HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	平行平板間一様流れの非定常複合伝熱問題
Author(s)	関, 信弘; 鴻野, 弘之
Citation	北海道大學工學部研究報告, 63, 39-45
Issue Date	1972-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41077
Type	departmental bulletin paper
File Information	63_39-46.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

平行平板間一様流れの非定常複合伝熱問題

関　信弘*　鴻野弘之*

(昭和46年8月30日受理)

An Unsteady Conjugated Heat Transfer Problem to slug Flow in a parallel Plate Channel

Nobuhiro Seki　Hiroyuki Kōno

Abstract

An unsteady conjugated heat transfer problem to slug flow in a parallel plate channel is analyzed in this report to apply to estimation of heat performance of regenerative heat exchangers. In this analysis the influence of wall temperature variations which depended upon heat conduction in plates is considered.

From the above result, temperature distributions of plates and fluid are obtained. Furthermore this analytical result is compared with Nusselt's solution which regarded the physical model as a quasi steady problem.

1. まえがき

固体内の熱伝導効果を考慮した固体壁面と流体との間の対流伝熱問題は，一般に複合問題と言われその解析が複雑である。これまでのこの種問題の解析としては，T. L. Perelman[1]，E. J. Davis および W. N. Gill[2] などのものがあるが，そのいずれも流体と固体内の温度変化を定常状態で扱っている。従って性質上非定常伝熱問題である蓄熱式熱交換器にそれらの解を適用することは困難である。そこで筆者らは平行二平面間の非定常伝熱問題を検討する目的のもとに，本報告では流れは一様流 (slug flow)，平板側熱伝導は流れと垂直方向のみを考えることとして，平板内熱移動による壁面の温度変動の影響を考慮した場合の解析を行なった。解析結果として平板および流体の温度分布を求め，更に本解析と同一モデルを準定常問題として扱った W. Nusselt[3] の解と比較したのでその結果を報告する。

2. 解　　析

2-1 記　　号

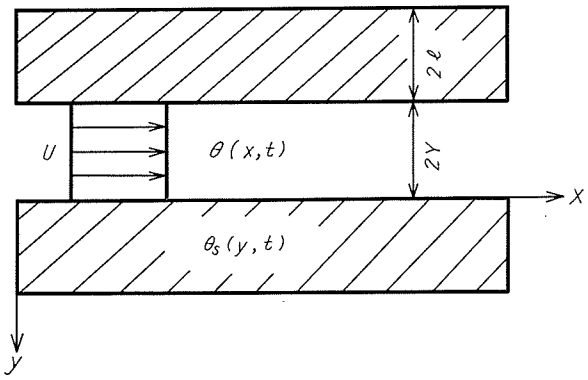
θ:	流体温度	[°C]
θ_s:	平板温度	[°C]
t:	時　間	[h]
x:	流体流れ方向距離	[m]
y:	流体流れに垂直方向距離	[m]

* 機械工学第二学科　伝熱工学講座

κ_s:	平板温度伝播率	[m²/h]
λ:	平板熱伝導率	[kcal/m·h·°C]
α:	熱 伝 達 率	[kcal/m²·h·°C]
U:	一 様 流 速	[m/h]
$2l$:	平 板 厚 さ	[m]
L:	平 板 長 さ	[m]
$2Y$:	平 板 間 隔	[m]
W:	流 体 水 当 量	[kcal/m·h°·C]

2-2 基 礎 式

解析のモデルは図-1に示すごとく平行二平面間の一様流速 U なる Slug flow に対する非定常伝熱問題である。 ここで W. Nusselt の解にならって平板側に対しては， x 方向の熱伝導効果を無視して y 方向のみの非定常温度変動を考慮することにすれば， 平板内熱伝導の基礎式は Fourier の方程式より次のごとくなる。



図—1

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y^2} \tag{1}$$

ただし解析に便利とするため流体の入口温度 θ_0 だけ平板温度をずらして $\Theta_s=\theta_0-\theta_s$ とした。 基礎方程式(1)に対する初期および境界条件としては次のごとくなる。

$$t=0\,;\ \Theta_s=\theta_0-f(y) \tag{2}$$

$$y=l\,;\ \partial\Theta_s/\partial y=0 \tag{3}$$

$$y=0\,;\ \alpha\int_0^L(\Theta-\Theta_s)\,dx=-\lambda\int_0^L\frac{\partial\Theta_s}{\partial y}\,dx \tag{4}$$

ここで境界条件 (3) 式は， 平板の両側を同一状態で流体が流れるため板厚の中央部で断熱条件が満足されることを示す。

次に流体側エネルギー式としては， W. Nusselt の導いたものに非定常項を加えて

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}+U\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{U\alpha}{W}(\Theta-\Theta_{sw})=0 \tag{5}$$

