HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	円管内の縦拡散の研究（第3報） ： 等濃度線の形について
Author(s)	石崎, 健二
Citation	北海道大學工學部研究報告, 63, 105-114
Issue Date	1972-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41081
Type	departmental bulletin paper
File Information	63_105-114.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

円管内の縦拡散の研究 (第3報)

―― 等濃度線の形について ――

石崎健二*

(昭和46年8月30日受理)

Studies on the Longitudinal Diffusin of Water Flow in a Pipe (III)

— On the Shape of the Surfaces of Constant Concentration —

Kenji ISHIZAKI

Abstract

In a previous paper it was shown that the diffusion of soluble matter along the pipe was governed by a virtual coefficient of diffusivity which could be calculated from observed distributions of concentration. In this paper an expression is proposed for the shape of the surfaces of constant concentration in the core of turbulent pipe flow. There exists an obvious quantitative relationship between the profile of constant conentration and a virtual coefficient of diffusivity. The expression shows that the profile does not depend on time, but only on flow velocity. The theoretical prediction is verified by the experiment with a smooth pipe of 4 cm diameter and 10 m length for Reynolds number of 2×10^4 to 6×10^4.

1. 序　　論

半径一定の円管内を定常的に流れている水を考える。この水の中に拡散物質を投入したとき，その物質の拡散は次の拡散方程式に従うことを前回の報告[1]で示した。

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}+U\frac{\partial C_m}{\partial x}=A\frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

ここに，C_mは円管の軸に垂直な断面における平均濃度，Uは断面平均流速，xは円管の軸方向にとった座標，tは時間である。Aは縦拡散係数で次のように書かれる。

$$A=\frac{\int_0^a r\left(\varepsilon\frac{\partial c}{\partial x}-u'c\right)dr}{\int_0^a r\frac{\partial c}{\partial x}\,dr} \tag{1.2}$$

ここに，aは円管の半径，rは円管の半径方向にとった座標，εはx方向の乱流拡散係数，cは濃度，u'は$(U-u)$で流速と平均流速の差である。εとuはrの関数，cはx, r, tの関数である。

(1.1)が成立するのはAが定数のときにかぎられるので，(1.2)で$A=$const とおけば，(1.1)

* 工業力学第2講座

を適用できる条件を得る。そこで，濃度 c は任意の t において次式のように表わされなければならない。

$$c(x,r) = c_x(x) - f(r)\frac{\partial c_x(x)}{\partial x} \tag{1.3}$$

ここに，c_x は x 軸に平行な任意の軸上 $(r=r_0)$ の濃度分布，$f(r)$ は等濃度線の形で $f(r_0)=0$ になるように書かれたものである。なお，濃度分布が刻々と変化しても，$f(r)$ は変化しないことが必要である。そして，このとき縦拡散係数は，近似的に次のように表わされる。

$$A = \frac{2}{a^2}\int_0^a r[\varepsilon + u' f(r)]\,dr \tag{1.4}$$

以上の条件が満たされるとき，円管内における拡散は，見かけ上，完全な一次元拡散の様相を示す。拡散物質は全体として平均流速で移動していき，中心軸付近の流速が周囲より大きいにもかかわらず，中心部の拡散物質が周囲より速く移動していくということがない。刻々の拡散は流れ方向に生じるだけで，半径方向に濃度勾配があっても拡散が生じていないごときである。流れ方向への拡散の規模は r によらず，どの点でも拡散係数は A である。

円管流れの縦拡散の一次元モデルについては Taylor[2] をはじめ，いくつかの研究が発表されているが，三次元的な濃度分布の様子を直接研究対象にしているものは少ないようである。おもに，一次元モデルから導かれた縦拡散係数の大きさを実験で検討して，一次元モデル，理論の妥当性を判断している。Trylor[2] は乱流における縦拡散を扱った論文の中で等濃度線を示す量を数表の一部にあげてはいるが，それについては触れていない。Aris[3] は層流の場合について濃度分布のモーメントに関して論ずる中で，等濃度線の形を与えている。

