



Title	衝突振動系の過渡振動について
Author(s)	深谷, 健一; Fukaya, Ken-ichi; 入江, 敏博 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 62, 31-39
Issue Date	1971-09-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41063
Type	departmental bulletin paper
File Information	62_31-40.pdf



衝突振動系の過渡振動について

深谷 健一* 入江 敏博*

(昭和46年4月30日受理)

On the Transient Oscillation of a Vibro-Impact System

Ken-ichi FUKAYA Toshihiro IRIE

(Received April 30, 1971)

Abstract

When a periodic exciting force acts on a vibrating system with clearance, stationary impact vibration arises at several periods. However, the vibration has not been studied sufficiently, since the analysis of such vibrations is generally complicated except for the fundamental impact vibration in which the period is equal to that of the force.

In this paper, by simulating transient vibrations caused by harmonic force by an electronic computer, the existence of super, sub and super-sub impact vibration, the ratios of such periods to that of the force are equal to integers or fractions, was confirmed and the wave forms of vibration and the conditions causing such vibration were studied.

1. ま え が き

周期的な衝突振動の解析は予め定常な衝突振動を仮定して、これが存在するための条件から物体の変位、衝突速度、起振力の位相などを決定し、その安定性を論じている^{1,2,3)}。しかし現実にはこのようなきまったパターンの定常振動が常に起こるという保証はなく、前報⁴⁾で明らかにされた同一のパラメータでいくつかの衝突振動形が存在する場合や、物体と壁の間のすき間が定常な非衝突振動の振幅より大きい場合には、物体の変位、速度や位相角の初期値によって、生ずる定常振動に複数のパターンが存在し得る。

このような問題は、周期力による非線形振動系の初期値依存性の問題として林⁵⁾によりマッピング法を用いて研究されているが、衝突振動について研究されているものはない。マッピング法では普通リセット・ホールド機構を有するアナログ計算機を利用しているが、本論文ではこれとほぼ同じ演算をデジタル計算機を利用して、あるきまった初期値から運動をはじめた物体が、衝突を繰り返しながらやがて定常な振動に達するまでの過程をシミュレートし、これによって定常衝突振動のパターンを調べる⁶⁾。さらにこの方法によると、定常な衝突振動の解析によっては求めるのが困難な、複雑な super-sub 振動の存在とその振動パターンを計算することも可能である。

2. 衝突振動の計算機シミュレーション

図1のようにばねこわさ k のばねに支えられ、一定の距離 d を隔てて壁と相対している質量 m の物体に調和起振力 $F \sin(\omega t + \varphi_0)$ が作用するとき、つぎの運動方程式が成立する。

$$m\ddot{x} + kx = F \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

* 機械工学第二学科 機械力学講座

x は物体の静止平衡位置から測った変位, φ_0 は起振力の初期位相角である。予め物体が壁と圧着されているときは, 壁がない物体単独の平衡位置から測った変位をとり $x \leq d \leq 0$ である。式 (1) を無次元変位 $\xi = x/x_{st}$ ($x_{st} = F/k$), 無次元時間 $\tau = \omega_n t$ ($\omega_n = \sqrt{k/m}$), 振動数比 $\beta = \omega/\omega_n$ を用いて書き直せば

$$\ddot{\xi} + \xi = \sin(\beta\tau + \varphi_0) \quad (2)$$

となる。物体が壁と衝突を繰り返すとき, ある時刻 τ_{j-1} に衝突が起こったのち, 時刻 τ_j につきの衝突が起こるまでの物体の変位は式 (2) の解

$$\xi_j(\tau) = C_j \sin \tau + D_j \cos \tau + f \sin(\beta\tau + \varphi_0) \quad (\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j) \quad (3)$$

($j=1, 2, \dots$) を用いて表わされる。またこのときの物体の速度は

$$\dot{\xi}_j(\tau) = C_j \cos \tau - D_j \sin \tau + \beta f \cos(\beta\tau + \varphi_0) \quad (4)$$

ただし $f=1/(1-\beta^2)$ ($\beta \neq 1$) である。壁の位置を $\delta = d/x_{st}$ で表わし, 時刻 τ_{j-1} で物体が壁から反発される (衝突直後の) 速度を u_{j-1+0} とすれば

$$\xi_j(\tau_{j-1}) = \delta, \quad \dot{\xi}_j(\tau_{j-1}) = u_{j-1+0} \quad (5)$$

