HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	液中で振動する球近傍のフローパタンと流体抗力
Author(s)	遠藤, 一夫; 平野, 晴望
Citation	北海道大學工學部研究報告, 60, 111-133
Issue Date	1971-03-27
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41043
Type	departmental bulletin paper
File Information	60_111-134.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

液中で振動する球近傍のフローパタンと流体抗力

遠藤一夫*　平野晴望*

(昭和45年9月30日受理)

Force on a sphere at maximam relative velocity and flow patterns around the sphere vibrating in liquid

Kazuo ENDOH　Harumochi HIRANO

Abstract

Experiments were performed to obtain basic information on force on a sphere and flow patterns in the vicinity of the sphere vibrating in liquid.

Results obtained were

1) Under conditions where the amplitude of vibration was smaller than the diameter of sphere, it was shown that the measured thickness of inner streaming η could be expressed by

$$\eta/d = f(d^2 f/\nu)$$

where f is the frequency of vibration, ν is the kinematic viscosity of liquid and d is the diameter of the sphere.

Morever, under similar conditions and using the same liquid, flow patterns around a thin circular disk vibrating along the axis were investigated. The critical conditions for the direction of flow changes was expressed by

$$a^2 f/\nu = 8.5\,(a/D)^{0.67}$$

where a is the amplitude of vibration and D is the diameter of the circular disk.

2) At a maximam relative ve[ocity, the acceleration of liquid was neglected, and the force on the sphere was found to be expressed by

$$F = C_v \frac{1}{2}(a\omega)^2 \frac{\pi}{4} d^2$$

$$C_v = 180/Re_{,\eta}$$

$$Re_{,\eta} = \eta(a\omega)/\nu$$

Where η is the thickness of the inner flow in the vicinity of vibration sphere given by the experimental relation $\eta/d = f(d^2\omega/\nu)$.

From the results, together with the data obtained by Odar et. al., it was found that the force on a sphere at a maximam relative velocity was related with the thickness of the inner flow.

定常流のうちに固定された物体，流体間の物質移動，熱移動については，すでに多くの知見が蓄積され，移動速度を十分の精度で推定することができる。また，流体抗力に関しても解析的，

* 合成化学工学科　化学工業装置講座

並びに実験的研究が行なわれてきている。しかしながら，定常流の速度に対して，乱れ速度が比較的大きい場合には，移動速度に対する乱れ速度の関与を，乱れ速度を速度の代表値とするレイノルズ数をとるといった扱い[1]によっては，現象を解釈することが困難となり，一般的な実験データがとぼしいのが現況である。

定常流に対して，変動速度を積極的に増大させ，それによって，移動現象の質を定常流の扱いから転じて，増大をはかろうとする試みが近年行なわれている。ソ連において試みられた振動燃焼を行なうジェットバーナーを用いてのボイラー熱交換能力の試験がその一例[2]であり，また，鉄鋼溶鉱炉の空気，酸素吹込みに脈動流を加えようとする試み[3,4]もその一端である。

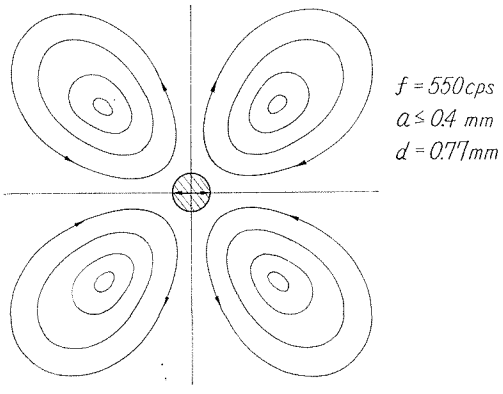
この種の実用の対象とは離れても，変動流支配の基礎的な課題は少なくない。平均流と同等の速度で，主流とともに運ばれる流体中の粒子の運動を考えてみよう。粒子の流体に対する相対運動を規定するものは，流体の変動速度のうちからとりだされる現象によって定まるある波数であり，これによってきまる相対変動流によって粒子・流体間の物質，熱の交換が行なわれるとともに，粒子群の拡散がきめられることになろう。等方性乱流場のなかで，安定に存在しうる液滴の最大径に対する Kolmogoroff の試み[5]以来，理論的仮定にもとづく解析は行なわれているが，実証のデータはとぼしい。また，Langevin タイプの運動方程式[6]を用いるとしても，定常状態において定義された抵抗係数が，相対速度が時間的に変動する場合には，どの程度有意に用いうるかといった評価が行なわれぬ以上，解析値とデータをむすぶ内容が失われることになろう。

筆者らは，上述の問題に関する一連の熱，物質移動についての実験的研究を行なっているが以下，その基礎的知見の一つとして，液体中で相対速度が正弦的に変化する球近傍に生ずるフローパターンと，流体抗力との相関についてのみ述べよう。

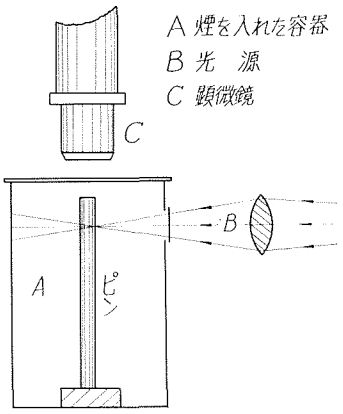
I. 振動する物体のまわりの流れ

振動するピンのまわりの流れを，トレーサーとしてタバコの煙を用いて観察したのが West[7]である。**図-1** はその装置の構成，**図-2**，**図-3** がフローパタンである。

直径 0.77 mm のピンが空気中で振動するとき，振動数が 550 cps，振幅が 0.4 mm よりも小さいときに図-2 のようになり，振幅が 0.45 mm になると，図-3 のように変ってしまうという。つまり，図-2 の循環がちぢまっていって，ピンのまわりに集まり，それを囲んで反対向きに流れる大きな循環が生ずるのである。振幅をもう少し大きくすると，内側の小さな循環は見えなくなってしまう。



図—2 図-1 の方法による流れのパターン

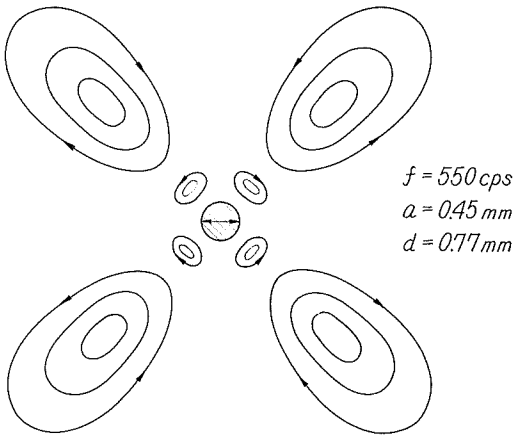


図—1 振動するピンのまわりの流れの観察方法

この移り変りをあらわすレイノルズ数は

$$d\sqrt{\omega/\nu} \approx 40 \qquad (1)$$

であって，d はピンの直径，ω は振幅の角速度である。



図—3　図-1 の方法による流れのパターン

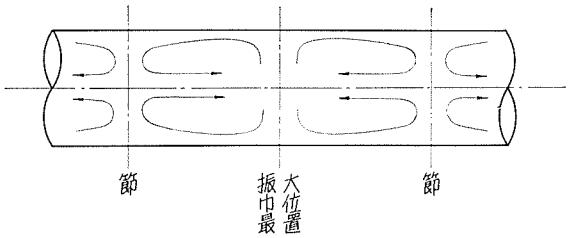
Westは以上のように述べているが，空気を振動させて，そのなかに物体を置いた場合の実験は古く，Andrade[8] はすでに1931年に行なっている。直径 3.5 cm のガラス管の一端に電話型のスピーカーをつけて，管内の空気を振動させ，そのなかにタバコの煙を入れる。この場合の流れは Rayleigh が論じた Kundt 管についての状態と同じであって，**図-4** のように，壁に沿って，節に集まるような流れを生ずる。

定常音波の条件で，定常波の腹の位置に波に直角に円筒をおいた場合，観察されたフローパタンが **図-5** である。音が強すぎると，つまり振幅が大きすぎると，この流れは強すぎてはっきりしないが，弱めていくと，はっきりした模様となり，もっと弱くなると図形が歪んできて，“ill-defined inner circulation” を生ずる。

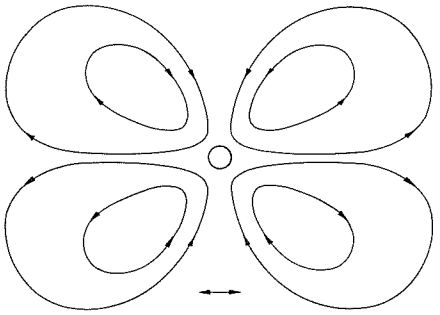
このような循環の発生が始まる条件を Andrade は次のようにあらわしている。

すなわち，2つの物体のまわりの流れの条件が同じであることを示す式は，振幅を a として

$$\frac{a}{d} = f\left(\frac{\omega a^2}{\nu}\right) \qquad (2)$$



図—4　水平管内の流れ（定常波）



図—5　定常波のある管内の円筒のまわりの流れ

循環の発生を示す状態に，添字 c をつけるならば，上式は a_c/d と $\omega_c a_c^2/\nu$ との関係をあらわす。Andrade は，このように考えているが，比較的大きいミリオーダーの球と，ミリ以下のオーダーの球とは傾向が異なって

$$\left(\frac{\omega a d}{\nu}\right)_c \approx 30 : \text{大きな球} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\omega a d}{\nu}\right)_c \approx 5 : \text{小さな球} \qquad (4)$$

また，ある条件では

$$\left(\frac{\omega a d}{\nu}\right)_c \approx 100 : \text{円　筒} \qquad (5)$$

となっている。すなわち，流れの変化を規定する量はまだ実験的には明らかにされてはいない。Schlichting[9] の解析によっても，円柱近傍にループ状流れが生ずることが示されてはいても，広い操作範囲について，実在流体については，どのような量の大

小関係によって解析解と近づくデータが現れるかといった評価はまだ十分ではない。このことはRichardson[10]が示した振動する物体に対する移動速度式の適用条件に関する実験的検討はまだ不備ということでもある。

移動現象に関与するフローパタンを検討することを目的とする本実験では，物体の代表として球をえらび，球の近傍におけるフローパタンの挙動について検討を加えている。また，球と著しく異なる形状の代表例として円板をえらび，その周辺の流れの安定性について実験を補った。