著者の前回の論文では，いくつかの観測事実に基づいて，ほぼ A が一定の条件が満足されているとの推定に立って，縦拡散係数の測定をし，報告したのであるが，今回は，等濃度線の形に注目して一次元モデルの妥当性を検討した。

2. 理　　論

2.1 等濃度線の形

乱流の場合の等濃度線の形は，序論で述べたように Taylor[2] によって計算されているので，ここでも彼と同じ方法で計算する。ただし，彼は流速分布として速度差法則 (velocity-defect law) を用いているが，ここでは計算がしやすい指数法則を用いる。

まず，x 方向への乱流拡散を省略した形の拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon z\frac{\partial c}{\partial z}\right) = a^2 z\left(u\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t}\right) \tag{2.1}$$

文字の内容は，z が r/a を示す以外，前章と同じである。

乱流拡散係数 ε は

$$\varepsilon = \frac{m}{-\dfrac{\partial c}{\partial r}} = \frac{\tau}{-\rho\dfrac{\partial u}{\partial r}} \tag{2.2}$$

と表わすことができる。τ は shear-stress，ρ は密度，m は拡散物質の半径方向への輸送率である。

流速を

$$u = u_0(1-z)^{\frac{1}{n}} = U + u' = U + Ku_0 \tag{2.3}$$

と表わし (u_0 は中心流速), $\tau=\tau_0 z$ の関係式とともに (2.2) に代入すると

$$\varepsilon = \frac{an\tau_0}{\rho u_0} z(1-z)^{1-\frac{1}{n}} \tag{2.4}$$

となる。

(2.3), (2.4) を (2.1) に代入すると,

$$\frac{an\tau_0}{\rho u_0} \frac{\partial}{\partial z}\left\{z^2(1-z)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial c}{\partial z}\right\} = a^2 z\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_1 + K u_0 \frac{\partial c}{\partial x_1}\right\} \tag{2.5}$$

となる。ただし

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_1 = U\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} \tag{2.6}$$

$$x_1 = x - Ut$$

ここで, $(\partial c/\partial t)_1=0$, $\partial c/\partial x_1$ が x と z によらないとすれば, (2.5) は次のようになる。ただし, 添字1は煩雑なので以後は省く。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{z^2(1-z)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial c}{\partial z}\right\} = \frac{\rho a u_0^2}{n\tau_0} Kz \frac{\partial c}{\partial x} \tag{2.7}$$

これを積分すれば

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\rho a u_0^2}{n\tau_0} \frac{1}{z^2(1-z)^{1-\frac{1}{n}}} \frac{\partial c}{\partial x} \int Kz dz \tag{2.8}$$

となる。

Kz の積分は (2.3) により次のように書かれる。

$$\int Kz dz = \left\{\frac{n(1-z)}{2n+1} - \frac{n}{n+1}\right\}(1-z)^{1+\frac{1}{n}} - \frac{n^2 z^2}{(2n+1)(n+1)} + C \tag{2.9}$$

C は常数で, $z\fallingdotseq 0$ で $\partial c/\partial z=0$ になるように選べば

$$C = \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} \tag{2.10}$$

となる。

(2.8) に (2.9), (2.10) を代入して整理すると

$$\frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{\rho a u_0^2}{(2n+1)(n+1)\tau_0} \frac{\partial c}{\partial x} F(z) \tag{2.11}$$

$$F(z) = \left[\left\{n+z(n+1)\right\}\frac{(1-z)^{\frac{1}{n}}}{z^2} - \left(\frac{1}{z^2}-1\right)\frac{n}{1-z}\right](1-z)^{\frac{1}{n}} \tag{2.12}$$