の関係があるから, 式 (3), (4) を式 (5) へ入れ, 定数 C_j, D_j を決定することによって

$$\begin{aligned} \xi_j(\tau) = & \{\delta - f \sin(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \cos(\tau - \tau_{j-1}) + \{u_{j-1+0} - \beta f \cos(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \\ & \times \sin(\tau - \tau_{j-1}) + f \sin(\beta\tau + \varphi_0) \quad (\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j) \end{aligned} \quad (6)$$

つぎに物体が壁に衝突する時刻 τ_j では

$$\delta = \{\delta - f \sin(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \cos z_j + \{u_{j-1+0} - \beta f \cos(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \sin z_j + f \sin(\beta\tau_j + \varphi_0) \quad (7)$$

衝突 (直前の) 速度は

$$\begin{aligned} u_{j-0} = & -\{\delta - f \sin(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \sin z_j + \{u_{j-1+0} - \beta f \cos(\beta\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \cos z_j \\ & + \beta f \cos(\beta\tau_j + \varphi_0) \end{aligned} \quad (8)$$

と書ける。 $z_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ は衝突時間間隔を表わす。衝突による物体と壁の変形がきわめて小さく, かつ衝突時間が二つの衝突の間の時間間隔に比べて小さく省略できるときは, 衝突前後の速度の間につきの関係がある。

$$u_{j+0} = -\varepsilon u_{j-0} \quad (9)$$

ε は物体と壁の反発係数で, 普通 $0 < \varepsilon < 1$ の値をもっている。

式 (7) から衝突時刻 τ_j が一つ前の衝突時刻 τ_{j-1} と速度 u_{j-1+0} の関数として求まれば, つぎの衝突直後の速度 u_{j+0} が式 (8), (9) より得られ, そのごの運動が決定する。式 (7) は τ_j に関する超越方程式であるが, ニュートン法によって τ_j を数値的に解くことは容易である。

時刻 $\tau=0$ で物体の初期変位 ξ_0 と初速度 u_0 が与えられるときは式 (6) は

$$\xi_1(\tau) = (\xi_0 - f \sin \varphi_0) \cos \tau + (u_0 - \beta f \cos \varphi_0) \sin \tau + f \sin(\beta\tau + \varphi_0) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1) \quad (10)$$

となる。

共振時 ($\beta=1$) には式 (3) および式 (4) は

$$\xi_j(\tau) = C_j \sin \tau + D_j \cos \tau - \frac{1}{2} \tau \cos(\tau + \varphi_0) \quad (3)'$$

$$\dot{\xi}_j(\tau) = C_j \cos \tau - D_j \sin \tau - \frac{1}{2} \{\cos(\tau + \varphi_0) - \tau \sin(\tau + \varphi_0)\} \quad (\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j) \quad (4)'$$

したがって式 (7) および式 (8) は

$$\delta = \delta \cos z_j + \{u_{j-1+0} + \frac{1}{2} \cos(\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \sin z_j - \frac{1}{2} z_j \cos(\tau_j + \varphi_0) \quad (7)'$$

$$u_{j-0} = -\delta \sin z_j + \{u_{j-1+0} + \frac{1}{2} \cos(\tau_{j-1} + \varphi_0)\} \cos z_j - \frac{1}{2} \{\cos(\tau_j + \varphi_0) - z_j \sin(\tau_j + \varphi_0)\} \quad (8)'$$

となる。そして式 (10) は

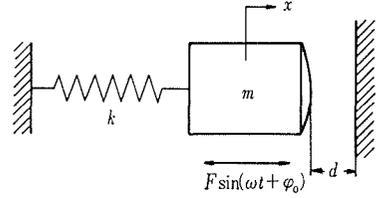


図1 壁と衝突する物体

$$\xi_1(\tau) = \xi_0 \cos \tau + (u_0 + \frac{1}{2} \cos \varphi_0) \sin \tau - \frac{1}{2} \tau \cos(\tau + \varphi_0) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1) \quad (10)'$$

と書ける。

以上のように時刻 $\tau=0$ ($\varphi=\varphi_0$) で $\xi=\xi_0$, $\dot{\xi}=u_0$ で始まった運動はそのご起振力の作用によって図2のように衝突が起こり、安定で周期的な衝突振動が存在する系ではやがて定常な周期運