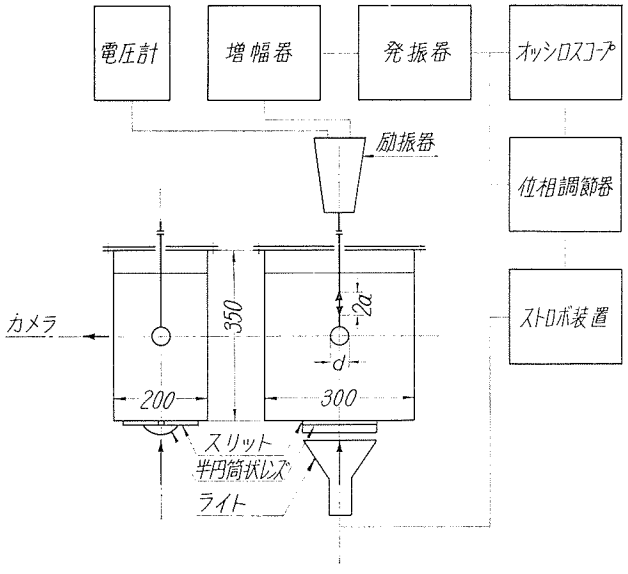
II. 液中で振動する球近傍のフローパタンについて

II·1 実験装置および実験方法

II·1·a 実 験 装 置

実験装置の構成を図-6に示す。ガラス製透明水槽に，微量のアルミニウム粉末をけん濁させた水，あるいは，ニュートン流体としての水あめ水溶液を入れる。水槽の側面または底部に，幅0.2～0.3 cm，長さ10 cm程度の間隙をもつスリットをとりつけ，集光用の半円筒状レンズを通してストロボの光を導き，球中心を通るように平面状の光束を与えている。水槽正面にカメラを置き，写真によってフローパタンを記録した。

ナイロン製の径の異なる数種の球およびセルロイド製の球を，直径1.5 mm程度のステンレス製細管で電磁励振器の振動端に固定し，励振器の駆動部は，増幅器を介して低周波発振器に接続している。また，励振器の検出端を真空管電圧計に接続し，その発生電圧から，あらかじめ作成した検定曲線にもとづいて振幅を読みとっている。同時に，検出端をオッシロスコープに接続し，発生振動波形が正弦的であるかを監視している。ストロボ発光装置の外部同期端子は，位相調節装置を介して，上記の発振器に接続し，ストロボの発光と励振器の振動とを同調させ，振動する球を光学的に停止させている。この場合，同時にオッシロスコープを並用し，発振器および位相調節装置の信号を監視し，振動する球を振幅の中心，または，適当な位置に光学的に停止できるよう，位相調節装置で調節した。円板についての観測も，同様の方法で行なっている。



図—6 実 験 装 置

実験は，球については，直径 $d=0.475\sim3.788$ cm の 8 種，振動数 $f=20$, 30, 40, 60, 70, 80, 90, 100 cps，片振幅 $a=0.01\sim0.89$ cm，運動粘度 $\nu=0.0234\sim11.31$ cm^2/sec の範囲で，円板については，直径 $D=1.50\sim4.50$ cm の 4 種，$f=20$, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100 cps，$a=0.0125\sim0.275$ cm，$\nu=0.0524\sim1.092$ cm^2/sec の範囲で行なった。ただし，円板については，その厚さHと直径 D のの比 ($H/D=0.05$) は一定に，すなわち相似形に保っている。

II·1·b 実験方法

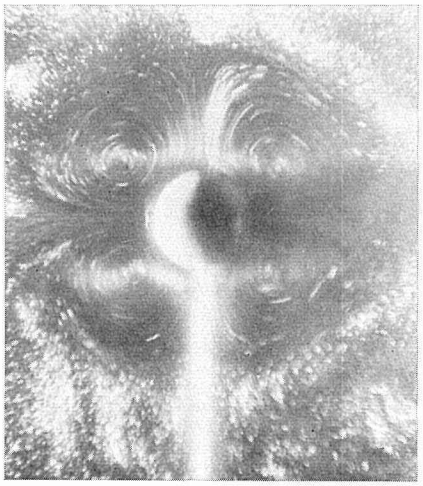
振動数 f，片振幅 a，運動粘度 ν，球径 d (円板直径 D) をそれぞれ変化させ，振動する球または円板のまわりのフローパタンを撮影し，後述 図-26 の内側のループ状の渦の厚さ η を測定する。球を振幅の中心に光学的に停止させた場合，本実験の範囲では，η の厚さには測定の場所 θ による変化はほとんど認められなかった。したがって，$\theta=0$ あるいは，$\theta=\pi/2$ における測定値をもって η の厚さとした。

また，振動する球を，振幅の上下両端で光学的に停止させ，その時の η の厚みの変化，ループ状流れの内部の流動状態および，内側のループ状流れと外側の流れとの間の流体の交換について，球下部近傍の流れを対象として観察を行なった。

円板については，そのフローパタンは複雑になり，球の場合に相当する η というべき厚みの測定はできなかった。しかし，振動のレイノルズ数 $Re_{,\nu}=afd/\nu$ または，ストリーミングレイノルズ数[11] $Re_{,s}=a^2f/\nu$ を大きくしてゆくと，外側のループ状流れの方向が逆転することがみいだされたので，フローパタンの遷移点に関する実験的検討を行なった。

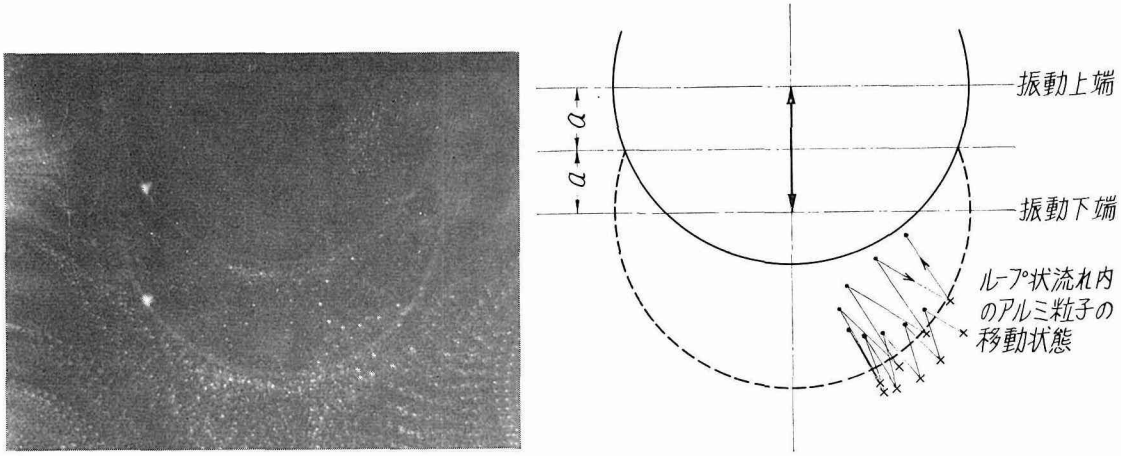
II·2 実験結果

正弦的に振動する球を，振幅の中心で光学的に停止させた場合のフローパタンの代表例を**図-7, 8** に示した。このうち，図-7 は，球のまわりの内，外 2 つのループ状流れを含む全体の写真であり，外側の流れは 図-26 にも示すごとく，振動方向に垂直な方向より流入し，振動方向に吐き出されるような流れとなる。図-8 は，球側面近傍の内側ループ状流れの写真で，その厚さ η は，種々の条件の下で，このように写したフイルムを投影器で拡大して測定した。この内側の流れは，下記の如く，球表面からの熱・物質移動速度に直接関与する流れとしても重要であり，



図—7 振動する球のまわりのフローパタン

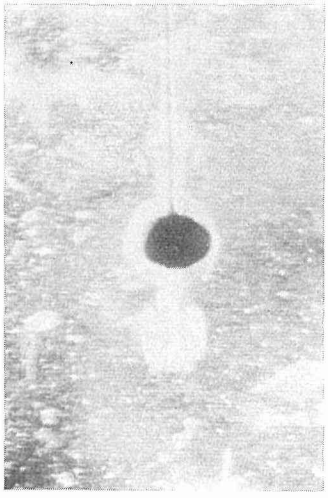
図—8 振動する球のまわりのフローパタン



図—9 球近傍のループ状流れ内における粒子の移動状況

図-26のように，球表面に沿って上下より振動方向と垂直な大円に向い，厚みηの近傍では，外側の流れと方向を等しくするループ状流れを形成している。

図-9は，正弦的に振動する球を，振幅の上下両端で光学的に停止するようにストロボの発光を調節して撮影したものであり，同図中のアルミニウム粉末粒子1個の移動状態を右に示してある。ループ状流れのなかを浮動するアルミニウム粉末粒子の挙動を見ると，振幅の上下両端でループ状流れは球の振動と同調して伸縮しているが，比較的長時間ループ状流れのなかに止まるものとみられる。このことからすると，内側のループ状流れは比較的安定しており，各周期ごとに新しいループ状流れが更新されるというのではなく，ループ状流れの内部の流体のほとんどは，球の振動とともに同調してその近傍に止まり，ループ状流れ内の流体の一部のみが，外側の流れに吐出され，内外の交換が行なわれることが推定される。