となる。

濃度分布が

$$c(x,z) = c_x(x) - f(z)\frac{\partial c_x(x)}{\partial x} \tag{2.13}$$

と書かれることから, 次の式を得る。

$$\frac{\partial c}{\partial z} = -f'(z)\frac{\partial c_x}{\partial x} \tag{2.14}$$

(2.11) は c_x についても成り立っていなければならないから, (2.14) と (2.11) を比べてみれば

$$f'(z) = \frac{\rho a u_0^2}{(2n+1)(n+1)\tau_0} F(z) \tag{2.15}$$

であることがわかる。

結局，等濃度線 $f(z)$ は，(2.15) の積分

$$f(z)=\frac{\rho a u_0^2}{\tau_0}\frac{1}{(2n+1)(n+1)}G(z) \tag{2.16}$$

$$G(z)=\int F(z)\,dz \tag{2.17}$$

となる。

(2.16) に $(\tau_0/\rho)^{\frac{1}{2}}=v_*$ を代入すると，$n=7$，$u_0=1.225U$ の場合には

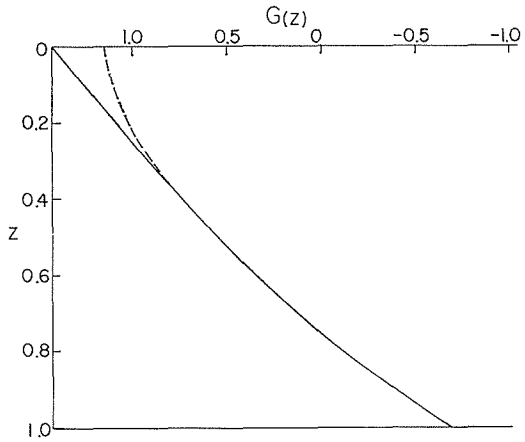
$$f(z)=0.0125a\left(\frac{U}{v_*}\right)^2 G(z) \tag{2.18}$$

となる。$n=7$ のときの $G(z)$ の値は図-1 に示してある（破線は 5 章による修正）。U/v_* は Reynolds 数 R の関数として与えられ，Taylor[2] のグラフによれば，R が $10^4\sim10^5$ の範囲では

$$\frac{U}{v_*}=5\log R-4 \tag{2.19}$$

と近似的に書ける。

したがって，円管の半径と平均流速が与えられれば (2.18), (2.19) から等濃度線の形を描くことができる。

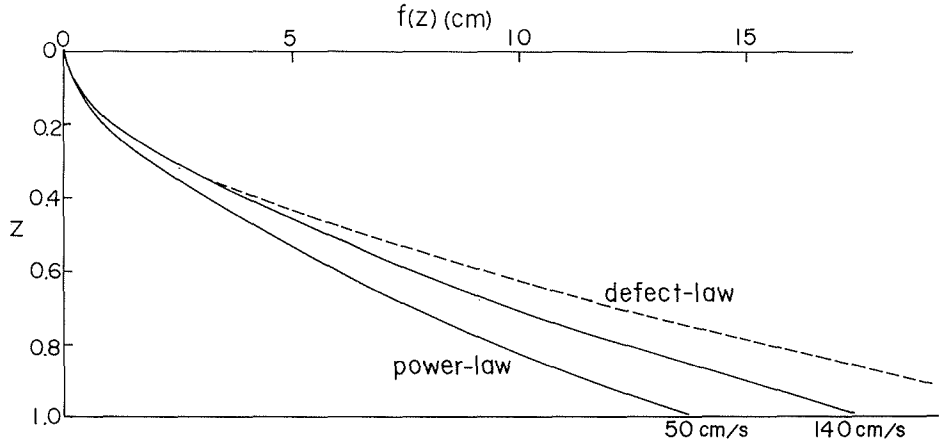


図—1 等濃度線に関する $G(z)$ の形

2.2 等濃度線の形の流速依存性

(2.18) で $f(z)$ が平均流速によって変化することを示しているのは注目すべきことである。なぜならば，流速分布として速度差法則を用いた場合には，このような性質が出てこないからである。