ただし $\Theta=\theta_0-\theta$ とした。従って流体入口境界条件は

$$x=0\,;\ \Theta=0 \tag{6}$$

2-3 解 析 結 果

平板側エネルギー式(1)を変数分離法で解く。即ち Θ_s を時間 t のみの函数 $T(t)$ と位置 y のみの函数 $Y(y)$ との積として

$$\Theta_s = T(t)\,Y(y) \tag{7}$$

とおく。これを(1)式に代入すると

$$\frac{1}{\kappa_s T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{8}$$

上式の左辺は t のみの函数，右辺は y のみの函数であるから，両者が等しいためには両辺が定数に一致する必要がある。これを $-p^2$ とおくと(1)式の特解として

$$\Theta_s = \beta \exp(-p^2\kappa_s t)\sin(py+\gamma) \tag{9}$$

となる。上式より平板壁面温度は

$$\Theta_{sw} = \beta \sin\gamma \cdot \exp(-p^2\kappa_s t) \tag{10}$$

これを流体側エネルギー式(5)に代入すると次の様になる

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + U\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{U\alpha}{W}\Theta = \frac{U\alpha}{W}\beta\sin\gamma\cdot\exp(-p^2\kappa_s t) \tag{11}$$

ここで上式の右辺に着目して

$$\Theta = g(x)\exp(-p^2\kappa_s t) \tag{12}$$

と考え，これを(11)式に代入し整理すると

$$\frac{dg}{dx} - Ag = \frac{\alpha}{W}\beta\sin\gamma \tag{13}$$

となる。ただし A は次のごとくする。

$$A = \frac{p^2\kappa_s}{U} - \frac{\alpha}{W} \tag{14}$$

(13)式を解くのに(6), (12)式よりの境界条件 $g(0)=0$ を用いると

$$g(x) = \frac{\alpha\beta}{WA}\sin\gamma\cdot\left\{\exp(Ax)-1\right\} \tag{15}$$

従って(12)式より特解として

$$\Theta = \frac{\alpha\beta}{WA}\sin\gamma\cdot\left\{\exp(Ax)-1\right\}\exp(-p^2\kappa_s t) \tag{16}$$

(9), (16)式は特解であるので，これらの式の未定定数を p_i, β_i, γ_i として決定することにする。境界条件(4)式を用いると

$$\frac{\alpha}{WA_i}\sin\gamma_i\cdot\left\{\frac{\exp(A_iL)}{A_i} - \frac{1}{A_i} - L\right\} = L\sin\gamma_i - \frac{\lambda L p_i}{\alpha}\cos\gamma_i \tag{17}$$

ここで $\exp(A_iL)=1+A_iL+(A_i^2L^2)/2$ とすると

$$\frac{p_i}{\tan\gamma_i} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(1-\frac{\alpha L}{2W}\right) \tag{18}$$

断熱条件(3)式を用いると

$$p_i l + \gamma_i = \frac{2i+1}{2}\pi \qquad (i=0,1,2,\cdots) \tag{19}$$

上式より

$$\tan \gamma_i \cdot \tan p_i l = 1 \tag{20}$$

(18), (20) 式より固有値 p_i を決定する式として次式を得る。

$$p_i \tan p_i l = \frac{\alpha}{\lambda}\left(1-\frac{\alpha L}{2W}\right) \tag{21}$$

(9) 式は特解であるから書き直して

$$\Theta_s = \sum_i \beta_i \exp(-p_i^2 \kappa_s t) \sin(p_i y+\gamma_i) \tag{22}$$

次に β_i を決定するため (22) 式に初期条件 (2) 式を用いると

$$\theta_0 - f(y) = \sum_i \beta_i \sin(p_i y+\gamma_i) \tag{23}$$

上式より β_i を決めるため直交性を調べる。

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_0^l \sin(p_i y+\gamma_i)\sin(p_j y+\gamma_j)\,dy \\ &= \frac{\cos p_i l \cos p_j l \cdot (p_i \tan p_i l - p_j \tan p_j l)}{p_i^2 - p_j^2} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ここで (21) 式を用いると $i \neq j$ のときは直交性が成立して $I=0$。$i=j$ のときは

$$I = \frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2p_i}\sin 2\gamma_i\right) \tag{25}$$

従って (23) 式より β_i が次のごとくなる。

$$\beta_i = \frac{4p_i}{2p_i l+\sin 2\gamma_i}\int_0^l \left\{\theta_0 - f(y)\right\}\sin(p_i y+\gamma_i)\,dy \tag{26}$$

