



Title	パラメトリック後進波結合の特性
Author(s)	桜庭, 一郎; Sakuraba, Ichiro
Citation	北海道大學工學部研究報告, 63, 65-71
Issue Date	1972-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41080
Type	departmental bulletin paper
File Information	63_65-72.pdf



パラメトリック後進波結合の特性*

桜庭 一郎**

(昭和46年8月16日受理)

General Properties of Parametric Backward-Wave Interactions

Ichiro SAKURABA

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering
Hokkaido University, Sapporo, 060, Japan

(Received August 16, 1971)

Abstract

This paper deals with a coupled-mode analysis of parametric backward-wave interactions in the time domain.

The parametric backward-wave interaction consists of two kinds of the $\omega\beta$ diagram. In the first case, the interaction can be described by the coupled-mode theory between the forward-traveling wave and the backward-traveling wave. The group and phase velocities of the backward-traveling wave are in the same direction and the two coupled waves have opposite group velocities. In the second case, the phase velocities of two coupled waves are in the same direction, but they have opposite group velocities. The stimulated Brillouin scattering of an intense laser beam, in which a forward acoustic wave and a backward-traveling optical wave are produced, is given to be describable as a parametric backwardwave interaction. This investigation was supported in part by a Research Grant from the Japanese Educational Ministry, No. 85084 of 1971.

目 次

Abstract	65
1. 緒 言	65
2. モード結合理論	66
3. 信号波が負エネルギーを運ぶ場合	69
4. 応 用 例	70
5. 結 言	71
参 考 文 献	71

1. 緒 言

非直線素子としてフェライトを用いた進行波型パラメトリック増幅作用について、等価伝送線路による解析が Tien¹⁾ によって与えられ、信号波とアイドラ波のいずれかが後進波の場合、

* 本研究の一部は昭和46年度文部省科学研究費(第85084号)によった。

** 電子工学科 電子物理工学講座

すなわちその群速度と位相速度とが反対の向きをもつ波の増幅特性を求めた。さらに Hsu²⁾ は電子同調範囲を広げる方法として、群速度と位相速度とがともに同じ向きの波が互に反対方向に進む後進波結合を論じた。Barnes³⁾ は四種類の分布結合パラメトリック作用についてモード結合理論を周波数域で説明した。

最近ジャイアント・レーザ・パルスにより照射された水晶やサファイヤにおける光弾性の不安定現象が観測され、誘導ブリルアン散乱として説明し得ることが Chiao, Townes および Stoicheff らによって示された⁴⁾。これはまたラマン・レーザの一種であり、Kroll が前進波作用と後進波結合の立ち上りを論じた⁵⁾。ついで Bobroff は流体におけるフォトンとフォノンがジャイアント・パルスによりパラメトリック結合する場合のモード結合理論を与えた⁶⁾。

以上のパラメトリック結合の分散特性を整理すると Fig. 1 と Fig. 2 に分類し得る。Fig. 1 は Hsu, Kroll さらに Bobroff の解析したパラメトリック後進波結合であり、モード a_1 とモード a_2 はともに同じ性質 (各波の群速度と位相速度は同じ向き) であり、互に反対方向に進む場合である。Fig. 2 は Tien の考察した等価回路の分散特性で、モード a_1 は前進波、モード a_2 は群速度と位相速度とが反対方向の後進波であり、これらがポンプ波によりパラメトリック結合する。このような相互作用を統一して論じたモード結合理論は未だ与えられていない^{7),8),9),10)}。

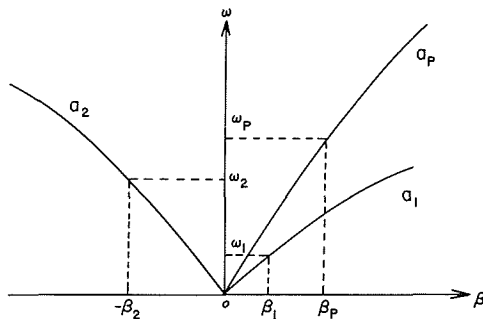


Fig. 1. The $\omega\beta$ diagram of parametric backward-traveling coupling. The group and phase velocities of the mode a_1 are in the z -direction and both velocities of the mode a_2 are in the negative z -direction.