流速分布の表現式が異なれば，計算される等濃度線の形が異なるばかりでなく，平均流速への依存性という質的な違いも生じてくるのである。これらの差異が無視しえないものであることは，図-2 を見れば明らかである。図-2 の実線は指数法則から出てくる流速依存性を示すために (2.18) の一部を修正した式 (5 章参照) から計算したもの，点線はそれと比較するために Taylor[2]



図—2 等濃度線の形の流速による変化と流速分布式による差

の論文中の数表から計算したもので，速度差法則の場合である。

このようなことから，等濃度線の計算にあたっては，ただ計算しやすさだけではなく，計算結果についても十分注意しながら，流速分布式の形を選ばなければならない。

3. 実験と結果

3.1 実験装置

実験装置は前回報告したのとほぼ同じである。円管の長さは 10 m で，0.5 m おきに濃度測定用の電極を設置する穴があけてある。塩水の注入点から 4.9 m 下流の所を第1観測点とし，第11観測点までである。拡散物質として塩水を用いるので，観測点を通過する拡散物質の濃度は微小電極を用いて電気伝導度として検出される。

前回と違うのは，半径 2 cm の細管のほかに半径 4.5 cm の太管も用意したことと，それにともなって，太管に対しては塩水注入器も容量の大きいもの (1回注入量は約 2 cc) にしたことである。

等濃度線が (2.18) として表わすことができるのは濃度分布が (1.3) のようになっている場合である。(1.3) が期待されるのは，前回述べたように，塩水塊が十分流れ方向に伸びていると同時に，管壁まで十分拡がっているときである。

ある観測点で塩水塊が十分伸び，拡がっているかどうかは，その場所で半径上のどの点でも同じ濃度—時間曲線が得られるかどうかによって確かめることができる。実際には，中心軸付近でと，できるだけ管壁に近い点での2個所の濃度—時間曲線を比べて検討した。

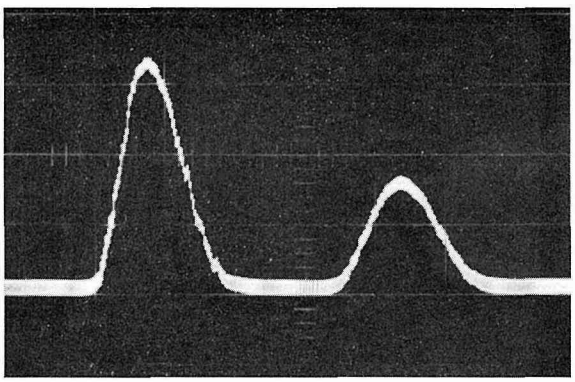
その結果によれば，細管については観測点を塩水注入点から 5.5～10 m 下流に置き，平均流速を 50～140 cm/sec とすれば，ほぼ条件が満たされていることがわかった。太管については，最も遠い観測点で，最大平均流速である 130 cm/sec のときにかろうじて条件が満たされている程度で，それより上流側の観測点では不十分，平均流速がおそくなるにしたがって最も遠い観測点で不十分であった。

太管でうまくいかなかったのは，管の長さが管径の約 100 倍しかなかったからである。塩水が注入されてから縦拡散の条件が満たされるまでに必要な区間の長さは，細管の場合で管径の約 140 倍になっている。この長さは注入時の塩水塊の形と流速に関係していると考えられ，実際，流速が大きいほど短かくなる傾向がみられた。

太管の場合で Reynolds 数が細管の場合より大きいときには，管径の 140 倍より短かくてもよいと期待されたが，実際には 100 倍ぐらいではまだ長さが不十分だったのである。