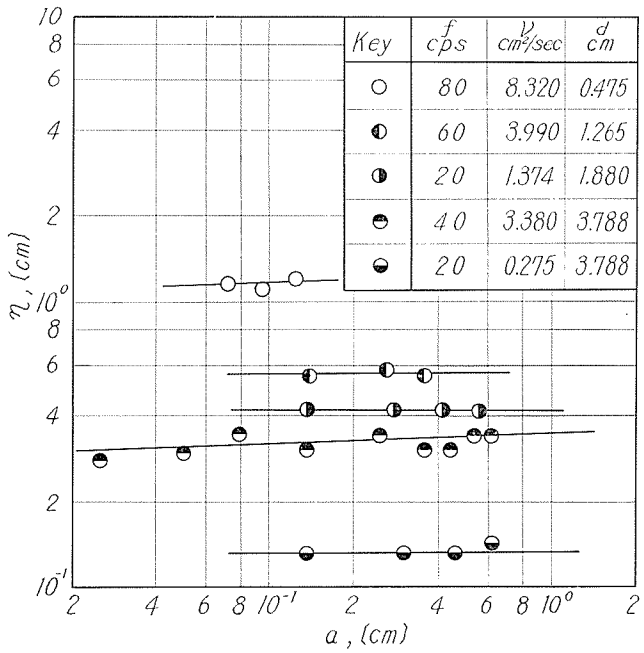


図—10 シュリーレン法による安息香酸の流動状態

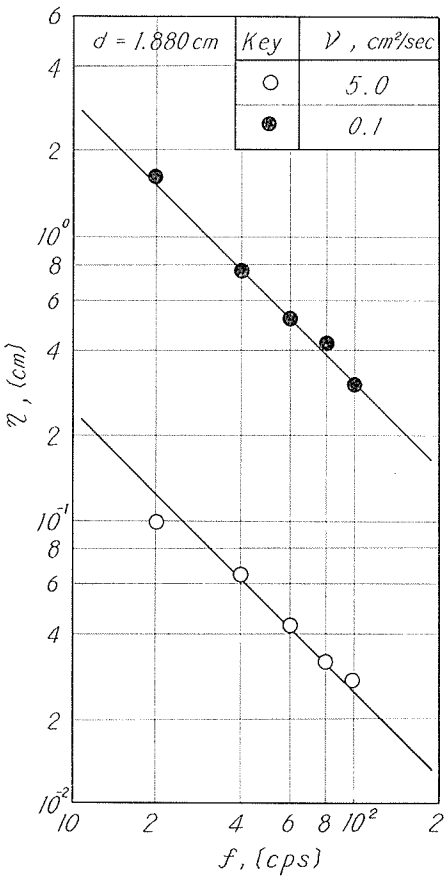
内側のループ状流れと，その外側の流れとの変換を検討するため，球を安息香酸でコーティングし，安息香酸の溶解によって，球近傍の光屈折率を変化させ，シュリーレン法によって流動状態を観察したのが**図-10**である。同図は，振動を与えてから比較的短時間後に撮影したものであるが，濃度の大きい流れが振動の方向に沿って上下に排出されていることを示している。すなわち，内側のループ状流れの流体は，軸方向に排出され，同時に，外側の流れより内側のループ状流れに流入が起っているものと解される。この流入は，おそらく，振動方向に直交する外側流れによるものの関与が大きいものと考えられる。

種々の粘度の液体中で，振動数を一定に保ち，振幅aを変化させた場合のηとaの関係を**図-11**に示す。$d>a$，かつ，f，νが一定であれば，振幅による影響は小さい。

図-12は，ηと振動数fとの相関を示したもので，$d^2f/\nu=14.14\sim3,534$の範囲内にある同図のデータでは，ηはfに逆比例している。



図—11　η と a の相関



図—12　η と f との相関

また，振動数 f をパラメーターとし，η と ν との相関を示したのが**図-13** (d=1.880 cm について) である。ν=2.0 cm²/sec 付近を遷移域として，その相関が異なっており，ν がこの遷移域より小さい領域では，η は $\nu^{1/2}$ に，大きい領域では ν に比例している。さらに，ν がこの遷移域より大きい領域，および小さい領域でそれぞれ f を一定にし，η と d との相関の代表例を示したのが**図-14** および，**図-15** である。前者では球径に逆比例し，後者では球径の平方根に逆比例している。

上述の実験結果から，$d>a$ の範囲内では，η に対する振幅 a の関与は無視でき，運動粘度が比較的大きい場合には，$\eta\propto\nu$，$\eta\propto d^{-1}$ の傾向が認められる。また，ν が比較的小さい場合には $\eta\propto\nu^{1/2}$，$\eta\propto d^{-1/2}$ の傾向が現われている。両者の関係を満足する実験式として，$\eta/d\propto(d^2f/\nu)^n$ を仮定すれば，n が $-\frac{1}{2}$ から -1 の範囲で，この傾向を表わしうることが推定される。

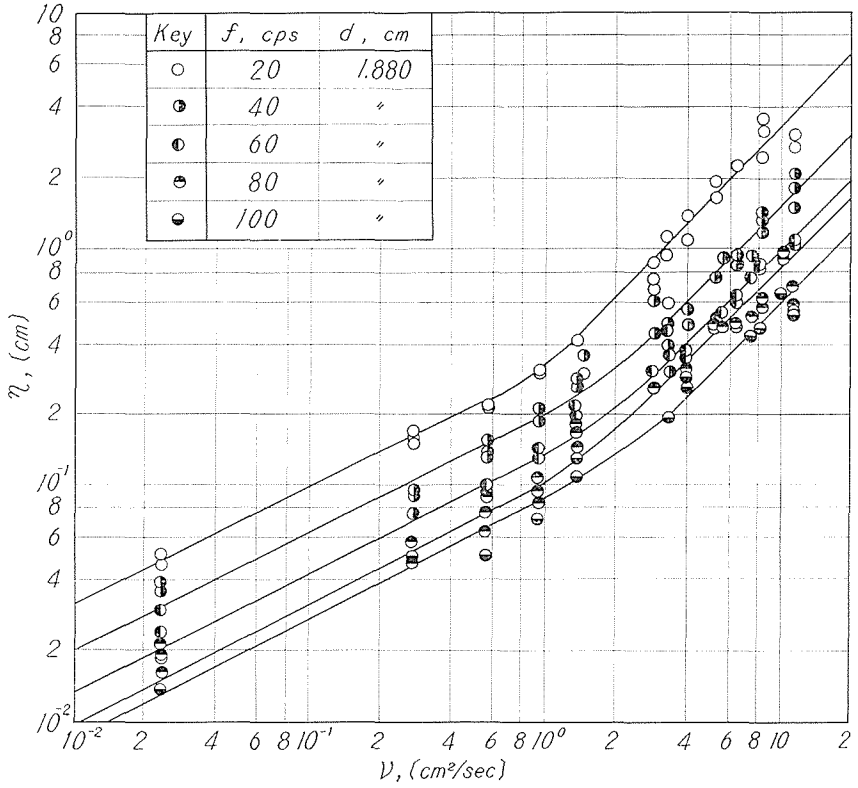
図-16 は，η/d と d^2f/ν との相関を示したものであり，d^2f/ν がほぼ 400 をこえれば，n は $-1/2$ に近づき，d^2f/ν が小さい場合には，同図では明瞭に現われていないが，n は -1 に近づくものと考えられる。

d^2f/ν が 1 より大きい範囲について，得られた実験式は下記である。

$$\frac{\eta}{d}=5.8\left(\frac{d^2f}{\nu}\right)^{-0.81} \qquad (6)$$

また，$d^2f/\nu>400$ では，$n=-\frac{1}{2}$ で表わされると仮定すれば，相関の精度は良好とはいえないが

$$\frac{\eta}{d}=1.0\left(\frac{d^2f}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$



図—13 η と ν の 相 関

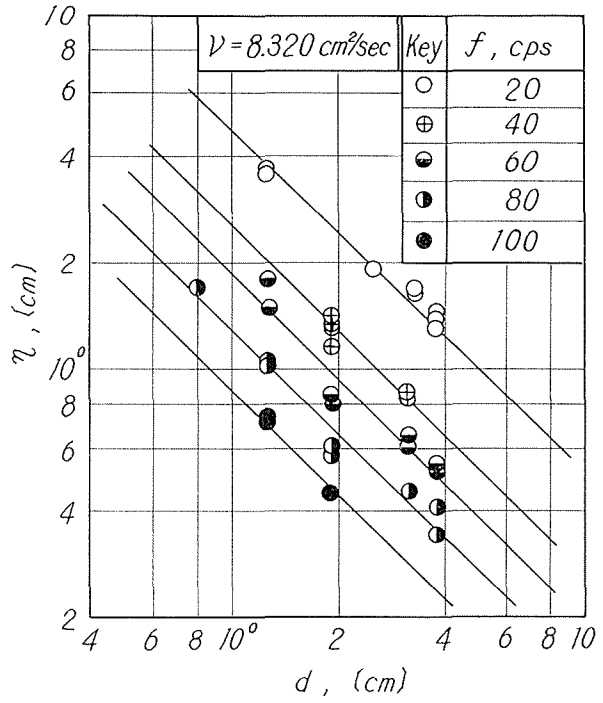
が推定の実験式である。

以上の結果から，実在流体に関しては，$d^2f/\nu \approx 400$ 程度において，フローパタンが変化し，400 をこえた範囲内においては，理論的に想定される関係 $\eta \propto \sqrt{\nu/\omega}$ をとることが推定される。$d^2f/\nu \approx 400$ は，上述 (1) 式で示した West の結果とオーダーが一致し，d^2f/ν が，振動する物体近傍のフローパタンを規定する量となりうることが察せられる。

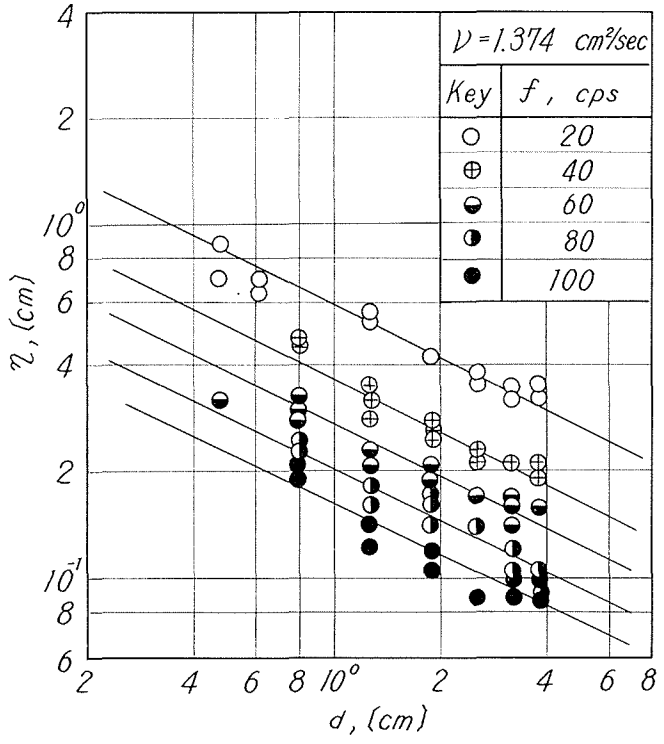
III. 円板近傍のフローパタンとその変化

円板については，そのごく近傍におけるフローパタンは複雑になり，球の場合に相当する η というべき厚みの測定はできなかった。しかし，$Re_{,v}$ または $Re_{,s}$ が小さい範囲では，**図-17 (A)** に示すごとく，外側の流れは，振動方向から，すなわち，円板に垂直な上下方向から流入し，振動方向と垂直な方向，すなわち，円板と水平な方向（半径方向）に流出する。しかし，$Re_{,v}$ または $Re_{,s}$ を増してゆくと，その流れの方向が逆転し，**図-17 (B)** のごとく振動方向と垂直な方向から流入し，振動方向（円板の上下両方向）に吐き出される流れとなることがみいだされた。この後者の流れは球を振動させた場合の外側の流れとその方向が類似であり，$Re_{,v}$ または $Re_{,s}$ の大小でその流れの方向が逆転することは，球の場合にはみられない挙動である。**図-17** は，この外側の流れの方向が逆転する点を実験的に観測し，その $Re_{,s}$ と振幅 a と円板の直径 D との比 a/D との相関を示したものである。

