オートマトンの構造に関する一考察

桃内佳雄*　三浦良一*

(昭和46年8月30日受理)

Consideration of the structure of finite automata

Yoshio MOMOUCHI　Ryoichi MIURA

Abstract

In this paper, we consider the order-structure of finite automata. We classify automata by order relations. This classification depends on the existence of self-loop and cycle, and connectivity in automata.

We decompose the automaton by equivalence relations and study some properties about the decomposed automaton.

Primary and controllability are also discussed in connection with the order-structure of automata.

1. まえがき

オートマトンの代数的な構造論については，これまでいろいろな観点から考察されている。それらは主として，オートマトンの状態遷移構造そのものに注目し，半群論的，群論的立場から，オートマトンの構造を解明しようとするものである。

さて，オートマトンの状態遷移構造は，successor という概念[3]を導入して，オートマトンの状態に順序を与えると，オートマトンにおける順序構造を規定する。オートマトンの順序構造に関しては，有向グラフ理論においてなされている有向グラフの順序構造の議論を適用することができ，それらについては，F. Harary[4]らにより基礎的な考察がなされている。

本論文においては，オートマトンの順序構造について，さらに詳細な考察を試み，オートマトンにおけるセルフループ，サイクル，連結性との関連を明らかにする。

順序関係によるオートマトンの分類を行ない，それが，セルフループ，サイクル，連結性に強く依存していることを示す。同値関係を導入することにより，オートマトンの直和分割を行ない，商オートマトンを導き，その性質について考察する。順序構造と関連して，primary，可制御性についても考察する。

2. オートマトン

考察の対象とするオートマトンは，次のように定義される。

定義 1

オートマトン A は，3項系列 $A=(S, \Sigma, \delta)$ である。

---

* 精密工学科　自動制御工学講座

S: 空でない，状態の有限集合

Σ: 空でない，入力の集合

δ: $S\times\Sigma^*\to S$ 状態遷移関数

次のような性質を満足する。

$$\forall s\in S,\ \forall x,\ y\in\Sigma^*,\qquad \delta(s, xy)=\delta[\delta(s, x), y]$$

ここで Σ^* は，Σ 上の自由モノイドである（Σ の要素の任意の列のすべての集合で，空列 ε も含む。$\delta(s, \varepsilon)=s,\ \forall s\in S$)。

オートマトンの構造を主として議論するので，出力については考慮していない。このような形のオートマトンは，半オートマトン，あるいは，状態オートマトンとよばれている。オートマトン A の状態 $s\in S$ について，successor, pure successor は次のように定義される。

定　義　2

(1) 任意の $s\in S$ に対して，その successor は，$\delta(s)=\{\delta(s, x):\ x\in\Sigma^*\}$ である。

(2) 任意の $s\in S$ に対して，その pure successor は，$\delta^+(s)=\{\delta(s, x):\ x\in\Sigma^*-\{\varepsilon\}\}$ である。

サイクル，セルフループ，連結，強連結の定義を与える。

定　義　3

(1) ある $s\in S$ に対して，ある $x\in\Sigma^*$ が存在して，$s\in\delta(s, x)$, $|x|\geqq 2$ であるとき，s はサイクルをもつという。

(2) ある $s\in S$ に対して，ある $x\in\Sigma^*$ が存在して，$s\in\delta(s, x)$, $|x|=1$ であるとき，s はセルフループをもつという。

定　義　4

(1) ある $s, t\in S$ に対して，$s\in\delta(t)$ または $t\in\delta(s)$ のすくなくともどちらか一方がなりたつとき，s と t は連結しているという。$T\subseteq S$ なる T の，任意の $s, t\in T$ について，s と t が連結しているとき，T は連結であるという。とくに S が連結であるとき，オートマトン A は連結であるという。

(2) オートマトン A において，任意の $s, t\in S$ に対して，$s\in\delta(t)$ がなりたつとき，オートマトン A は強連結であるという。

3. オートマトンにおける順序関係と，オートマトンの分類

集合 S におけるある関係 R について次のような性質を考える。

$$\begin{aligned}\forall s, t, u\in S\quad & O_1;\ sRs\\ & O_2;\ sRt,\ tRu\to sRu\\ & O_3;\ sRt,\ tRs\to s=t\\ & O_4';\ sRt\ \text{か}\ tRs\ \text{がなりたつ。}\end{aligned}$$

O_1, O_2, O_3, O_4' がなりたつとき，R は全順序関係，O_1, O_2, O_3 がなりたつとき，R は半順序関係，O_1, O_2 がなりたつとき，R は擬順序関係とよばれる[1]。

ここでは，O_4' の性質をすこし修正して，次の O_4 の性質について考察する。

$$O_4;\ sRt\ \text{か}\ tRs\ \text{のすくなくともどちらか一方がなりたつ。}$$

O_4' の性質は，オートマトンに線形構造を要求している。O_4' についても以下にのべる O_4 に関する考察と，同様の考察が可能である。

オートマトン A において，次のような順序関係を導入する。

$$s, t \in S \quad R_1\,;\ t \in \delta^+(s) \qquad (s \leqq t)$$
$$R_2\,;\ t \in \delta(s) \qquad (s \leqq t)$$

このような順序関係においては，O_2 はつねになりたつ。また，O_1 は R_2 においてつねになりたつ。したがって，R_1 については O_1, O_3, O_4, R_2 については O_3, O_4 の諸性質についての，考察を行なえばよい。O_1, O_2, O_3, O_4 の諸性質にもとづいて，R_1, R_2 に関して，オートマトンは，Table 1 のように分類される。(各性質が成立する時，1)