3.2 等濃度線の測定

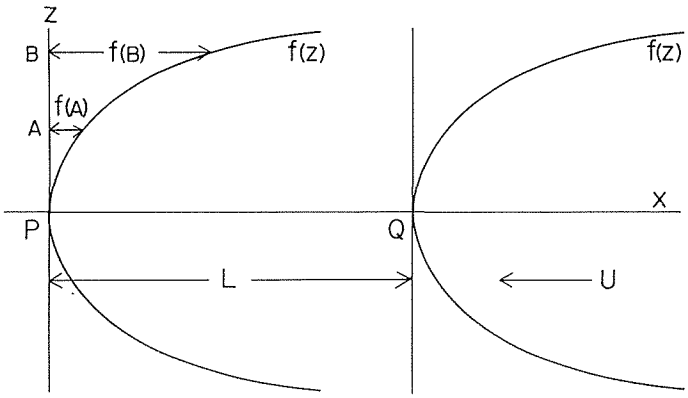
等濃度線の測定点 P と，P から適当に流れ方向に離れた観測点 Q に塩分検出用の電極を置く。それらを直列につないで流下していく塩水塊の濃度—時間曲線を求める。図-3 はその一例である。二つの山は P, Q, を塩水塊が通過したことを示し，振幅の大きいほうが上流側にある観測点での濃度—時間関係を示して



図—3 2点を通過する塩水塊の濃度—時間曲線

いる。

Q の電極を円管の中心軸上に固定し，P の電極を半径上の任意の位置に置いて濃度—時間曲線を求めると，図-3 のように得られる曲線の二つの山の間隔（塩水塊が $P, Q,$ の間を通過する所要時間）が P の電極が半径上のどの位置にあるかによって異なってくる。このことから次のようにして等濃度線の形を知ることができる。



図—4　等濃度線の形の求め方

最大濃度が Q の中心軸上を通った時から P の A 点, B 点（図-4 参照）に到着するまでの時間をそれぞれ T_A, T_B とし，PQ 間の距離を L とすれば，等濃度線の形が不変であることから

$$\left.\begin{aligned} T_A &= \frac{L-f(A)}{U} \\ T_B &= \frac{L-f(B)}{U} \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