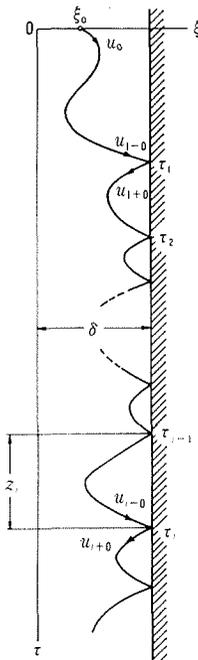


図2 物体の衝突運動

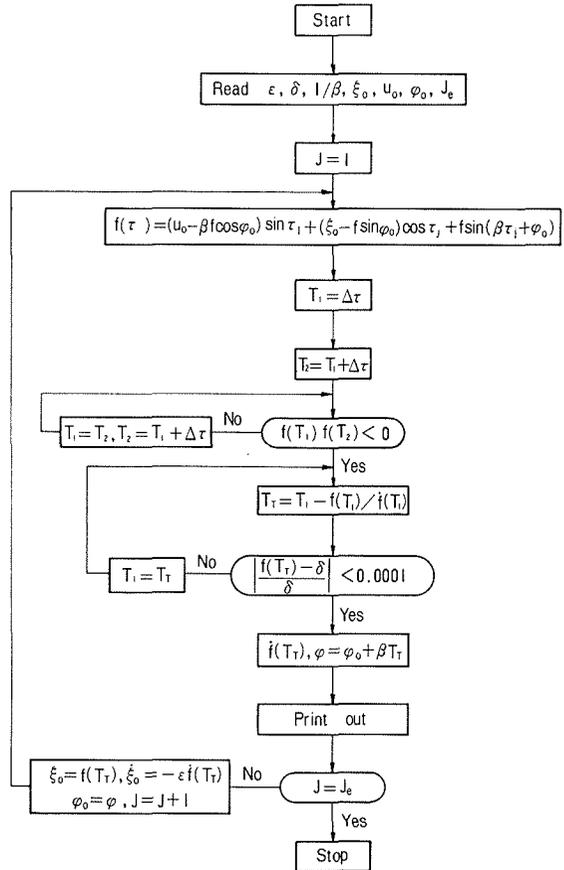


図3 衝突振動シミュレーションのフローチャート

動に到達する可能性がある。過渡振動から周期運動に達したかどうかは条件

$$\left| \frac{z_{j-m} - 1}{z_j} - 1 \right| < \frac{p}{100} \quad \text{および} \quad \left| \frac{u_{j-m} - 1}{u_j} - 1 \right| < \frac{p}{100} \quad (11)$$

で、 $p(\%)$ を適当に設定することによって判定される。運動の1周期間における衝突回数は m を数えることによってきまり、このときの起振力の波数は

$$n = \frac{1}{2\pi} \beta (\tau_j - \tau_{j-m}) \quad (12)$$

より計算される。

図3に以上で論じたシミュレーションの計算フローチャートを示すが、計算機は同じ形の式を繰り返して使用するのに向いているので、プログラムは衝突のたびに時間を0にもどし、その分だけ起振力の位相を進めるように作られている。超越方程式を解くに当っては、方程式が0を切る大体の位置を見つけ、それを出立値としてニュートン法で精密に根を求めたが、ニュートン法による根の収束性はよく、数回の反復で 10^{-4} 程度の精度が得られた。なお100回以上衝突を繰

り返しても前記条件 (11) を満足しないときは、運動は不安定であると考え、計算を打ち切った。

3. 数値計算ならびに考察

以上に述べたシミュレーションによる計算結果を図4以下に示す。

図4は前報⁴⁾の図5(b)でえられた安定な周期運動の存在領域に、今回シミュレーションによって求められた4次以上の高次衝突振動や $3/5, 3/4, \dots$ といった super-sub 衝突振動が存在する点(振動数比とすき間比の値)を記入したものである。衝突振動が $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ と高次になるにしたがってすき間が小さいところで起こる傾向はかわらず、4次以上の高次振動はいっそうすき間