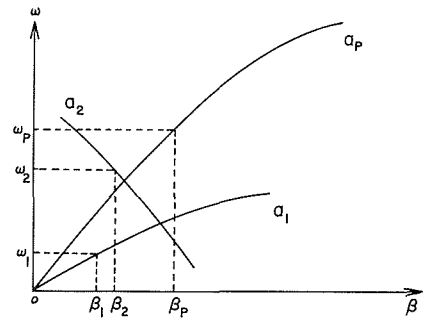


Fig. 2. The $\omega\beta$ diagram of parametric backward-wave coupling. The phase velocities of the a_1 and a_2 modes are in the z -direction, but the group velocities of two modes are in opposite directions.

本論文では Fig. 1 と Fig. 2 の両分散特性に関しモード結合理論を示し、後進波増幅利得や後進波発振の条件を時間域で考察し、非直線光学発振および増幅デバイスの動作特性の検討に有効な結果を得ている。

2. モード結合理論

Fig. 1 と Fig. 2 に示される分散特性において、分布結合された三周波数のパラメトリック後進波相互作用における周波数と位相定数の関係をそれぞれ

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2 \quad (1)$$

$$\beta_p = \beta_1 \mp \beta_2 \pm \Delta\beta \quad (2)$$

とする。ここで ω_p , ω_1 および ω_2 は、ポンプ波、信号波さらにアイドラ後進波の周波数であり、 β_p , β_1 および β_2 は上記各波の結合しない場合の位相定数である。 $\Delta\beta$ は三波間の位相整合のずれ

を示す。式(2)の上符号は Fig. 1 の, 下符号は Fig. 2 の関係を示し, 系は無損失と仮定した。

つぎに c_{12} を後進波であるアイドラ波のモード複素振幅 $a_2(z, t)$ より, 信号波のモード複素振幅 $a_1(z, t)$ への単位長あたりの結合係数とし, c_{21} を $a_1(z, t)$ より $a_2(z, t)$ への単位長あたりの結合係数とすれば二つのモードの結合方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_1(z, t)}{\partial z} &= -j\beta_1 a_1(z, t) + c_{21} e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} a_2^*(z, t), \\ \frac{\partial a_2^*(z, t)}{\partial z} &= \mp j\beta_2 a_2^*(z, t) + c_{21} e^{-j(\omega_1 t - \beta_1 z)} a_1(z, t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。つぎに信号波の電力流を $P_1(z)$, アイドラ後進波の電力流を $P_2(z)$ とすれば Manley-Rowe の関係は

$$\frac{1}{\omega_1} \frac{dP_1(z)}{dz} = \frac{1}{\omega_2} \frac{dP_2(z)}{dz} \quad (4)$$

で与えられる。いま各モードは正のエネルギーを運ぶとし, 上式をモード複素振幅 $a_1(z, t)$ と $a_2(z, t)$ で示すと,

$$\frac{1}{\omega_1} \frac{d|a_1(z, t)|^2}{dz} = -\frac{1}{\omega_2} \frac{d|a_2(z, t)|^2}{dz} \quad (5)$$

となる。上式右辺の負符号は, モード a_2 がモード a_1 と反対方向にエネルギーを運ぶことを示す。式(5)へ式(3)を代入すると, 結合係数 c_{12} と c_{21} との関係

$$c_{12}^* = -\frac{\omega_1}{\omega_2} c_{21} \quad (6)$$

が得られる。つぎにモード複素振幅 $a_1(z, t)$ と $a_2^*(z, t)$ を

$$\left. \begin{aligned} a_1(z, t) &= A_1(z) \exp j \left[\omega_1 t - \left(\beta_1 \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) z \right], \\ a_2^*(z, t) &= A_2^*(z) \exp(-j) \left[\omega_2 t \pm \left(\beta_2 + \frac{1}{2} \Delta\beta \right) z \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおき式(3)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} \pm j \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_1(z) &= c_{12} A_2^*(z), \\ \left(\frac{d}{dz} \mp j \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_2^*(z) &= c_{21} A_1(z). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

さらに $A_1(z)$ と $A_2^*(z)$ とが $\exp \tilde{\gamma} z$ で変化するとすれば

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \pm j s, \\ s &= \left[|c_{12}|^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \left(\frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