となる。

ゆえに

$$f(A)-f(B) = U(T_A-T_B) = U\Delta t \tag{3.2}$$

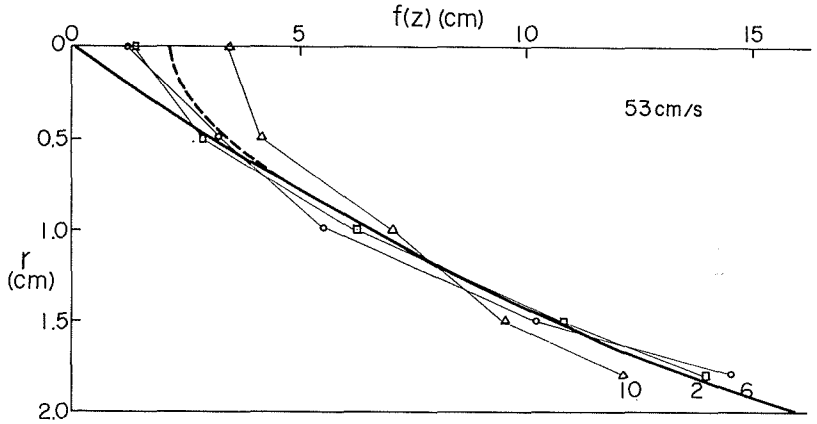
となる。

したがって，A 点を固定し，B 点を半径に沿ってとりながら Δt を測定すれば，$f(r)$ を知ることができるのである。

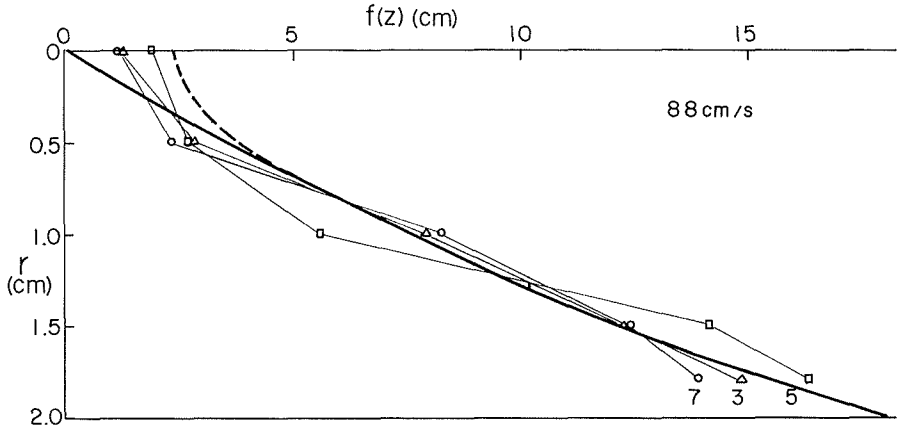
実験では，P, Q の二点間の距離を約 3 m にとり，A 点は中心軸上にとった。B 点は，細管については中心軸から 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 1.8 cm の位置にとり，太管についても同様に 0.5 cm おきにとっていった。Δt は塩水塊通過所要時間を 6 回測り，それを平均して求めた。平均流速と各点で求めた Δt から得られた等濃度線を図-5 にあげてある。図中の太い実線は (2.18) で計算したもの，測定曲線につけた数字は観測点の番号である。

4. 検　　討

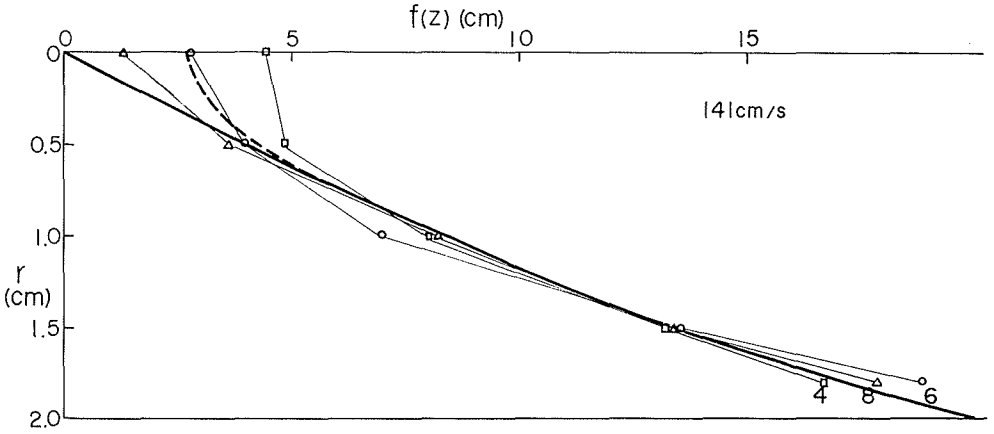
太管については，3 章 1 節で述べたように円管の長さが不十分のため，異なった観測点による比較はできなかったが，参考として同一観測点で 3 回測定した結果を図-6 に示す。これは，観測点が注入点から最も遠い所にあって，流速が最大のときに測定したものである。太管としては条件のよいほうになっている。図-6 は十分塩水塊が拡がっていなければ等濃度線の勾配が理論値より大きくなることを示している。