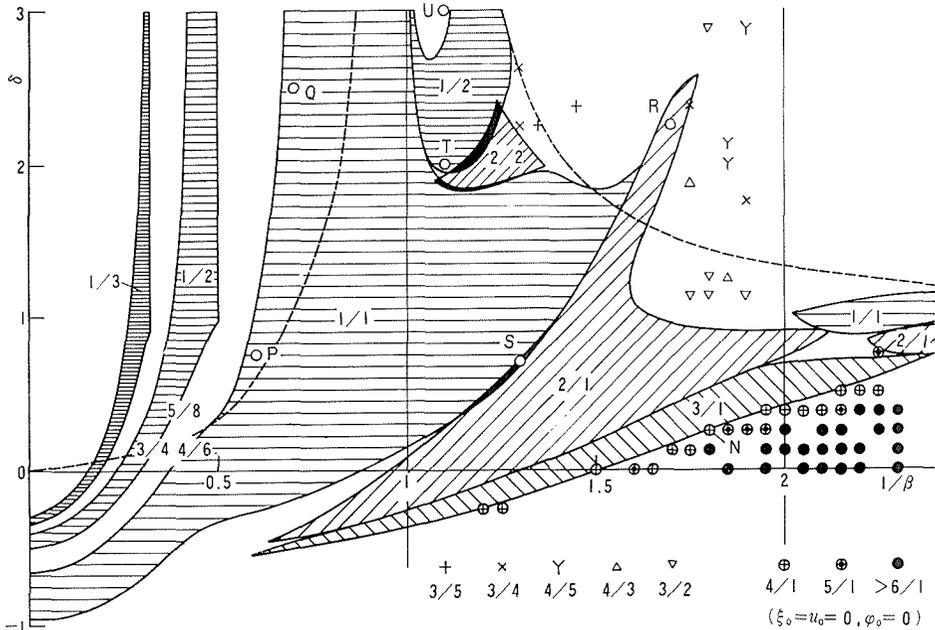


図4 安定な定常振動の存在領域 ($\epsilon=0.5$)

比が小さいごく狭い範囲で起こっている。すき間比が大きく、振動数比が小さい ($1/\beta$ が大きい) 図の右上の領域では、 $3/2, 4/3, \dots$ といった super-sub 振動が起こり、すき間比が小さくて、振動数が大きい ($1/\beta$ が小さい) 左下方の基本振動と $1/2$ 分数振動の領域の間では $(1/2 <) 5/8, 4/6, 3/4 (< 1)$ といった衝突振動が起こっている。

図5に図4のN点 ($1/\beta=1.8, \delta=0.25$) に相当する振動系について、シミュレーションによって得た定常な4次衝突振動の挙動例を示す。この例でみるように1周期中の4回の衝突によって起こる変位や衝突時間間隔はかなり不ぞろいなものであることがわかる。

図6および図7はそれぞれ安定な基本衝突振動が存在する範囲内のP点 ($1/\beta=0.6, \delta=0.75$) とQ点

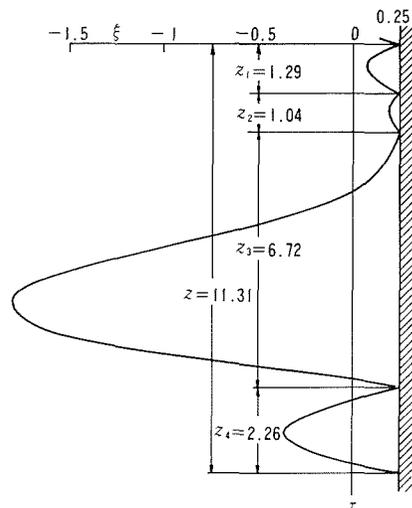


図5 4次衝突振動の例 ($\epsilon=0.5, 1/\beta=1.8, \delta=0.25$)