最終的に特解である (9), (16) 式を基にし，γ_i を消去して平板および流体温度を次のごとく求める。

$$\theta_s = \theta_0 - \sum_i \delta_i \exp(-p_i^2 \kappa_s t)\cos(p_i y - p_i l) \tag{27}$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{\alpha}{W}\sum_i \frac{\delta_i \cos p_i l}{A_i}\left\{\exp(A_i x)-1\right\}\exp(-p_i^2 \kappa_s t) \tag{28}$$

ただし

$$\delta_i = \frac{4p_i}{2p_i l+\sin 2p_i l}\int_0^l \left\{\theta_0 - f(y)\right\}\cos(p_i y - p_i l)\,dy \tag{29}$$

3. 数値計算例および考察

平板の初期温度 $f(y)$ を一定値 θ_{s0} とし，解析結果の (27), (28) 式を用いて数値計算を行なった例を図-2, 図-3 および表-2, 表-3, 表-4 に示す。ここでこれらの数値計算は表-1 に示すごとく平板材質，流体種類，平板厚さ l，平板初期温度 θ_{s0}，流体入口温度 θ_0 を組合わせて 5 種類の場合について行なった。またそれぞれの場合を通じて平板長さは 1 m，平板間隔は 1 cm，一様流速は 5 cm/s とした。流速をこのように低くしたのは，流体のエネルギー式 (5) で非定常項である第 1 項が他の項に比して大きくなる

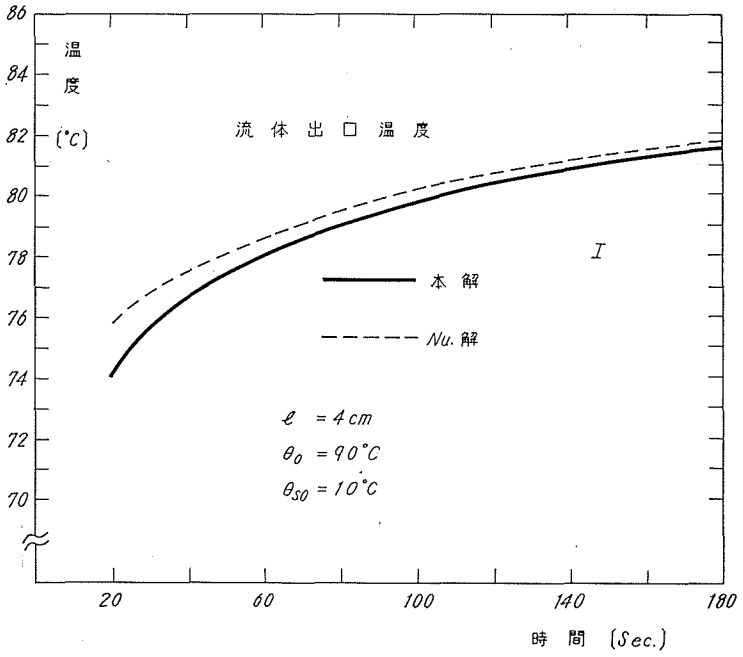
表—1 数値計算種別表

種 別	平 板	流体	l	θ_0	θ_{s0}
I	N_i 鋼	水	4 cm	90°C	10°C
II	N_i 鋼	水	3	90	10
III	鋼	水	4	90	10
IV	鋼	油	4	60	20
V	鋼	水	4	60	20

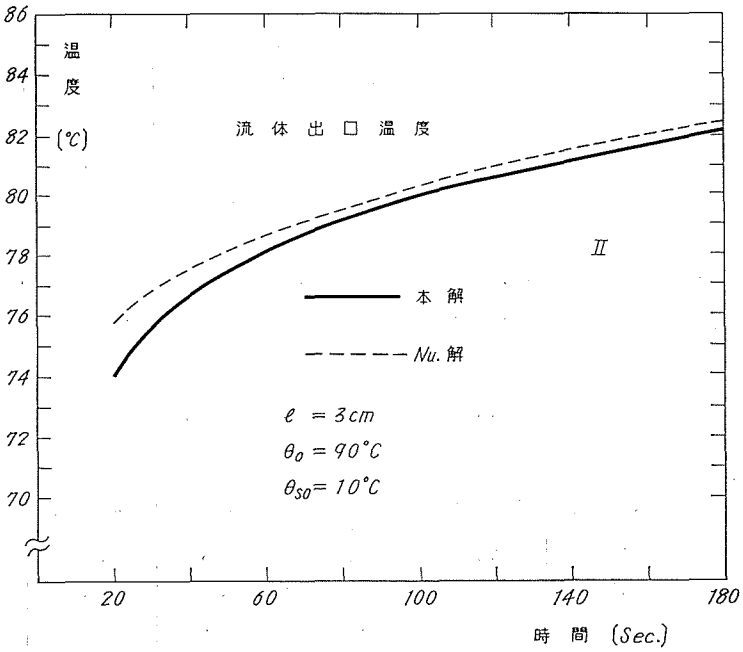
$U=5$ cm/s, $L=1$ m, $Y=1$ cm

ようにして，この項を無視した W. Nusselt の解と比較しやすくするためである。また同じ理由で流体としては熱容量の大きなものとして，水，油などを選んで数値計算を行なった。