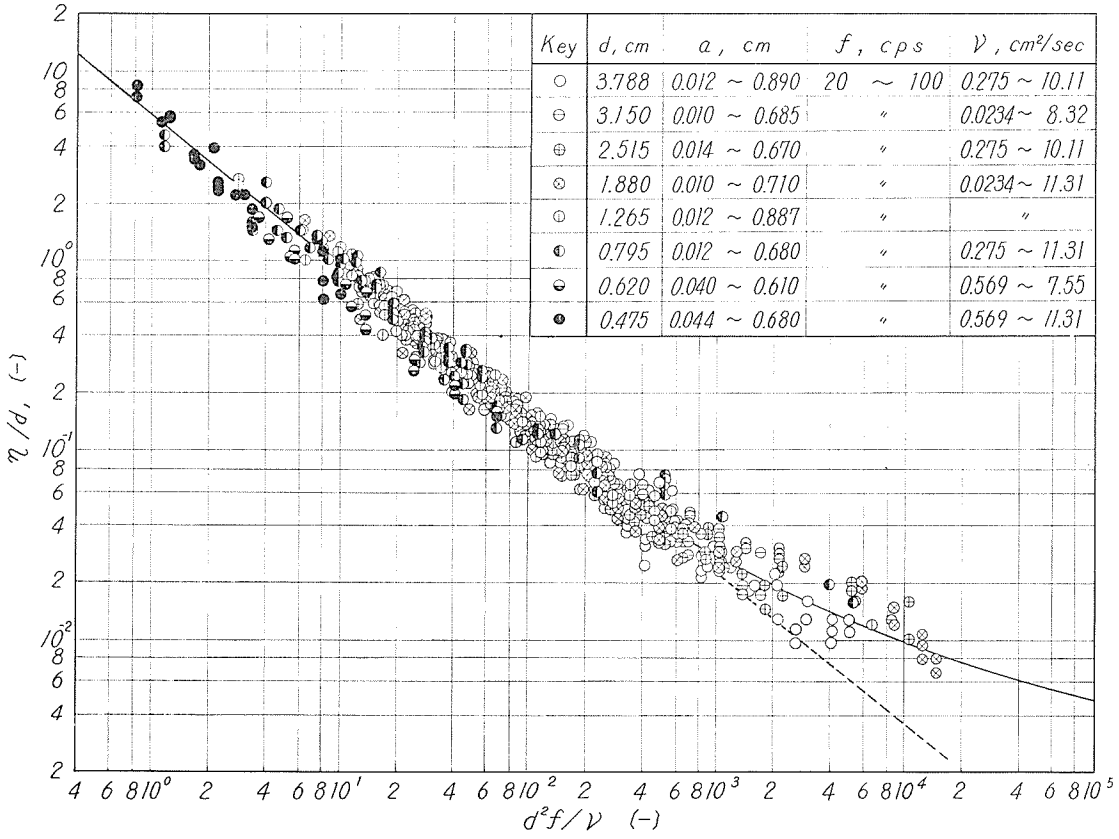
臨界条件について，えられた実験的相関は



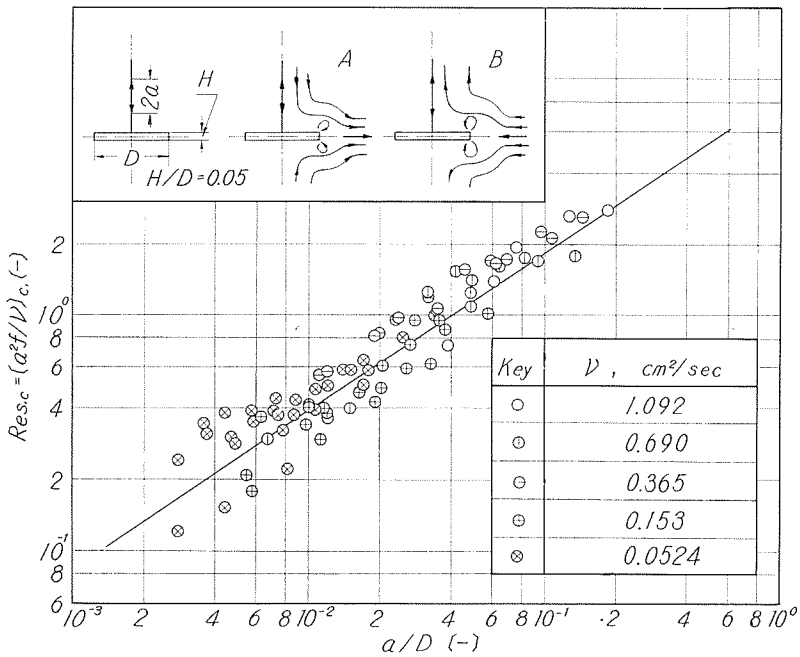
図—14 η と d の相関



図—15 η と d の相関



図—16 ループ状流れの厚みに関する実験的相関



図—17 $Res_{,c}$ と a/D の 相 関

$$\frac{a^2 f}{\nu} = 8.5\left(\frac{a}{D}\right)^{0.67} \qquad (8)$$

$$H/D = 0.05$$

$$a^2 f/\nu = 0.12 \sim 2.8$$

$$a/D = 2.78\times10^{-3} \sim 1.84\times10^{-1}$$

である。

上式を書き改めれば $D^2f/\nu = 8.5\,(D/a)^{4/3}$ となり，$D^2f/\nu < 8.5\,(D/a)^{4/3}$ においては，図-17 (A) の流れを $D^2f/\nu > 8.5\,(D/a)^{4/3}$ においては同図 (B) の流れを生ずることになる。すなわち，円板においては，同一振動数においては，円板の直径に比して振幅が大きい程，球近傍の流れと類似の型をとることになる。

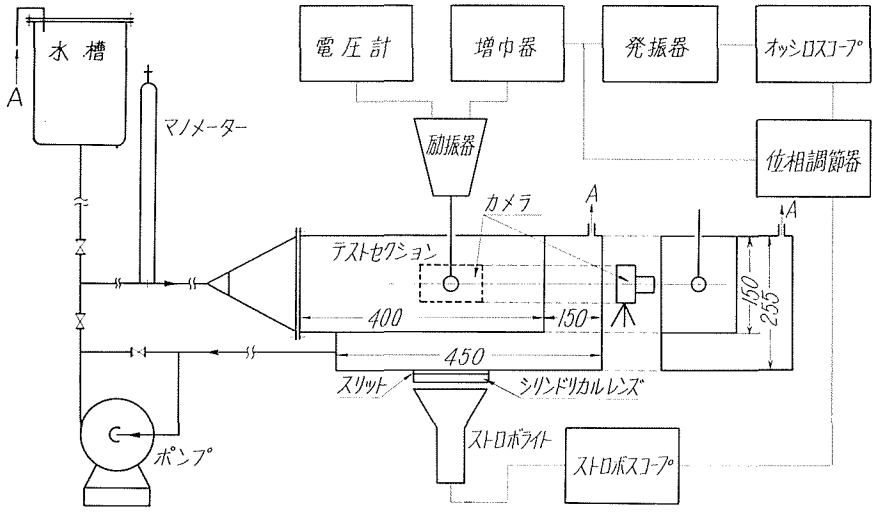
IV.　一様流中で振動する球近傍のフローパタンについて

一様流中で，一様流の方向に対して垂直方向に振動する球のまわりのフローパタンを観測し上述の一様流を伴わぬ場合との比較を試みた。実験装置の構成は**図-18** の如くであり，振動方法，振幅検出方法などは前述と同様である。

振動する球に一様流が加われば，その近傍のループ状流れは歪み，**図-19** のようになる。同図は実験データの代表例であり，それをモデル的に記したのが **図-20** である。図-20 に示したループ状流れの厚みを，一様流重畳の影響を現すものと仮定し，その厚み η_0 と一様流を伴わぬ場合の厚み η との比をもとめて，振動の代表速度 (af) と一様流の流速 U との比との関係を示したのが **図-21** である。

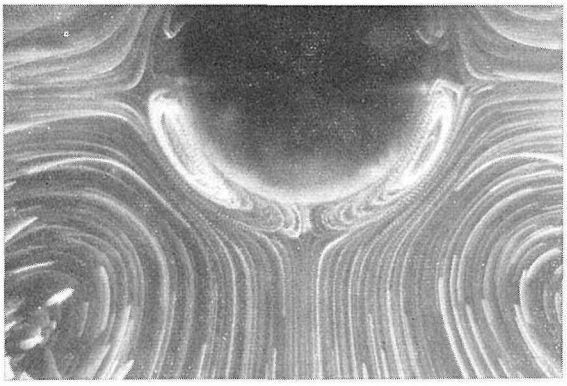
同図より，η_0/η が，ほぼ 1 のオーダーに近づくには，$af/U > 2$ 程度となり，一様流の方向と振動の方向との関係によって異なるにせよ，振動の最大速度 $(a\omega)$ が一様流の 10 倍程度以上において，一様流を伴わぬ流れの挙動で近似できることになる。すなわち，一様流に対しての変動速度が 10 倍程度以上という著しく大きな変動強度をもつときに，一様流の関与が無視しうることになる。

一様流を伴う流れについては，まだ十分な実験的相関をみいだすには至っていない。振動す

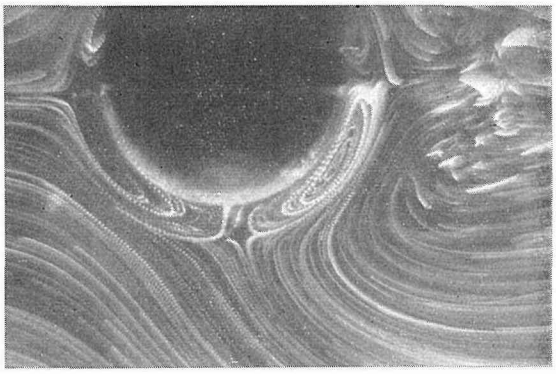


図—18　実験装置の概略

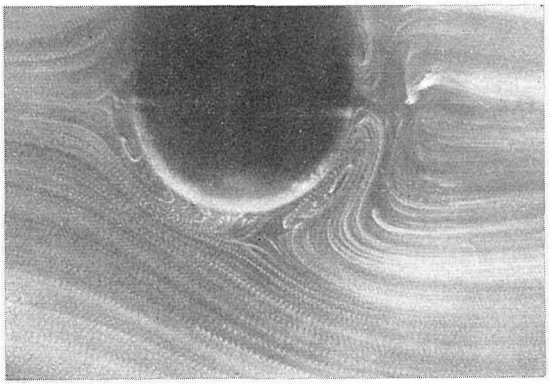
る球から，振動方向に吹き出す流速と一様流との比が，一様流の関与を規定する量となりうるものと考えられ，この意味で，前述のフローパタンにつき，さらに詳細な検討を加えている。