したがって a と b とを任意定数として

$$\left. \begin{aligned} a_1(z, t) &= e^{j[\omega_1 t - (\beta_1 \mp \frac{1}{2} \Delta\beta) z]} [a e^{j s z} + b e^{-j s z}], \\ a_2^*(z, t) &= e^{-j[\omega_2 t \pm (\beta_2 + \frac{1}{2} \Delta\beta) z]} (j/c_{12}) \left[\left(s \pm \frac{1}{2} \Delta\beta \right) a e^{j s z} - \left(s \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) b e^{-j s z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。いま結合領域の長さを L とし始端における信号波のモード複素振幅 $a_1(0, t)$, 終端のアイドラ後進波のモード複素振幅 $a_2^*(L, t)$ を

$$\left. \begin{aligned} a_1(0, t) &= A_1 \exp j\omega_1 t, \\ a_2^*(L, t) &= A_2^* \exp -j \left[\omega_2 t \pm \left(\beta_2 + \frac{1}{2} \Delta\beta \right) L \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} a_1(z, t) &= \frac{\exp j \left[\omega_1 t - \left(\beta_1 \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) z \right]}{2s \cos sL \pm j \Delta\beta \sin sL} \\ &\times \left[\left\{ -j c_{12} A_2^* + \left(s \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_1 e^{-j s L} \right\} e^{+j s z} + \left\{ j c_{12} A_2^* + \left(s \pm \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_1 e^{+j s L} \right\} e^{-j s z} \right], \\ a_2^*(z, t) &= \frac{j \exp \left[-j \left\{ \omega_2 t \pm \left(\beta_2 + \frac{1}{2} \Delta\beta \right) z \right\} \right]}{c_{12} [2s \cos sL \pm j \Delta\beta \sin \beta L]} \\ &\times \left[\left(s \pm \frac{1}{2} \Delta\beta \right) \left\{ -j c_{12} A_2^* + \left(s \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_1 e^{-j s L} \right\} e^{+j s z} \right. \\ &\quad \left. - \left(s \mp \frac{1}{2} \Delta\beta \right) \left\{ j c_{12} A_2^* + \left(s \pm \frac{1}{2} \Delta\beta \right) A_1 e^{j s L} \right\} e^{-j s z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

いま $z=0$ で $a_1(0, t)$ のみがあるとすれば,

$$\left. \begin{aligned} a_1(0, t) &= A_{10} \exp(-j\omega_1 t), \\ a_2^*(L, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} a_1(z, t) &= \frac{2s \cos s(L-z) \pm j \Delta\beta \sin s(L-z)}{2s \cos sL \pm j \Delta\beta \sin sL} A_{10} e^{j[\omega_1 t - (\beta_1 \mp \frac{1}{2} \Delta\beta)z]}, \\ a_2^*(z, t) &= \frac{[2s^2 - (\Delta\beta)^2/2] (A_{10}/c_{12})}{2s \cos sL \pm j \Delta\beta \sin sL} e^{-j[\omega_2 t \pm (\beta_2 + \frac{1}{2} \Delta\beta)z]}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となり各モードの運ぶ電力は

$$\left. \begin{aligned} P_1(z) &= P_1(0) \frac{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 s(L-z) + (\Delta\beta)^2}{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 sL + (\Delta\beta)^2} \\ P_2(z) &= -P_1(0) \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \sin^2 s(L-z)}{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 sL + (\Delta\beta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。ここで $P_1(0) = |A_{10}|^2$ とおいた。一例として $KL=1.0$ の場合電力流の分布を Fig. 3 a と Fig. 3 b に示した。ここで $K = |c_{12}|^2 \omega_2/\omega_1$ である。位相整合のずれ $\Delta\beta$ が増すとポンプ波より受け

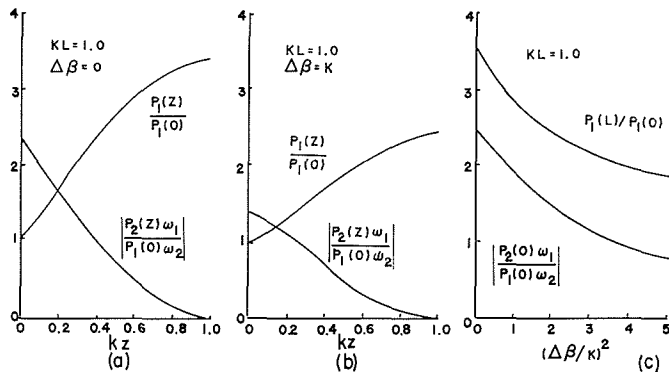


Fig. 3. Power relations in the case where $a_1(0, t) = A_{10} \exp j\omega_1 t$ and $a_2^*(L, t) = 0$. (a) $\Delta\beta = 0$, (b) $\Delta\beta = K$ and (c) power ratio vs. degree of asynchronism.