図—5・1

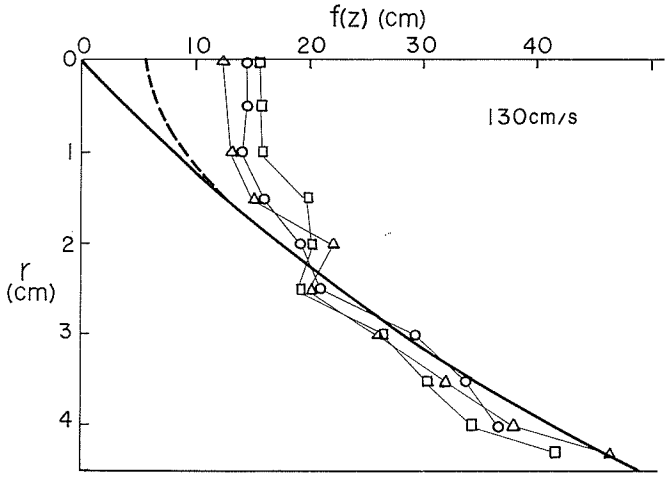


図—5・2



図—5・3

図—5　等濃度線の形（管径4 cm の場合）



図—6 等濃度線の形（管径 9 cm の場合）

細管の場合については，図-5 により，全体としては等濃度線の形がほぼ (2.18) に一致し，(2.18) が示す流速依存性も現実的であることがわかる。しかし，z の値が 0 に近い中心部では，理論から得たもののほうがとがりすぎている。以下，この点について検討する。

中心部のずれの原因は，次に述べるように，流速分布式から計算される乱流拡散係数の値が中心部で小さすぎることにあると考えられる。

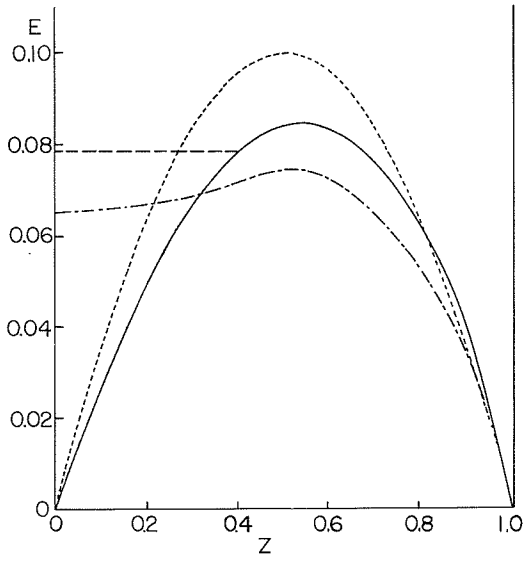
(2.4) によって乱流拡散係数の半径上の分布を計算すると，図-7 の実線のようになる。縦軸は $E=\varepsilon/av_*$ で，これは無次元化された拡散係数である。(2.4) を E で書き直すと

$$E=\frac{nv_*}{u_0}z(1-z)^{1-\frac{1}{n}} \qquad (4.1)$$

となる。そこで図-7 には，$a=2$ cm，$U=100$ cm/sec，$n=7$ について計算したものを示してある。

この図から，中心部で急速に拡散係数が減少していき，$z=0$ の点で 0 になることがわかる。これと同じ傾向は対数法則にもみられる（図-7 の点線）。

一方，平板の間の流れについてではあるが，Page ら[4] が実験で乱流粘性係数を算出しているのを見ると，中心部の値は粘性係数最大部分の値より 22% 前後小さくなっているにすぎない。



図—7 乱流拡散係数の分布

指数法則，対数法則は，速度に注目するかぎり，かなり現実をよく表現していても，(2.2) から求めた乱流拡散係数分布の現実との相違は，無視しえないものになっているのである。このことについては，すでに Brinkworth[5] が対数法則に手を加えて，流速実測値によりよく合うように，しかも乱流粘性係数についても実測値の傾向をよく表現できる式を導いている。

5. 流速分布の修正

指数法則は，等濃度線の計算がしやすいだけでなく，計算結果もほぼ実験と合うことがわかった。しかし，前章でわかったように拡散係数を求めるうえでの欠点は無視しえない。そこで，中心部の流速分布を2次式で表わすことを試みた。すなわち，中心部の拡散係数を一定値とするのである。実測値の傾向から考えて，この近似は不自然なものではない。