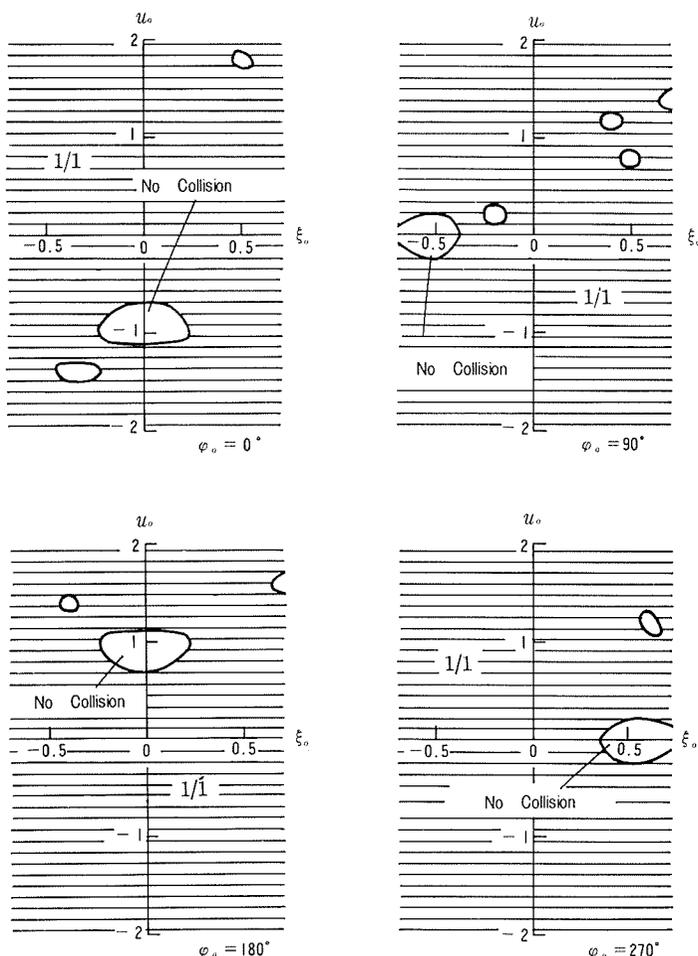


図6 初期条件による基本衝突振動と非衝突振動の領域 ($\epsilon=0.5$, $1/\beta=0.6$, $\delta=0.75$)

($1/\beta=0.7$, $\delta=2.5$) について、物体に種々の初期条件を与えて運動をシミュレートしたものである。白地の範囲内にある初期条件を与えたとき衝突が起きても継続せず、やがて強制力による定常振動となるだけである。一方横線の範囲内の初期条件を与えたとき、なん回か衝突を繰り返したのちやがて定常な基本衝突振動に到達する。図6に比べて、図7では原点 ($\xi_0=u_0=0$) を含む広い初期条件の範囲で衝突振動が生じないのは、P点に比べてQ点に相当する系のすき間が大きいためである。

図4の破線は壁が存在しない場合の定常振動の振幅倍率曲線で、本来ならばこの曲線よりすき間が大きい振動系では定常な衝突振動が起らないのであるが、この曲線の外側のP点やQ点でも適当な初期条件を与えてやれば、定常な衝突振動が起り得るのである。こういったことは安定な分数衝突振動やsuper-sub振動についても同様で、これを起こさせるためには物体に打撃を与えるか、何らかの外乱を与える必要がある。

図8は安定な2次衝突振動が存在する範囲内のR点 ($1/\beta=1.7$, $\delta=2.25$) について定常な振動に到達する初期条件の範囲 (図の斜線) を示す。基本衝突振動の場合と同様、振幅倍率曲線より広いすき間を有する振動系のため初期条件 $\xi_0=u_0=0$ (図の原点) ではこの次数の衝突振動が起りにくいことがわかる。