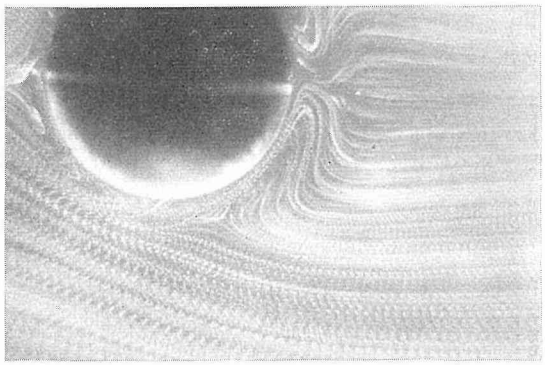
(1) $U=0$ cm/sec



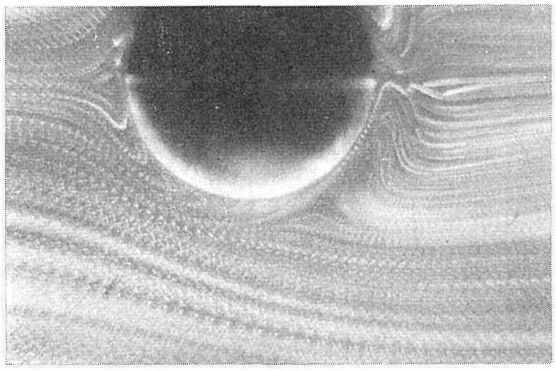
(2) $U=0.774$ cm/sec



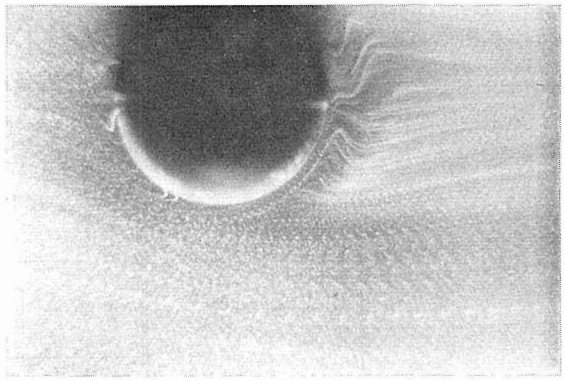
(3) $U=2.02$ cm/sec



(4) $U=3.35$ cm/sec

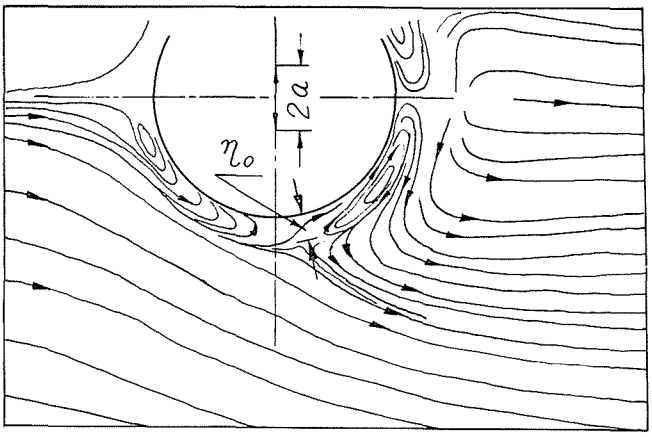


(5) $U=5.07$ cm/sec

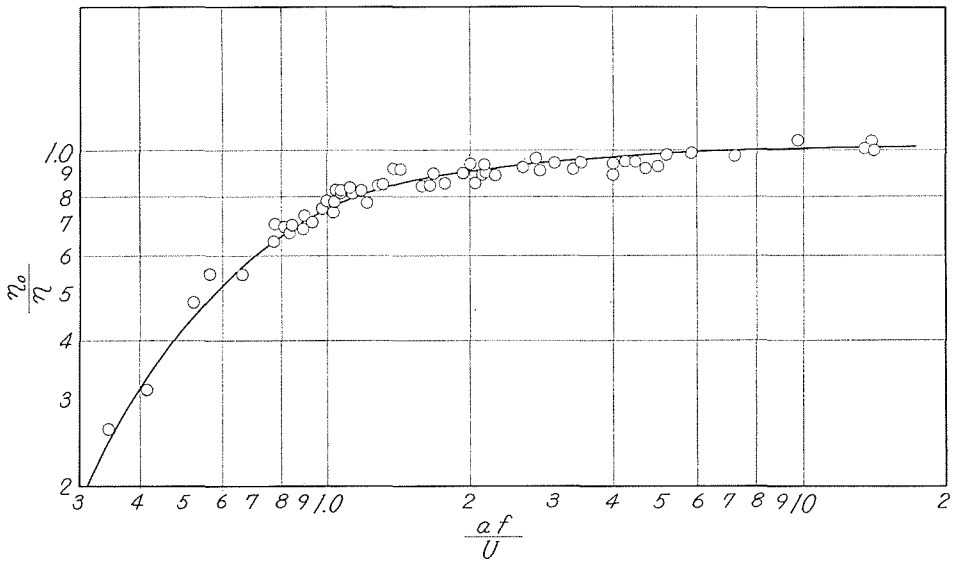


(6) $U=8.64$ cm/sec

図—19 一様流中で振動する球のまわりのフローパタン
($d=1.590$ cm, $f=40$ cps, $a=0.139$ cm, $\nu=0.758\sim0.777$ cm²/sec)



図—20　図-19 の モ デ ル



図—21　η_0/η と af/U との相関 ($d=1.59$ cm)

V.　液体中で振動する球のうける最大速度時の抗力について

V·1　流体中で振動する球のうける抗力

静止流体中で，層流の抵抗をうける球が一次元の正弦運動を行なうとすると，球が流体から受ける力はつぎのようになる[12]。

$$F_0 = 6\pi\mu RV + 3\sqrt{2}\,\rho\pi R^2\sqrt{\nu/\omega}\cdot\omega V + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)\frac{dV}{dt} + 3\sqrt{2}\,\rho\pi R^2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{dV}{dt} \qquad (9)$$

右辺第1項は，半径 R の球が，粘度 μ の流体中を速度 V で運動する際に受ける，いわゆるストークスの抵抗である。

第3項は，球によって排除される密度 ρ の流体の 1/2 の質量を加速する力を表わしている。

粒子が速度 V で流体中を運動すれば，そのまわりの流体は粒子の形状，速度によってきまるフローパタンを示すことになる。粒子を加速すれば，粒子をとりまく流体も加速されるのは当然である。流体の運動量は，時間的に変化して，運動量変化の反力は，運動量を変化させる原因である球では抗力として働く。これが第3項であり，粘性の関与する項を除き，密度 ρ_P の球を加速させる場合に，この抗力が加われば，球を加速させるに要する力は $4/3\,\pi R^3\left(\rho_P+\frac{\rho}{2}\right)\frac{dV}{dt}$ となって，見掛けでは，$1/2\ (4/3\,\pi\rho R^3)$ なる仮想の質量が球に付加して運動をともにしているように観測される 。

等速度で流れる理想流体中にある物体には流体抗力は働かない。しかし，相対速度が加速度をもてば，理想流体中でも球には力が作用し，その大きさはやはり $1/2\ (4/3\,\pi\rho R^3)\cdot\frac{dV}{dt}$ となる。$1/2$ は，いわば形状の因子であり，軸方向に直角な流れをうける円筒などは1となる。このような仮想の質量は，はじめ，理想流体に関して用いられたことばであっただろうが，粘性流体についても計算した (9) 式でも同じ型が現れてくるのである。粘性流体についてのこの項も同様に仮想の付加質量による力といってよいであろう。球自身の慣性力以外の力に関与する質量と定義すれば，第3，4項から付加質量は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\,\pi\rho R^3\right)+3\sqrt{2}\,\pi\rho R^2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\,R+9\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\right)\pi\rho R^2$$

となる。$R^2\omega/\nu\gg1$ では，付加質量は $1/2\ (4/3\,\pi\rho R^3)$ に戻るのである。

$R^2\omega/\nu\gg1$ は，(9) 式の右辺の第1項が第2項に比べて無視できることを表わしてもいる。すなわち

$$F_0\approx 3\sqrt{2}\,\rho\pi R^2\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\omega V+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\,\pi\rho R^3\right)\frac{dV}{dt}$$

$$=3\sqrt{2}\,\pi R^2\mu\,\frac{V}{\eta}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\,\pi\rho R^3\right)\frac{dV}{dt} \qquad (10)$$

$$R^2\omega/\nu\gg1,\quad \eta=\sqrt{\nu/\omega}$$

となる。

上式第2項は付加質量を加速する力，第1項は，球のまわりには，代表の厚み $\sqrt{\nu/\omega}$ があって，この厚みが速度勾配 V/η をつくり，粘性力に打勝つための力と読みとることができよう。とすると，機械的であるが，(9) 式の第4項は，球のまわりのこの厚みのもつ $3\sqrt{2}\,\rho\pi R^2\eta$ なる質量を加速する力と読める。平板がその面に沿って，一次元的に角速度 ω で振動しているとする。面から十分離れた場所で流体が静止しているという条件で，層流の速度分布を計算すれば，$\sqrt{\nu/\omega}$ は，平板に沿う流速が流体中で減衰する板からの代表の距離を表わしている。η と書いた長さの次元をもつ $\sqrt{\nu/\omega}$ は，このような内容を含んでいたのである。

さて，基礎式 (9) は，速度についての一次の項，V，dV/dt のみを含んでいる。層流であるので，速度について重ね合せのきく式である。異常な関数形をとらぬ限りでは，任意の速度 $V=V(t)$ は，正弦流れの ($V_\omega=ReV(\omega)\,e^{-i\omega t}$ の) 重ね合せでつくることができる。したがって，ω を含む項は，重ね合せの基底といった量であるわけである。

計算は省略するが，$V=0:\ t<0$，$V=V_0$ (一定)$:\ t>0$ で重ね合せると

$$F_1 = 6\pi\mu R V_0 + 6\pi\mu R^2 V_0/\sqrt{\pi\nu t} + 2/3\,\pi\rho R^3 V_0 \delta(t) : \quad t>0 \tag{11}$$

となる。

第1項は定常流れのストークスの抗力を表わしている。$t>0$ では，球のまわりの流れは，$V=V_0$ に対応するフローパタンをもつことになるが，静止状態からこのフローパタンののもつ運動量を与えるに要する力が，第3項に現われている。$\delta(t)$ は時間の次元をもつデルタ関数であり時間初期にこの撃力が現われるのである。