2次式の近似は，等濃度線の計算値が実測値から離れている部分に対して，すなわち，$0 \leqq z \leqq 0.4$ の範囲に適用することにした。2次式を求めるときの条件は，次のようになる。

(1) $u=pz^2+qz+r$ と表わす。

(2) $0 \leqq z \leqq 0.4$ の範囲に適用する。

(3) $z=0$ で，$du/dz=0$, $dc/dz=0$ とする。

(4) $z=0.4$ で，u, du/dz の値が指数法則から求めた値と一致する。

(5) $z=0.4$ で，$f(z)$, $f'(z)$ の値が，指数法則から求めた値と一致する。

このようにして求めた流速分布は

$$u = (-0.28z^2+0.97)\,u_0 \qquad (5.1)$$

ただし　$0 \leqq z \leqq 0.4$

となる。

中心部を (5.1) で，それ以外の部分を指数法則で流速を表わすと，u_0 は $z=0$ における中心最大流速 $u_{\max}$ を示す量ではなくなる。$u_{\max}$ は，(5.1) で $z=0$ とおいて

$$u_{\max} = 0.97u_0 \qquad (5.2)$$

となる。

(5.1) による乱流拡散係数は，(5.1) を (2.2) に代入することにより

$$\varepsilon = \frac{av_*^2}{0.56u_0} \qquad (5.3)$$

$$E = \frac{\varepsilon}{av_*} = \frac{v_*}{0.56u_0} \qquad (5.4)$$

となる。$a=2$ cm, $U=100$ cm/sec について計算した値は図-7に破線で示してある。同じ図の鎖線は Brinkworth の流速分布によるものである。

さらに，(5.1) によって等濃度線を修正すれば，$F(z)$ は次のように書かれる。

$$F(z) = (2n+1)(n+1)\,z(0.039z^2-0.045) \qquad (5.5)$$

ただし　$0 \leqq z \leqq 0.4$

(5.5) により，$n=7$ のとき，等濃度線の形は図-5, 6の破線のように修正される。これにより，等濃度線の形がかなり改善されたことがわかる。

なお，2章で示した図-2には，この修正された等濃度線が書かれている。

6. 結　　論

縦拡散と呼ばれる円管流れにおける拡散の一次元モデルの妥当性を等濃度線の形 $f(z)$ に注目して検討した。$f(z)$ の計算は Taylor の方法により，また流速分布式としては2次式で修正された 1/7 乗分布式を採用した。

実験は，主として管径 4 cm，長さ 10 m の円管を用いて，平均流速 50～140 cm/sec について

行なわれ，管径 9 cm の場合も試みられた。

理論式は測定値とかなりよい一致を示すことがわかった。また，流速分布式として，どのような形を採用するかによって，計算される等濃度線の形や，それの平均流速への依存性が異なってくることもわかった。

等濃度線の形 $f(\xi)$ が縦拡散係数 A と密接に関係していることは，(1.4) によって明らかである。したがって，ここで得られた $f(\xi)$ を用いて縦拡散係数を計算し，実測値と比較してみることは，一次元モデルを検討するうえで重要なことである。これを行なうには，十分な精度を持った縦拡散係数の測定法の確立が必要で，現在研究を進めているところである。

この研究をまとめるにあたり，工業力学第 2 講座柏村正和教授に御指導をいただいた。ここに厚く感謝の意を表する。

文　献

1) 石崎健二： 北大工学部研究報告 (昭 43), 49, pp. 181–194.
2) Taylor, G.: Proc. Roy. Soc. A, 223 (1954), pp. 446–468.
3) Aris, R.: Proc. Roy. Soc. 235 (1956), pp. 67–77.
4) Page, F. Jr. et al.: Ind. Eng. Chem. 44 (1952), pp. 424–430.
5) Brinkworth, B. J.: Chem. Engng. Sci. 24 (1969), pp. 787–791.