frac{\omega_c}{\omega - j\nu_c} \right)^2 \right\}$$

但し  $R_+(\beta)$  は  $Z(z > d, c)$  を与える式で  $R(\beta)$  の代わりに用いる。以下第2章と同様に鏡面上の電流  $J_1, J_2$  による電界表示を求め  $\beta$  積分を行ない、鏡面上での電界の境界条件を用いる。これにより(25), (26)式の展開係数が得られる。ただし(12), (26)式で  $p = 1, \tau = 0$  とおく。さらにこの展開係数から共振器内の磁界表示を求め導波管側磁界との連続条件を用い、最低次姿態電流と電圧の比から入力アドミタンスを求めると次式となる。

$$\frac{\bar{Y}}{\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}} = \frac{1}{1 + \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}} - j \frac{\lambda}{p_i} \frac{1}{\log \operatorname{cosec} \frac{\pi s}{2p_i}}$$

$$+ \sqrt{\frac{k_0 h^2}{2\pi c \varepsilon_0}} A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left\{ \frac{D_{2m}^0 - 1 - \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}{D_{2m}^0} + \frac{D_{2m}^c - 1 - \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}}{D_{2m}^c} \right\}$$
(61)

$$D_{2m}^0 = \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - (R_m \pm T_m)$$
(62)

ここに  $R_m, T_m$  は(26)式で  $\Delta \chi_m$  と  $\tau$  を零とおき、 $R(0), T(0)$  としては(59)を用いる。上式からプラズマを挿入したときの共振周波数のずれ、 $Q$  値の変化を求めれば  $\omega_n, \omega_c$  そして  $\nu_c$  が求められるが、普通実験室のプラズマでは、マイクロ波の  $\omega$  に対しては  $\nu_c^2/\omega^2 \ll 1$  が成り立つから、この項を省略すると  $D_{2m}^0$  は次のような簡単な形となる。

$$D_{2m}^0 = \frac{2R_S}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} + 1 - \chi_{2m} e^{j\phi_{\pm}} \quad : \quad \begin{array}{l} \text{odd} \\ \text{even} \end{array}$$
(63)

ここに

$$\phi_+ = \frac{\pi}{4} - k_0 b_a - \alpha_1 + \alpha_2$$
(64)

$$\phi_- = \frac{5\pi}{4} - k_0 b_a - \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{K^2 - 1}{2K} \sin \beta \right\}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{(K-1)^2 \tan \beta}{2K + (K^2 + 1) \tan^2 \beta} \right\}$$
(65)

$$K = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad \beta = 2k_0 K d$$

グレーティング幅  $s$  が  $bl$  に近い場合は、3章で述べたように  $D_0^0$  のみを考慮すれば十分である。このとき odd mode 共振は

$$\phi_{+res} = 2l\pi - \frac{q}{\chi_{00} - \frac{3}{4}q^2} \quad (66)$$

で起こる。従ってプラズマを挿入した後の共振周波数を挿入前のそれに等しくするための鏡面間隔の変化長  $\Delta b = b - 2P_0$

$$\Delta b = (1-K)2d - \frac{1}{k_{01}}(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (67)$$

が得られる。

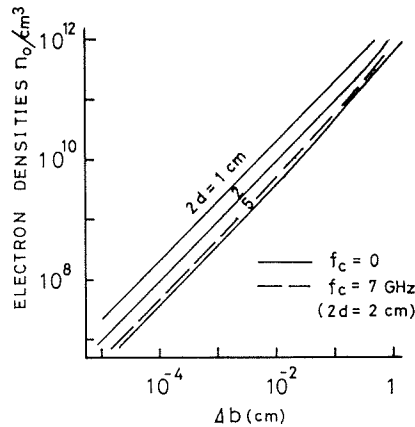


図 6 電子密度対  $\Delta b$  曲線 ( $f_{01} = 9.375$  GHz)