る電流は少なくなり、各波の利得が低下する。 $\Delta\beta$ の利得に及ぼす影響を Fig. 3 c に示した。位相のずれが増すと結合が弱くなり、信号波の出力 $P_1(L)$ は入力 $P_1(0)$ に接近し、アイドラ波の出力 $P_2(0)$ は零に近づく。

つぎに終端に $a_2^*(L, t)$ のみがあるとすれば、

$$\left. \begin{aligned} a_1(0, t) &= 0, \\ a_2^*(L, t) &= A_{20}^* e^{-j[\omega_2 t \pm (\beta_2 + \frac{1}{2}\Delta\beta)L]} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

において

$$\left. \begin{aligned} a_1(z, t) &= \frac{2c_{12}A_{20}^* \sin sz}{2s \cos sL \pm j\Delta\beta \sin sL} e^{j[\omega_1 t - (\beta_1 \mp \frac{1}{2}\Delta\beta)z]} \\ a_2^*(z, t) &= \frac{2s \cos sz \pm j\Delta\beta \sin sz}{2s \cos sL \pm j\Delta\beta \sin sL} A_{20}^* e^{-j[\omega_2 t \pm (\beta_2 + \frac{1}{2}\Delta\beta)z]} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となり各モードの電流は

$$\left. \begin{aligned} P_1(z) &= P_2(L) \frac{4|c_{12}|^2 \sin^2 sz}{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 sL + (\Delta\beta)^2} \\ P_2(z) &= -P_2(L) \frac{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 sz + (\Delta\beta)^2}{4|c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1) \cos^2 sL + (\Delta\beta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。ここで $P_2(L) = |A_{20}|^2$ とおいた。

$KL=1.0$ のときの電流の分布と $\Delta\beta$ の影響を Fig. 4 a, b および c に示した。後進波の発振条件は、式(14)または式(17)より明らかのように

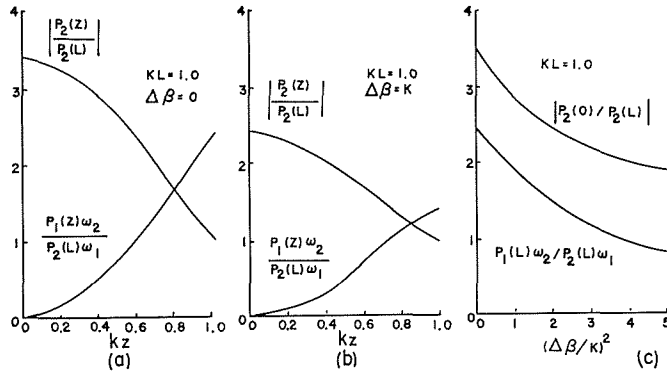


Fig. 4. Power relations in the case in which $a_1(0, t)=0$ and $a_2^* = A_{20}^* \exp(-j\omega t)$. (a) $\Delta\beta=0$, (b) $\Delta\beta=K$ and (c) power ratio vs. degree of asynchronism.

$$\Delta\beta = \mp\beta_1 + \beta_2 \mp\beta_p = 0 \quad (19)$$

および

$$sL = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

となり、発振周波数と結合域の長ささらに必要なポンプ電力を求め得る^{6), 8)}。

3. 信号波が負エネルギーを運ぶ場合

前進波モード a_1 が遅い空間電荷波のように負エネルギーを運ぶ場合、式(4)の Manley-Rowe

の関係を $a_1(z, t)$ と $a_2^*(z, t)$ で示すと

$$-\frac{1}{\omega_1} \frac{d}{dz} |a_1(z, t)|^2 = -\frac{1}{\omega_2} \frac{d}{dz} |a_2(z, t)|^2 \quad (21)$$

となる。上式で左辺の負符号は負エネルギーを示し、右辺の負符号は後進波の正エネルギーが $-z$ 方向に運ばれることを表わす。したがって結合係数 c_{12} と c_{21} とは

$$c_{12}^* = \frac{\omega_1}{\omega_2} c_{21} \quad (22)$$

となり、二つの前進波モードのパラメトリック分布結合と全く同じとなり

$$|c_{12}|^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{1}{4} (\Delta\beta)^2 \quad (23)$$

の場合増大波が得られ

$$|c_{12}|^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{1}{4} (\Delta\beta)^2 \quad (24)$$