第2項を考えなおしてみよう。平板に沿って，同様に $t>0$ で $V=V_0$ の流れがはじまるとする。平板の前べりから境界層が発達してゆくが，前べりからの距離を x とすれば，その厚み η_x と x との比 η_x/x は，$(V_0 x/\nu)^{-\frac{1}{2}}$ の程度であろう。あるいは，η_x は $\sqrt{\nu x/V_0}$ の程度であろう。x は平板によって流体が拘束される距離であり，$x=V_0 t$ とおけば，η_x は $\sqrt{\nu t}$ のオーダーとなる。第2項は，面積 R^2 に粘性によるストレス $\mu V_0/\sqrt{\nu t}$ が働くといった力を現わしていると解されよう。

一般の速度 $V=V(t)$ については，(9) 式を重ねて

$$F_V = 6\pi\mu R V + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \frac{dV}{dt} + \frac{6\pi\mu R^2}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \left[\frac{dV}{d\tau}\Big/\sqrt{t-\tau}\right] d\tau \tag{12}$$

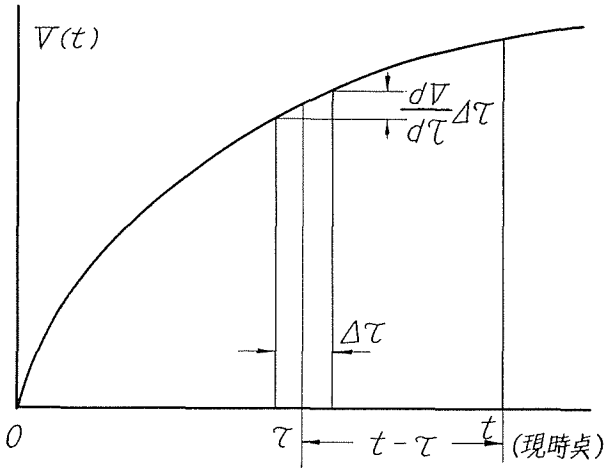
がえられる。

(9) 式の第2，4項が積分項となって現われている。この項は時間を含み，流体抗力は時間とともに変化することになる。

上式中の積分項を (11) 式第2項の意味で重ね合せてみよう。速度 $V(t)$ のパターンが**図-22**で表わされるとする。現時点 $t=t$ をさかのぼる $t=\tau$ において，ステップ状に $dV/d\tau\cdot\Delta\tau=\Delta V\tau$ なる一様速度が重畳されたとすれば，現時点に至るその影響持続時間は $(t-\tau)$，力としての関与は $6\pi\mu R^2\Delta V\tau/\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}=(6\pi\mu R^2/\sqrt{\pi\nu})\cdot(\Delta V\tau/\sqrt{t-\tau})$ となる。

$\tau=t\sim0$ まで，この量をなめらかに重ね合せれば，上述の積分項，バセット項が導かれる。積分の範囲は現時点から影響持続時間に及び，十分の過去からの影響を含めれば，下限は $-\infty$ に至ることになる。

(9) 式に戻れば，右辺の第2項，第4項が上述のバセット項を表わしている。数学的には，第2，4項は，その形から推察されるように位相が90度ずれた項に分解されていることになる。



図—22　重ね合わせによる積分項の表現

層流の抵抗を受ける球の抗力について概要を述べた。球近傍にループ状流れを生ずる場合について，主流の側についてのレイノルズ数 $d(a\omega)/\nu$ が十分大きい範囲を含めて，どのような抗力が働くかが問題となる。以下は，相対速度最大時の抗力を対象とする，抗力の実験的検討である。

V·2　液中で相対振動する球に働く最大速度時の抗力こ関する実験的検討

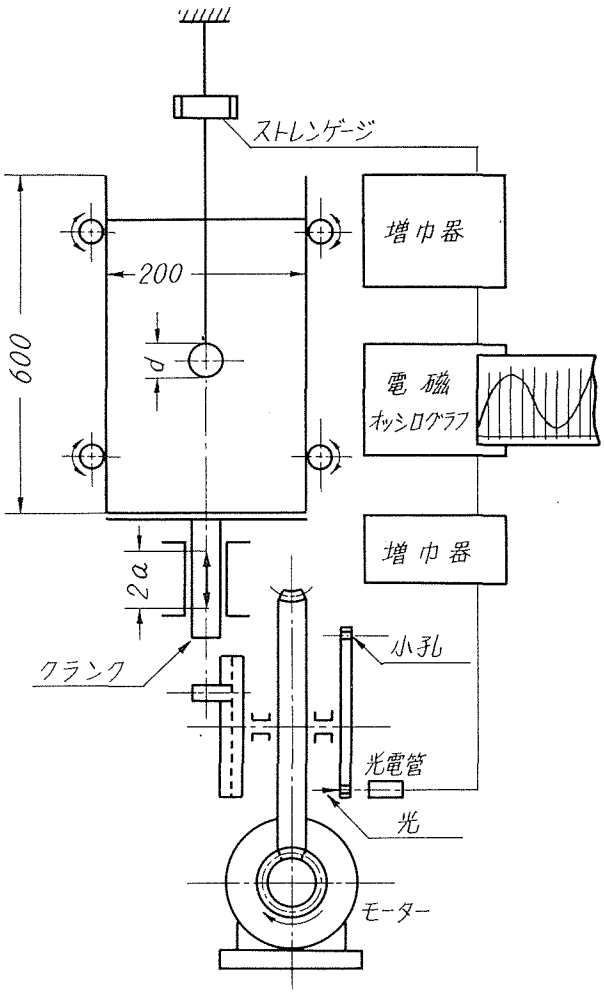
本実験においては，測定精度に大

きな影響を与える球自身の慣性力が無視できる条件をつくりだすため，球を固定し，その周囲の液体を正弦的に上，下動させて，球に働く流体抗力のうち，最大相対速度時の抗力をつくりだしている。

V·2·a　実験装置とその構成

図-23 は，球を固定し，周囲の液体を上下振動させる装置の構成である。球に働く力を，ストレンゲージによって検出し，増幅器を介して，抗力の変化によるその出力を電磁オッシログラフ紙上に記録している。

液体に対する球の相対変位，すなわち，振動の変位角度をしらべるため図示の如く，ウォーム車と同軸上に円板をとりつけて，ウォーム軸中心を中心とする円板上の円周に沿って等しい角度の開きで8個の小孔をあけ，その小孔を光路のゲートとして，光量の変化によるパルスをオッシログラフ紙上に同時記録している。容器が最下端にある状態を偏位角度の基準にとり，この角度を零として，この状態に対応する光路の小孔のみを閉じ，角度の識別を行なった。実験に用いた球は，直径 $d=1.595,\ 1.915,\ 2.488,\ 3.760$ cm の4種，運動粘度 $\nu=0.01\sim3.305$ cm^2/sec (水及び水あめ水溶液)，振幅 $a=0.248\sim3.028$ cm，角振動数 $\omega=7.884$ rad/sec である。



図—23　実験装置の概略

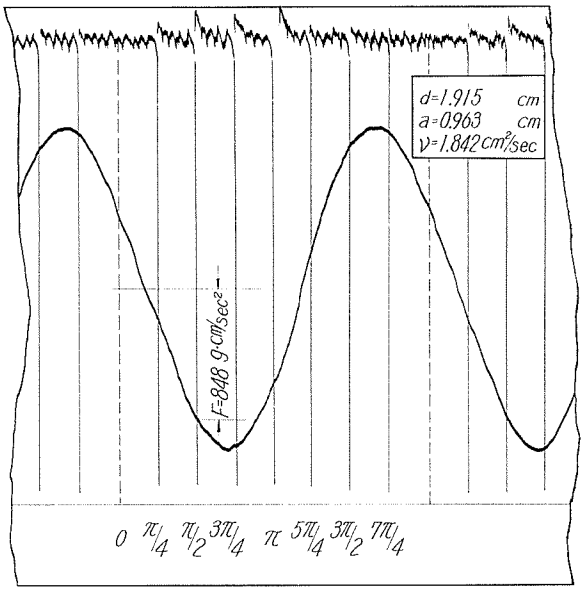
V·2·b　抗力の検出

液体が上方に加速度 α をもって運動するとき，直径 d なる球には $\frac{\pi}{6}\rho d^3(g+\alpha)$ なる浮力にもとづく力が働く。ρ は液体の密度，g は重力の加速度である。

本実験では，静止した液体中に球が静止している場合を外力の働かぬ状態としているので，図-23の容器が，加速度 α をもって上方に運動するとき，抗力として現われる球のうける浮力 F_b は，$\frac{\pi}{6}\rho d^3\alpha$ となる。

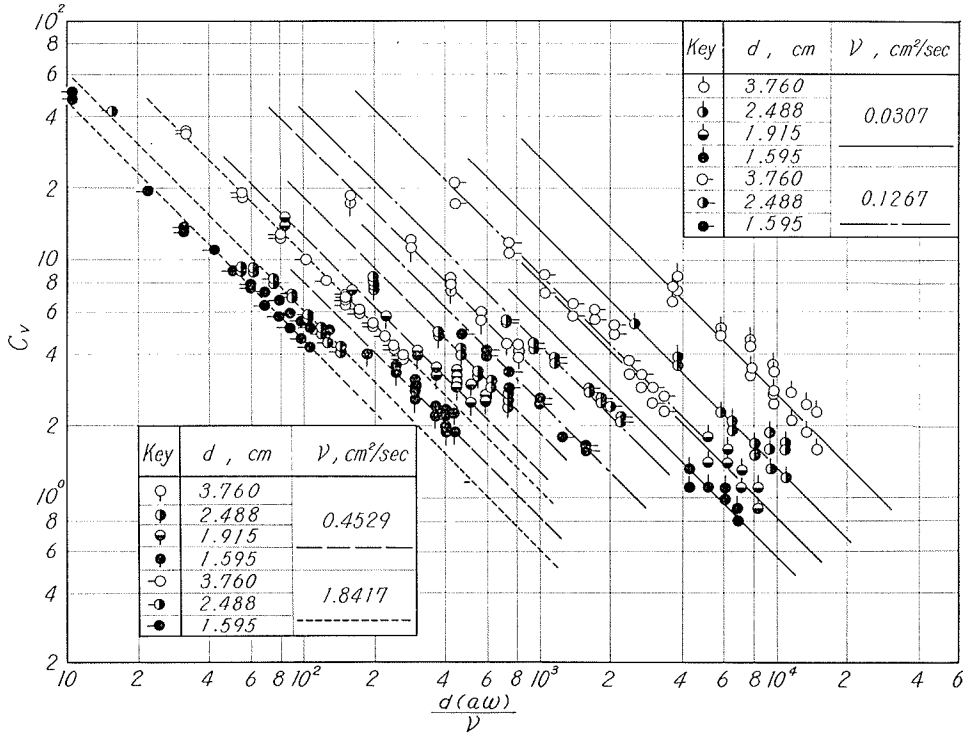
球に働く力の変化によって，オッシログラフ紙上に現われた光ビームの変位を，同紙上の変位として表わした力・変位間の検定曲線をもとに，抗力 $F_{\mathrm{meas.}}$ をもとめ，この実測の抗力 $F_{\mathrm{meas.}}$ から上記の $\frac{\pi}{6}\rho d^3\alpha$ を減ずれば，浮力をのぞいた抗力がもとめられる。容器の加速度零，すなわち，最大相対速度時においては，$\frac{\pi}{6}\rho d^3\alpha=0$ となり，$F_{\mathrm{meas.}}$ は本実験の対象とする抗力に一致する。