この結果を非磁化の場合でプラズマの厚さを変えた場合、及び外部磁界を  $f_c = 7$  GHz となるように印加した場合について図 6 に示した。外部磁界により同一の電子密度に対しては  $\Delta b$  が大きくなるのがわかる。特に  $\omega_p^2/(\omega_{01}^2 - \omega_0^2) \ll 1$  が成り立つときには ( $\omega_{01}$  は使用周波数)

$$\Delta b \simeq \frac{\omega_p^2}{2(\omega_{01}^2 - \omega_0^2)} 2d$$

であり、 $\omega_p^2$  は電子密度に比例するので

$$n_0 = \frac{2(\omega_{01}^2 - \omega_0^2)m\epsilon_0}{2d} \Delta b \quad (68)$$

により電子密度が求められる。測定可能な電子密度の上限は、使用する共振周波数によって決まり、 $f_{01} = 9.375$  GHz の場合、おおよそ  $n_0 = 1.1 \times 10^{12}$  個/cm<sup>3</sup> となる。また電子密度の下限は  $f_{01}$  の他に、その周波数安定度および  $\Delta b$  の測定精度で決まり  $10^{-5}$  cm の読みとり精度では  $n_0 \simeq 10^7$  個/cm<sup>3</sup> 程度 ( $2d = 2$  cm) である。

## 5. む す び

導波管とグレーティングで結合したファブリ・ペロー共振器内部中央に異方性誘電体板あるいは板状プラズマを含んだ場合の電磁界を回路網的手法により解析し、結合面から見た入力アドミタンスを求めた。その結果から、反射係数の周波数特性を求めた。結合面の空隙が狭い場合の解析から、異方性誘電体板を含む場合の損失、すなわち回折損失、反射損失、誘電体損、異方性による損失の間の定量的関係を明らかにした。また等方性誘電体の複素誘電率の測定法について検討し、測定のを導き、共振姿態の違いが比誘電率の値に大きな影響を与えることを示した。最後にプラズマを含む場合についての解析から電子密度 (プラズマ周波数) の測定式を導いた。

## 謝 辞

本研究の機会を与えて下さった電子工学科の諸先生、日頃有益なご助言をくださる電気工学科深井助教授に深謝するとともに、いろいろな助言と原稿をお読み下さった桜庭教授に心からお礼申し上げます。

## 文 献

- 1) R. J. Chaffin: "Plasma diagnostics with a microwave Fabry-Perot resonator," IEEE Trans., MTT-16, No. 1, (January, 1968), p. 37.
- 2) J. E. Degenford: "A quasi-optics perturbation technique for measuring dielectric constant," Proc. IEEE, 54, No. 4, (April, 1966), p. 520.
- 3) 榎戸, 鈴木: "運動媒質を含む Fabry-Perot 共振器の解析," 昭 45 連大, 1284.
- 4) G. D. Boyd and J. P. Gordon: "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers," Bell. Syst. tech. J., 40, (March, 1961), p. 489 等.
- 5) 赤尾, 宮崎: "円孔により導波管と結合された Fabry-Perot 共振器の入力アドミタンス," 昭 42 連大, 1422.
- 6) 榎戸, 鈴木, 松本, 上村: "無限長だ円筒状反射鏡よりなるファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンス," 信学会論文誌 51-B, 3, (昭 43-3), p. 95.
- 7) 榎戸, 鈴木: "異方性媒質を満たした Fabry-Perot 共振器," 信学会, マイクロ波研資料 (昭 42-9).
- 8) 弓場, 太田, 牧本: "ファブリ・ペロー共振器による複素誘電率の測定," 信学誌, 50, 10, (昭 42-10), p. 1988.
- 9) 榎戸, 鈴木: "異方性誘電体板を含む Fabry-Perot 共振器の解析," 昭 45 全大, 483.
- 10) D. Slepian and E. Sonnenblick: "Eigenvalues Associated with prolate spheroidal wave functions of zero order," Bell. Syst. tech. J., 44, (October, 1965), p. 1745.
- 11) N. Marcuvitz: "Waveguide Handbook," MIT, 1964, p. 284.