のときの定在波となり Tien の結果と一致する¹⁾。

4. 応 用 例

前述したモード結合理論の一例として、固体内の光波と音波とのパラメトリック後進波結合を考える。簡単にするため次元とし、ポンプ波を前進光波、モード $a_1(z, t)$ を前進音波、さらにモード $a_2^*(z, t)$ を後進光波とする。固体内の前進音波の機械応力 $T(z, t)$ と後進光波の電界 $E(z, t)$ は、モード複素振幅を用いるとそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} T(z, t) &= \sqrt{2Z_1} a_1(z, t), \\ E(z, t) &= \sqrt{2Z_2} a_2^*(z, t). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

で表わされる。ここで Z_1 は音波インピーダンス、 Z_2 は電磁波固有インピーダンスであり

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{\rho k_{11}}, \\ Z_2 &= \sqrt{\mu/\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

で示される。ここに ρ は密度、 k_{11} は弾性係数、 μ は透磁率、さらに ε は誘電率である。

いま系を無損失と仮定し、三周波数間に式(1)が成立し、波動ベクトルの保存が完全である、すなわち位相整合のずれ $\Delta\beta$ が零であるとしよう。いま作用域の始端で機械応力が T_0 であり、終端で後進光波の電界が零であるとすれば、 $T_0 = \sqrt{2Z_1} A_{10}$ を用いて式(14)と式(15)から

$$\left. \begin{aligned} T(z, t) &= \frac{\cos K(L-z)}{\cos KL} T_0 e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)}, \\ E(z, t) &= \frac{\sin K(L-z)}{\cos KL} T_0 \left(\frac{\omega_2 Z_2}{\omega_1 Z_1} \right)^{1/2} e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

が得られる。ここで $K = |c_{12}|^2 (\omega_2/\omega_1)$ である。

実際の材料について結合係数や分散特性を詳しく調べる必要があるが、上式は前進音波と後進光波が前進ポンプ光波によってパラメトリック後進波結合する際の性質を端的に示している。すなわちパラメトリック結合された前進音波は増幅され、その出力は $\cos^{-2} KL$ に比例するので高利得が期待される。また後進光波が発生し出力端 $z=0$ における電力は $\tan^2 KL$ と ω_2/ω_1 に比例するので高出力となる。さらに $KL = (2n+1)\pi/2$ で利得が無限大となり後進波発振を生ずる。これは誘導ブリルアン散乱の特性とよく対応している⁹⁾。

5. 結 言

群速度と位相速度が同じ向きの波が、互に反対方向に進む二つの波のパラメトリック後進波結合と (Fig. 1 参照), 一方の波が群速度, 位相速度ともに同じ向きで, 他方の波は群速度と位相速度の向きが反対の後進波の場合のパラメトリック後進波結合 (Fig. 2 参照) に関し時間域におけるモード結合理論をはじめて与えた。得られた結果を固体内の前進音波と後進光波とのパラメトリック後進波結合に適用し, 誘導ブリルアン散乱とよく対応することが示された。

おわりに本研究の発表の機会を与えて下さった電子工学科の各位に感謝するとともに, 原稿をお読みいただき御助言下さった鈴木道雄教授に心からお礼申し上げます。また討論して下さい岸本登美夫君, 原稿の整理に助力された庄司由利嬢に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Tien, P. K.: "Parametric amplification and frequency mixing in propagating circuits", J. Appl. Phys., vol. 29, pp. 1347-1357, September 1958.
- 2) Hsu, H.: "Three-dimensional parametric interactions of waves and quasi-particles", Proc. IRE, vol. 50, pp. 1977-1978, September 1962.
- 3) Barnes, C. W.: "Conservative coupling between modes of propagation", Proc. IEEE, vol. 52, pp. 64-73, January 1964.
- 4) Chiao, R. Y., Townes, C. H., and Stoicheff, B. P.: "Stimulated Brillouin scattering and coherent generation of intense hypersonic waves", Phys. Rev. Lett., vol. 12, p. 592, May 1964.
- 5) Kroll, N. M.: "Excitation of hypersonic vibrations by means of photoelastic coupling of high-intensity light waves to elastic waves", J. Appl. Phys., vol. 36, pp. 34-43, January 1965.
- 6) Bobroff, D. L.: "Coupled-modes analysis of the phonon-photon parametric backward wave oscillator", J. Appl. Phys. vol. 36, pp. 1760-1769, May 1965.
- 7) Bloembergen, N.,: "Nonlinear Optics", Benjamin, New York, 1965.
- 8) Louisell, W. H.: "Coupled mode and parametric electronics", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
- 9) Yariv, A.: "Quantum Electronics" John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
- 10) Steele, M. C. and Vural, B.: "Wave Interactions in Solid State Plasma", McGraw-Hill, New York, 1969.