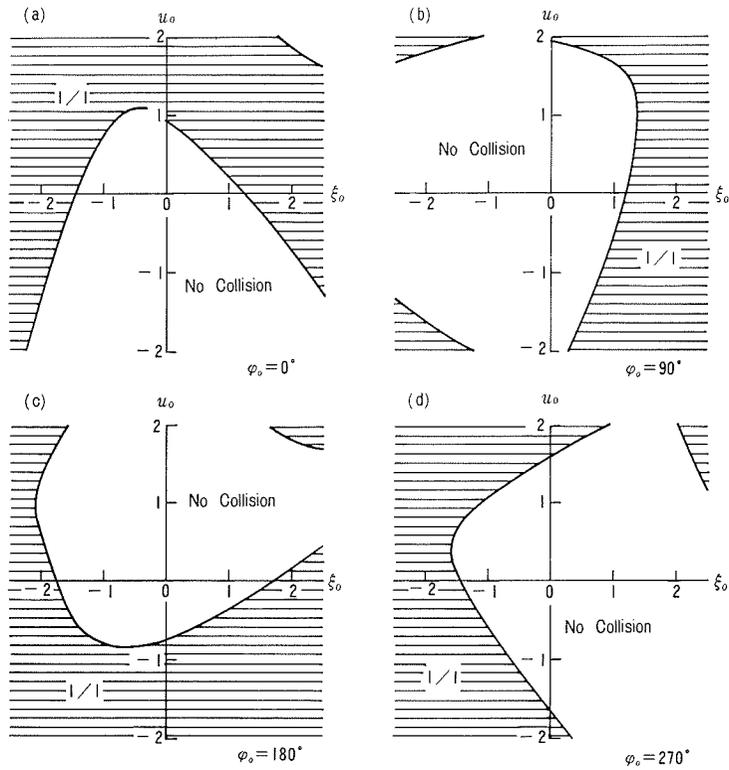


図7 初期条件による基本衝突振動と非衝突振動の領域 ($\epsilon=0.5$, $1/\beta=0.7$, $\delta=2.5$)

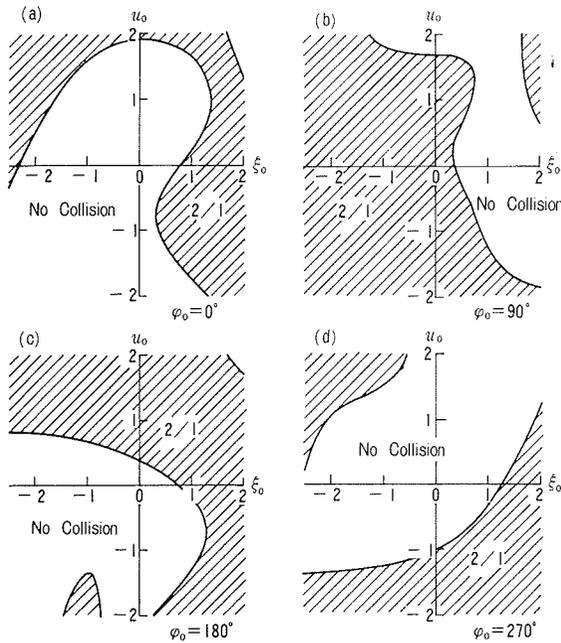


図8 初期条件による2次衝突振動と非衝突振動の領域 ($\epsilon=0.5$, $1/\beta=1.7$, $\delta=2.25$)