($F_{meas.}-F_b$) は，流れの相対加速度にもとづく附加質量に関する抗力を含み，また，流れの重ね合せが可能であり，抗力が相対速度に対して線型という条件で現われるヒイストリィ項(バセット項) に対応する力を含んでいると考えられる。しかし，図-26 の如く，球近傍にはループ状の流れが生じ抗力が速度に対して線型とはならぬ本実験で，は過去の速度変化が，球近傍を含め現時点の球を囲む流れの挙動に与える影響を表すバセット項に対応する力の内容を評価することは困難である。本実験では，附加質量に関する抗力を無視できる相対加速度零の時点における抗力を求めて，$(F_{meas.}-F_b)_{\alpha=0}=F_{meas.}=F$ と操作量との関係を追跡した。ここでは，F は物理的内容の異なる項が加算された形で表わされるとはせず，操作量の単一の関係で示されるものと仮定している。



図—24　データーの一例

図-24 は，実験データーの一例であり，図示の F が $\alpha=0$ における抗力を表している。



図—25　C_v と $d(a\omega)/\nu$ の相関

V·2·c 実験結果とその考察

上述の測定抗力 F より，最大速度 $(a\omega)$ に関する抵抗係数をつぎのように定義した。

$$C_v = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2} \tag{13}$$

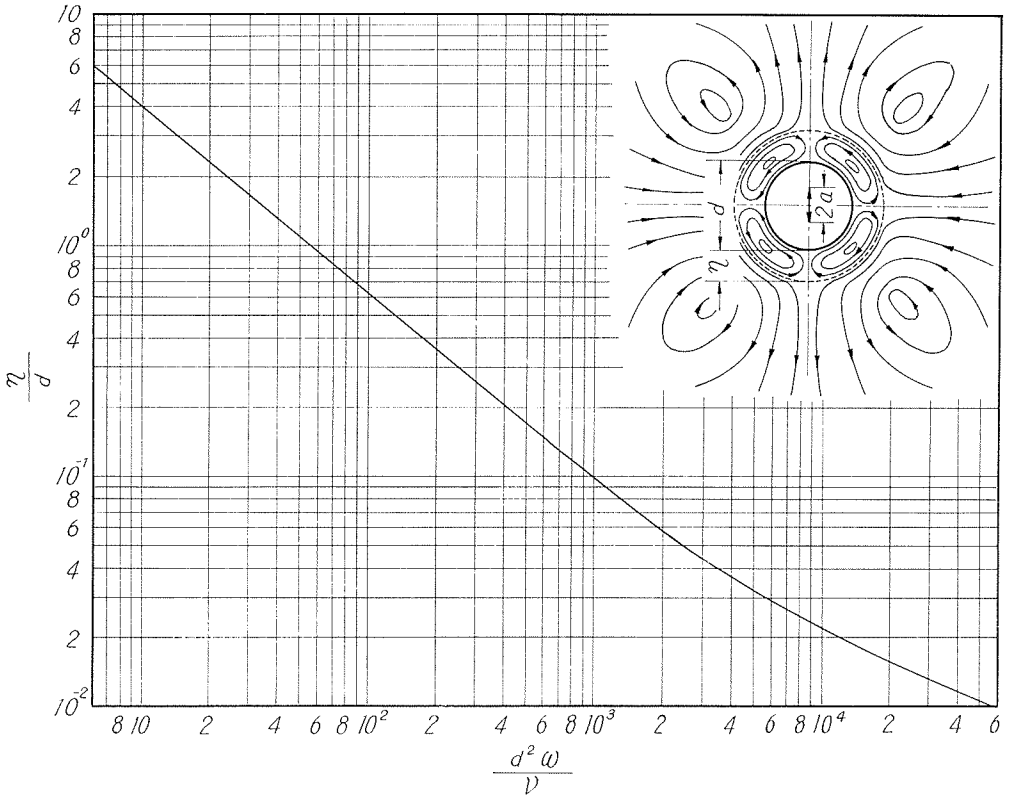
図-25 は，球に対する液の速度及び球径を基準にとったレイノルズ数 $Re = d(a\omega)/\nu$ と，C_v との関係を示したものである。上述の抵抗係数 C_v は，球から離れた流れの速度 $(a\omega)$，球径 d を基準とするレイノルズ数のみの関数としては表わしえず，相対速度 $(a\omega)$ の流れのうちにある定常時の球の抗力とは異なる内容が現われている。

球とその周囲の流体とが相対的に正弦運動を行なう場合には，球近傍にはループ状の流れを生ずる。筆者らは，種々の粘度の液体中で広い実験範囲について球を正弦振動させ，最大速度時におけるループ状流れの厚み η を測定して，η/d が $d^2\omega/\nu$ の関数として表わされることをみいだしている。**図-26** が，その実験的関係である。

球の周囲の流速は，ループ状の流れの厚み η 程度以上球から離れた場所で $(a\omega)$ 程度の値をとり，したがって，流れを勾束する距離 η が，レイノルズ数の長さの尺度となりうるものと考えられる。図-26 を用いて η を算出し，$Re_{,\eta} = \eta(a\omega)/\nu$ と，抵抗係数 C_v との関係を示したのが **図-27** であり

$$C_v = 180/Re_{,\eta} \tag{14}$$

で表わされる。



図—26 η/d と $d^2\omega/\nu$ の相関

図-26 は，$d^2\omega/\nu<2\times10^3$ の範囲では

$$\frac{\eta}{d}=25.6\left(\frac{d^2\omega}{\nu}\right)^{-0.81} \tag{15}$$

となり，上2式より

$$C_v=6.77\left(\frac{d^2\omega}{\nu}\right)^{0.81}\cdot\left(\frac{da\omega}{\nu}\right)^{-1}\quad:\quad\frac{d^2\omega}{\nu}<2\times10^3 \tag{16}$$

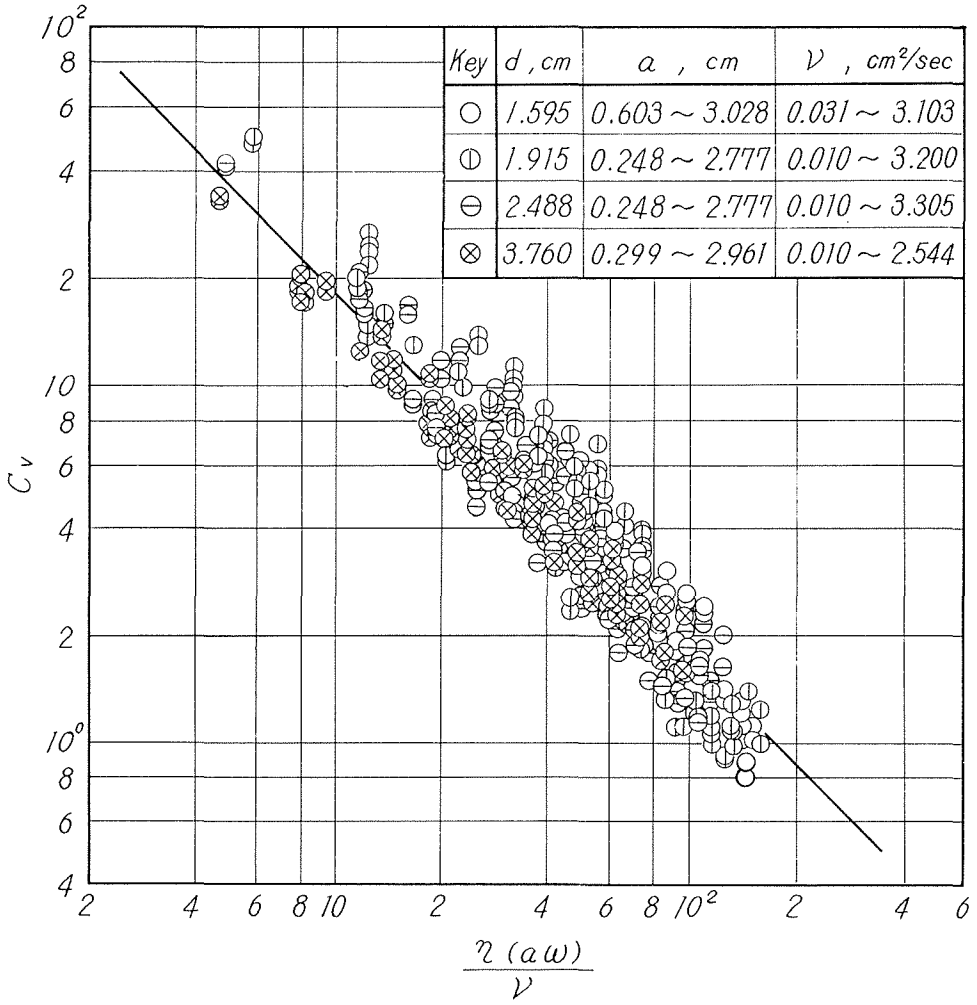
がえられる。

本実験結果と対比すべき，抗力に関する実験的表示は Odar ら[13] の結果のみであろう。Odar らは，ν, d それぞれ一定の条件下で，$a=2.54$, 5.08, 7.62, 10.16 cm について $\omega\leqq16.64$ rad/sec の範囲で実験を行ない，つぎの式を与えている。

$$F_{\alpha=0}=C_D\cdot\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2+C_H\cdot\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{\frac{\rho\mu}{2}}\cdot a\omega^{3/2} \tag{17}$$