図-2 と図-3 は，それぞれ種別 I, II の場合について W. Nusselt の解と比較して，流体出口温度の時間に対する経過を示したものである。いずれの場合も W. Nusselt の解より本解の方が



図—2



図—3

小さくなっており，また両者とも時間経過が大となるにしたがって大きくなる傾向を示している。この傾向は流体温度が平板温度より高い場合について数値計算しているのであるから，時間の経過とともに平板の奪う熱量が小さくなることにより，その原因が説明されると思われる。また W. Nusselt の解と本解との差は，経過時間が小さい時程大きくなっている。これは，経過時間の僅かな時程，流体と平板との間の伝熱特性が非定常性を強く示すために，流体のエネルギー式(5)の第一項である非定常項の影響が大となるためと考えられる。

次に表-2は種別 III, IV, V の各場合に対して時間経過を 1, 2, 3 分とし，W. Nusselt 解と本解との流体出口温度を数値的に示したものである。また同様に平板壁面温度に対して示した表-3を見て，種別IV と V との場合を比較してみる。両者の差は表-1に示すごとく流体の種類が異なることであり，IV は油，V は水の場合である。Nusselt 解との差を考えると IV の方は全く同じであり，V の方は僅かではあるが本解との差がある。これは油よりも水の方が熱を貯える能力が大きいため流体エネルギー式(5)の非定常項が効いているためと考えられる。また表-3を見ると平板壁面温度は，本解の方が Nusslet の解より小さい値になっている。これは，流体エネルギー式 (5) の非定常項分だけ流体が一時熱を貯えていることになるため，それだけ平板側に移る熱量が少なくなることによるものと考えてよいであろう。

表—2 流体出口温度 [°C]

時間 [min.]	III		IV		V	
	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解
1	74.7	75.2	52.9	53.0	52.3	52.6
2	77.4	77.8	53.4	53.5	53.7	53.9
3	79.5	80.0	53.8	53.9	54.8	55.0

表—3 平板壁面温度 [°C]

時間 [min.]	III		IV		V	
	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解
1	33.2	33.5	24.3	24.3	31.6	31.7
2	43.0	43.4	26.6	26.6	36.5	36.7
3	51·2	51.6	28.7	28.7	40.6	40.8

次に平板厚さの変化による流体出口温度の相違を示したのが表-4である。平板材質は N_i 鋼の流体種類は水とし，平板厚さは 1 cm, 3 cm, 5 cm の各場合を示している。Nusselt 解と本解との差は，平板厚さが薄い程大となることが，この表の傾向として知られる。

表—4 l による流体出口温度 [°C] の変化

時間 [sec.]	l=1 cm		l=3 cm		l=5 cm	
	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解	本解	Nu. 解
20	74.1	76.2	74.0	75.8	74.3	75.9
40	77.7	79.2	76.7	77.6	77.0	77.8
60	80.3	81.5	78.1	78.7	78.4	78.9

N_i 鋼—水，U=5 cm/s, L=1 m, Y=1 cm, θ_0=90°C, θ_{s0}=10°C

4. むすび

対流伝熱問題を扱うに際しての，平板内の熱伝導効果を考慮した場合の問題を，筆者らは非定常状態で考察し，その結果を述べた。そして流体エネルギー式の非定常項を無視したNusseltの準定常解と比較し，(1) 平板温度伝播率が小さいこと。(2) 平板厚さが薄いこと。(3) 流体流速が小さいこと。(4) 流体熱容量が大きいこと，の場合には，流体の温度分布に対するこの非定常項の影響が大きいことが判った。

尚この解析結果は，蓄熱体厚さの厚い蓄熱式熱交換器の熱的性能評価に応用できるものと考えられる。

文献

1) T. L. Perelman: Int. J. Heat Mass Transfer, **3**-4 (1961), p. 293.
2) E. J. Davis and W. N. Gill: Int. J. Heat Mass Transfer, 13-3 (1970), p. 459.
3) W. Nusselt: VDI-Z, **71**-3 (1927), p. 85.