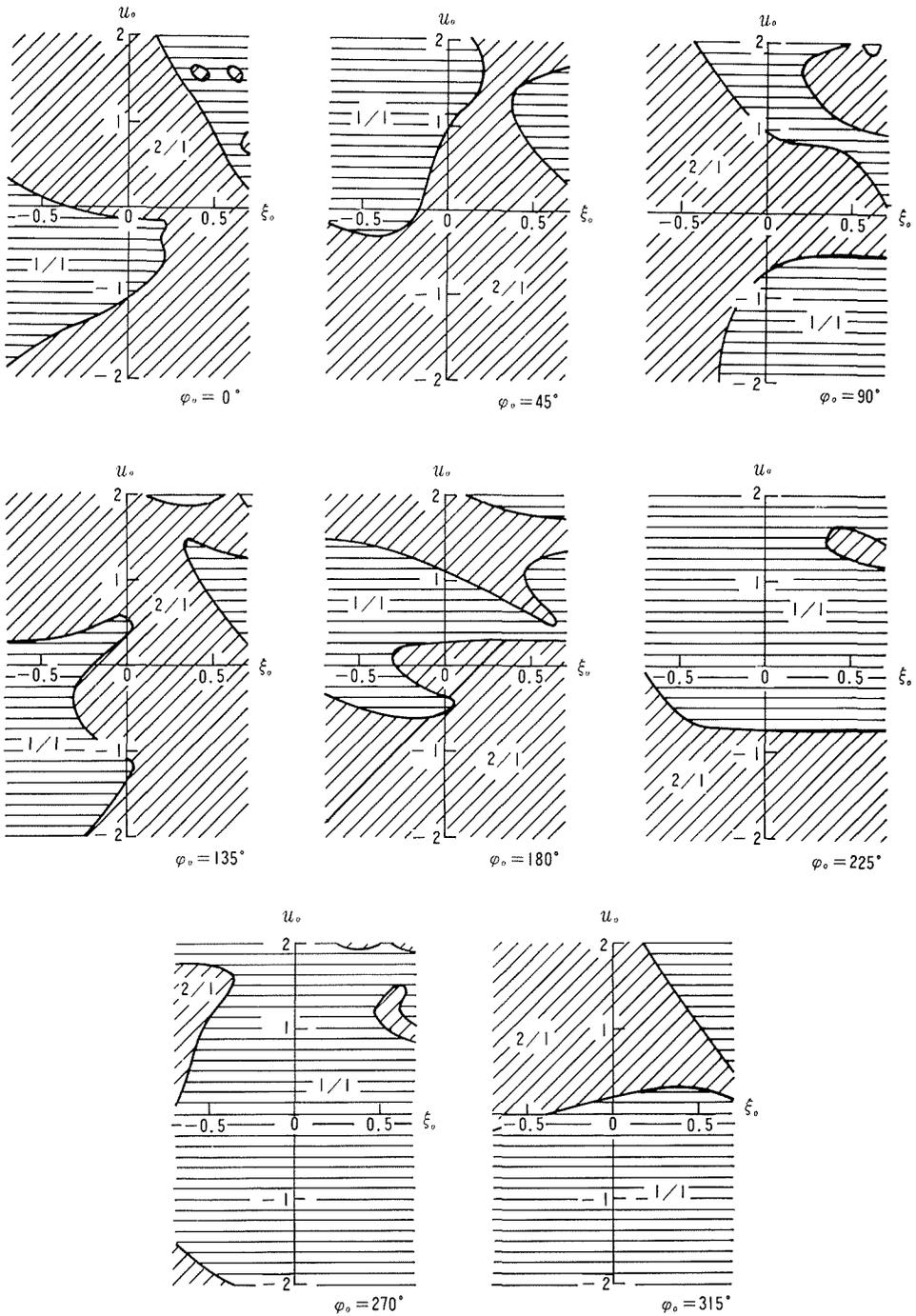


図9 初期条件による基本衝突振動と2次衝突振動の領域 ($\epsilon=0.5$, $1/\beta=1.3$, $\delta=0.75$)

つぎに振幅倍率曲線より小さいすき間をもつ振動系を考える。図4のS点 ($1/\beta=1.3$, $\delta=0.75$) では安定な基本衝突振動と2次衝突振動が共存するが、そのいずれが起るかは図9のように初期条件によってきまり、図の横線の領域の値では基本振動が起るのに対し、斜線の範囲では2次振動が起る。

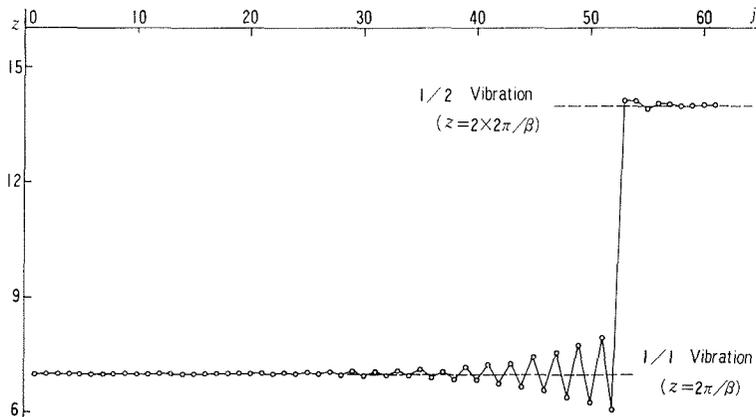


図10 不安定な基本衝突振動から安定な1/2分数衝突振動へ移る例 ($\varepsilon=0.5$, $1/\beta=1.11$, $\delta=2$)