$$C_H=2.88$$

C_D は定常状態において定義される通常の意味の抵抗係数であり，C_H を係数とする右辺第2項は

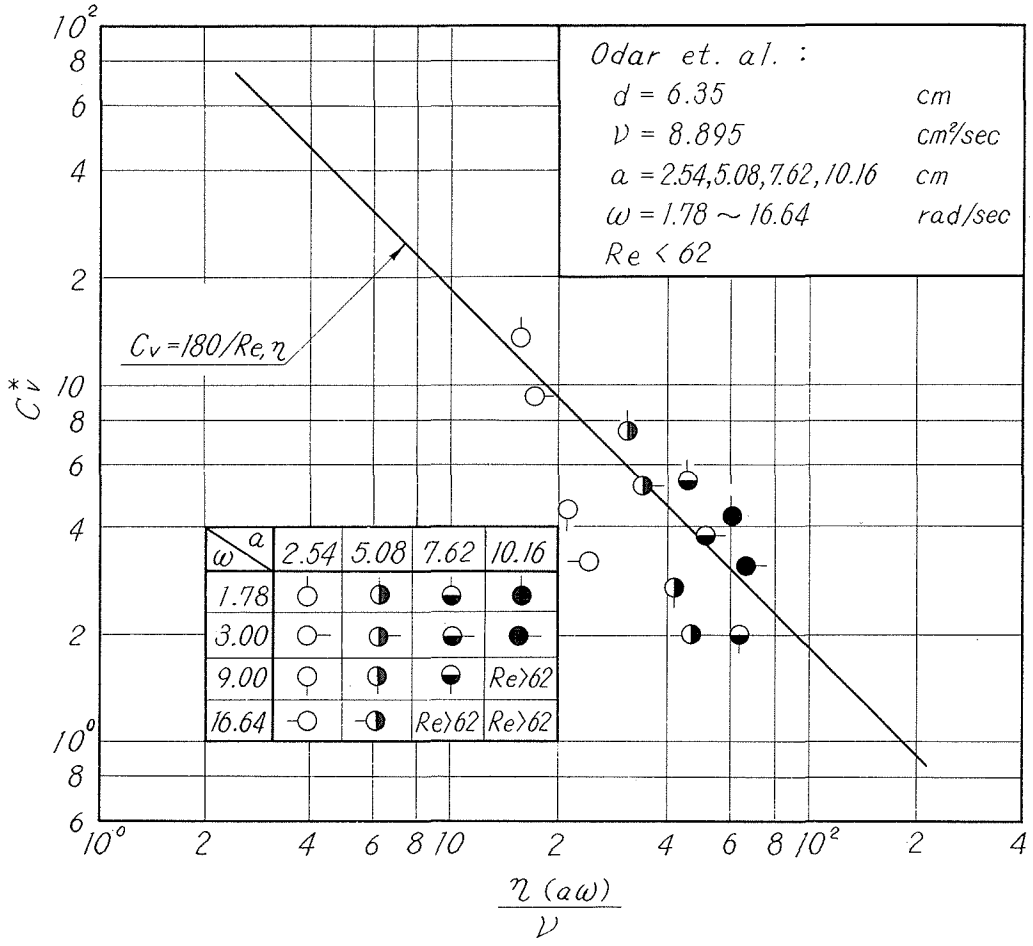


図—27　C_v と $\eta(a\omega)/\nu$ の相関

正弦運動を行なう球の抗力が，ストークス近似によって解れるとしたときに現われるバセット項 $6\cdot\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{\frac{\rho\mu}{2}}\cdot a\omega^{3/2}$ の係数 6 を C_H に改め，C_H が相対速度に対して $v^2/\alpha d$ の実験関数で与えられるとした力である。C_H は $\alpha=0$ の場合 2.88 の値をとるとしている。すなわち，層流近似で導かれた前述 (9) 式の第 1 項を定常状態において定義される抗力に代え，残りの項の係数を，慣性力内部の 2 項の比 $(v\cdot v/d)/\alpha$ の関数と仮定する手法である。

Odar らの (17) 式が，Odar らの実験条件の内部では，その実験結果をよく表しうるものとして，Odar らの実験結果を (17) によってもとめ，本実験と角振動数及び相対運動の異なる Odar らの実験条件内において，(14) 式による抵抗係数との比較を行なった。すなわち，(17) 式を用いて $F_{\mathrm{cal.}}$ をもとめ，$C^*_\eta=F_{\mathrm{cal.}}\Big/\left\{\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2\right\}$ と，図-26 にしたがうとした η を用いた $Re_\eta=\eta(a\omega)/\nu$ との相関を示したのが**図-28** である。本実験と球径，振動数，相対運動の異なる Odar らの実験範囲についてえられた C^*_η は，ほとんど図-27 のデータのひろがりのうちに含まれ，本実験にもとづく (14) を，ほぼ満足している。

上述の結果から，ループ状の流れを生ずる球に関しても定常状態の抗力が働くとし，それに (17) 式の第 2 項が加算されるとした Odar らの扱いは，適用条件を問われるにせよ，ループ状流



図—28 C^*_η と $\eta(a\omega)/\nu$ の相関

れの厚みを考慮するといった単純な扱いによって十分代りうることが推定された。

なお，前述 (10) の如く，$dV/dt=0$，$R^2\omega/\nu \gg 1$ においては，層流近似の解より

$$F \approx 3\sqrt{2}\,\pi R^2 \mu \cdot \frac{V}{\eta^*} \tag{18}$$

$$\eta^* = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

となり，η^* を，ここでいうループ状流れの厚み η に代えれば，$F \propto d^2\mu a\omega/\eta$ すなわち，実験式 (14) と同型となる。η の発生原因を問わず，η を実験関数として与えられた厚みとみるならば，流れに関する時間の履歴は F の関数型には直接現われぬことになる。しかし，方向の交替する流れに追従できぬ物体近傍の流れに η の発生原因をみるならば，η の内部には，時間の履歴が含まれ，上式と類推の型が現われるとみることもできよう。

VI. むすび

球と流体との相対速度が正弦的に変化する場合について，球近傍に生ずるループ状流れの挙動と，相対速度最大時における抗力との相互関係について述べた。

相対速度が一般の場合について，流体抗力がどのように働くかはほとんど分っていない。相対速度基準のレイノルズ数の大きな領域にわたっては，解析値によって予知することは困難であり，実験データーはとぼしい。

この種の問題は，流体が気体，液体であることの差異，また，振動数によっても扱いが異なっている。すなわち，気体の正弦流れ中にある物体の抗力は，気体の振動周波数がどの程度大きく，振幅がどの程度小さくなったとき，圧縮性流体としての影響をうけるかということである。上，下振動する液体中を沈下する球の平均沈降速度は，静止液体中における定常沈降速度よりも小さい。解析的にも推定されることであるが，ここでは球の平均沈降速度が零となりうる条件がありうるかが問題とされる。一方キャピテーションを生ぜぬよう，液中の気体を十分真空脱気し超音波を加えた場合に，全く気泡の発生がみられぬ条件をつくりだしたとき，垂直方向に液下部から上方に向って超音波の場を与えた場合，その液中にある球には，上方に抗力が働き，原，遠藤らは，その抗力を測定して，抗力 F が，$F\Big/\left\{\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2\right\} \propto [\eta^*(a\omega)/\nu]^{-1}$，$\eta^*=\sqrt{\nu/\omega}$ で与えられることをみいだしている。ここで述べた (14) 式と同型であり，図において，$d^2\omega/\nu$ が著しく大きい場合にとる η の関数型が η^* である。この場合には，いわゆる超音波の音圧といわれるものが，平均的に一方向に作用し，その力の型は，相対的に振動する球に働く最大速度時の抗力と同じとなることが現われている。どのような周波数，どのような振幅を加えたときに，このような力が働き，球の平均沈降速度を零となしうるかが問われることであり，粒子群の分級操作への応用など，その適用範囲は狭くない。

液体中で振動する球の問題のうち，基礎的知見の一部を述べた。振動する物体と流体間の移動現象は，上述のフローパタンと関係してくるのである。

附　記

上記の実験に協力された山崎平馬，栗原博次，佐々木敏博諸氏に感謝の意を述べたい。

使 用 記 号

a:	振　　幅	[cm]
C_D:	定常抵抗係数	[−]
C_H:	ヒストリィ項に関する抵抗係数	[−]
C_v:	抵 抗 係 数	[−]
C_v^*:	$F_{\mathrm{cal.}}\Big/\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2$ で計算される抵抗係数	[−]
d:	球 の 直 径	[cm]
D:	円板の直径	[cm]
f:	振 動 数	[cps]
F:	最大相対速度時の抗力	[g-cm/sec]
F_b:	浮　　力	[g-cm/sec]
$F_{\mathrm{cal;}}$:	(17) 式により計算される抗力	[g-cm/sec]
$F_{\mathrm{meas.}}$:	実測の抗力	[g-cm/sec]
F_0:	正弦運動を行なう球のうける抗力	[g-cm/sec]
F_V:	ストークス近似による球のうける抗力	[g-cm/sec]
g:	重力の加速度	[cm/sec^2]
H:	円板の厚み	[cm]
R:	球の半径	[cm]
$Re_{,v}$:	レイノルズ数, daf/ν	[−]
$Re_{,s}$:	レイノルズ数, a^2f/ν	[−]
$Re_{,\eta}$:	レイノルズ数, $\eta a\omega/\nu$	[−]
t:	時　　間	[sec]
U:	一様流速度	[cm/sec]
V:	速　　度	[cm/sec]
V_ω:	正弦運動する流体の速度	[cm/sec]
x:	平板前べりからの距離	[cm]
α:	相対流の加速度	[cm/sec]
η:	内側ループ状流れの厚み	[cm]
η_0:	一様流を伴うときの内側ループ状流れの厚み	[cm]
η_x:	距離 x での境界層の厚み	[cm]
μ:	流体の粘度	[g/cm-sec]
ρ:	流体の密度	[g/cm^3]
ρ_P:	球の密度	[g/cm^3]

参 考 文 献

1) Lavender, W. J. et. al.: Int, J. Heat and Mass Transfer **10**, 529 (1967).
2) Yakhontov, M. V. et. al.: Stal in English, **9**, 676 (1963).
3) 酒井重雅：日本学術振興会製鉄第 54 委員会，第 67 回会議資料，昭和 41 年 4 月.
4) Schenck, H. and Cloth, J.: Stahl Eisen, **80**, 1453 (1960).
5) Kolmogoroff, A. N.: Doklady Akad. Nauka S. S. S. R. **66**, 825 (1949).

6) Houghton, G.: Proc. Roy. Soc., **A 272**, 33 (1963).
7) West, G. D.: Proc. Phys. Soc. London, **B 64**, 483 (1951).
8) Andrade, C.: Proc. Roy. Soc. London, **A 134**, 445 (1935).
9) Schlichting, H.′ Z. Phys. **33**, 327 (1932).
10) Richardson, P. D.: Appl. Mech. Review, **20**, 201 (1967).
11) Richardson, P. D.: J. Fluid Mech., **30** (2), 337 (1967).
12) Landau, L. D. Lifschitz, E. M.: "Fluid Mechanics" Pergamon Press P. 95 (1959).
13) Odar, F. et. al.: J. Fluid Mech. **18** (2), 302 (1964).