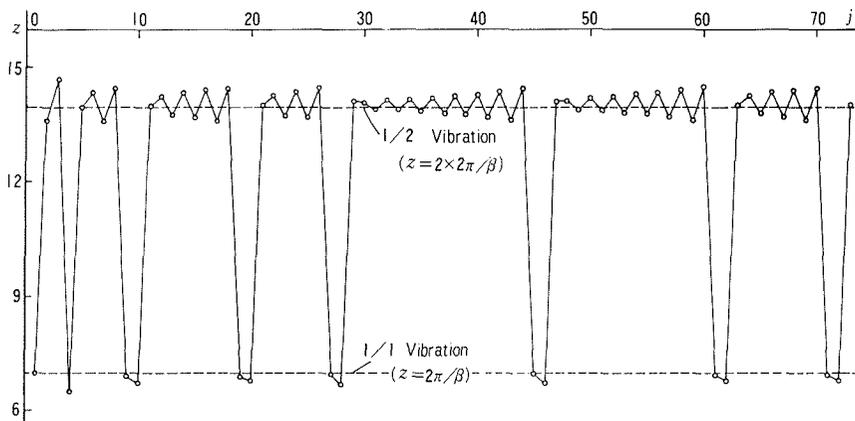


図11 不安定な衝突振動の例 ($\varepsilon=0.5$, $1/\beta=1.11$, $\delta=3$)

図4のT点 ($1/\beta=1.11$, $\delta=2.0$) の振動系では、基本衝突は不安定、1/2分数衝突振動は安定である（前報⁴⁾の図4(a), (c)参照)。図10はこの振動系について、基本衝突振動の条件を満足する変位、速度、位相角を初期条件として、それ以後の運動における衝突回数と衝突時間間隔を示したものである。はじめ基本振動していた物体は、衝突を繰り返すごとに微小なかく乱（シミュレーションでは計算誤差）が増大し（不安定）、かく乱がある大きさに達したとき突然1/2分数衝突振動へ移行して、以後その運動に落ち付く。

図11は基本衝突振動や2/1, 1/2, 2/2, ... 次といった比較的簡単な定常衝突振動が生じない図4のU点 ($1/\beta=1.11$, $\delta=3.0$) に当る振動系の運動を調べたものである。すき間が振幅倍率曲線より小さいため必ず衝突振動が発生するが、基本衝突振動や1/2分数衝突振動に類似した振動が発生するだけで、時間が経過しても一つのきまった定常振動に落ち付かない。

以上のように定常な非衝突振動の振幅倍率よりすき間が小さい振動系では、どのような初期条件から出発してもなんらかの定常衝突振動に到達するが、これよりすき間が大きくなると初期条件によっては定常衝突振動にいたらない場合が多い。図4は $1/\beta=0.05$, $\delta=0.125$ 刻みのパラメータの点について数種の初期条件でシミュレートした結果得たものが記載されており、空白の部分は初期条件を多数かえてシミュレートすれば逐次埋められる可能性はある。 $\delta < 0$ の領域では、物体が壁に固着しがちで、シミュレーションがむづかしく、定常的な振動を弁別しにくかった。

4. 結 論

(1) 衝突振動に関してデジタル計算機によるシミュレーションの方法が提唱され、これによって高次、分数、super-sub 振動の存在とこれらの初期条件依存性が確かめられた。

(2) 4 次以上の定常な高次振動も現実に存在するが、次数の高いものほどすき間が小さい振動系のごく狭い範囲に限られてくる。

(3) 複数の安定な衝突振動が起こり得る振動系では、そのうちどのパターンの振動が起こるかはすべて初期条件に依存する。

(4) 定常な非衝突振動の振幅よりすき間が小さい振動系では、どのような初期条件から物体が運動を始めても解析的に予測された定常振動が必ず発生するか、簡単なパターンの定常振動が予測されない場合でもなんらかの衝突振動が起こるのに対し、この振幅値よりすき間が大きい振動系では初期条件によっては定常衝突振動が起こらないことがある。

参 考 文 献

- 1) 井上順吉, 宮浦すが, 西山晟人: 機械学会論文集, 33-250 (昭 42), 915.
- 2) D. L. Sikarski and B. Paul: Trans. ASME, Ser. B, 91-4 (1969), 931.
- 3) 川井良次, 小寺 忠: 機械学会論文集, 35-274 (昭 44), 1233.
- 4) 深谷健一, 入江敏博: 北大工学研部究報告, 58 (昭 45), 75.
- 5) Hayashi: Nonlinear oscillations in physical systems (1964), McGraw-Hill Books Co.
- 6) 深谷健一, 入江敏博: 機械学会北海道支部講演論文集, 702-1 (昭 45), 77.

本計算の実施に当って北海道大学大型計算機センターを利用させていただいたことを付記して厚く謝意を表す。