Table 1. Classification of Automata by order relations

	R_1	O_1	O_2	O_3	O_4
(I)	R_{11}	1	1	0	0
	R_{12}	1	1	0	1
	R_{13}	1	1	1	0
	R_{14}	1	1	1	1
(II)	R_{15}	0	1	0	0
	R_{16}	0	1	0	1
	R_{17}	0	1	1	0
	R_{18}	0	1	1	1
	R_2	O_1	O_2	O_3	O_4
(III)	R_{21}	1	1	0	0
	R_{22}	1	1	0	1
	R_{23}	1	1	1	0
	R_{24}	1	1	1	1

R_1 に関する 2 つの族，R_2 に関する 1 つの族を，それぞれ I, II, III 族とよび，また各族の 4 つの小分類は，$R_{1i}\,(i=1\sim8)$, $R_{2j}\,(j=1\sim4)$ とよぶことにする。

各オートマトン類がどのような性質をもっているかを明らかにするために，O_1, O_3, O_4 の意味を示す。

R_1 における O_1, O_3, O_4 の意味

O_1；任意の $s \in S$ が，サイクルまたは，セルフループのすくなくともどちらか一方をもつ。

O_3；任意の $s \in S$ が，サイクルをもたない。

O_4；任意の $s, t \in S$ が，連結している。

R_2 における O_3, O_4 の意味

O_3；任意の $s \in S$ が，サイクルをもたない。

O_4；任意の $s, t \in S$ が，連結している。

このように，この分類は，オートマトンにおけるセルフループ，サイクル，連結性に，強く依存している。O_4 は，オートマトンが連結であることを要求している。

I, II, III 族の各オートマタ類の間には，次のような包含関係がある。

$$\text{I–III}: \quad R_{11} \subset R_{21},\ R_{12} \subset R_{22},\ R_{13} \subset R_{23},\ R_{14} \subset R_{24}$$
$$\text{II–III}: \quad R_{15} \subset R_{21},\ R_{16} \subset R_{22},\ R_{17} \subset R_{23},\ R_{18} \subset R_{24}$$

III 族の各オートマタ類は，I, II 族の各オートマタ類を包含している。

上述した分類にもとづいて，任意のオートマトンを与えられたとき，その順序構造を判定するための手順は参考文献 2) において定義されている状態遷移行列を用いて，容易に得られる。

4. オートマトンにおける同値関係と，オートマトンの分割

集合 S における関係 E が，次の性質を満足するとき，同値関係であるといわれる。

$$\forall s, t, u \in S \quad P_1\,;\ sEs$$
$$P_2\,;\ sEt \rightarrow tEs$$
$$P_3\,;\ sEt,\ tEu \rightarrow sEu$$

オートマトン A において，次のような同値関係を導入する。

$$s, t \in S \quad E_1\,;\ t \in \delta^+(s),\ s \in \delta^+(t) \qquad (s \equiv_{E_1} t)$$
$$E_2\,;\ t \in \delta(s),\ s \in \delta(t) \qquad (s \equiv_{E_2} t)$$

E_1 は I 族，E_2 は III 族のオートマトンに関して同値関係となる。O_3 の要求されているオートマトン (O_3 を満足するオートマトン) については，これらの同値関係による分割は，各状態への分

割となる。したがって，これらの同値関係による分割が意味があるのは，O_3 の満足されていないオートマトンに対してである。

オートマトン R_{11} を同値関係 E_1 を用いて分割することを考える。次の定理が得られる。

定 理 1

同値関係 E_1 により R_{11} から得られる R_{11}/E_1 によって定まるサブオートマトンの族は，R_{11} の直和分割となる。E_1 に関して同値類である各サブオートマトンは，強連結である。

証 明

R_{11}/E_1 のサブオートマトン S_i, S_j について，これらが相異なるサブオートマトンならば，$S_i \cap S_j = \phi$ なることをいえばよい。$S_i \cap S_j \neq \phi$ とする。$s \in S_i \cap S_j$ とすると，任意の $s' \in S_i$, 任意の $s'' \in S_j$ に対して，$s \equiv_{E_1} s'$, $s \equiv_{E_1} s''$ となり，P_3 より，$s' \equiv_{E_1} s''$ となる。これは，はじめの仮定に矛盾する。ゆえに $S_i \cap S_j = \phi$ である。S は有限集合なので，分割は有限個のサブオートマトンによりなされ，$\bigcup_i S_i = S$, $S_i \neq \phi$ なることは明らかである。

同値類である各サブオートマトンが強連結となることは，定義 4(2) と E_1 の性質より，明らかである。

定 義 5

分割されたオートマトンにおいて，各強連結サブオートマトンを１つの状態とみなしてできるオートマトンを商オートマトンとよび，それをあらためて R_{11}/E_1 とかく。

サブオートマトンに，すくなくとも１つセルフループをもつ状態が含まれている場合には，縮小された状態にセルフループを付加することとする。このようにして，すべての状態がセルフループをもつ商オートマトンを，R_{11}^*/E_1 とかく。

系 1

商オートマトン R_{11}^*/E_1 は，R_1 に関して半順序関係をもつ。

証 明

R_{11}^*/E_1 は，すべての状態がセルフループをもつので，O_1 は満足される。またそれは商オートマトンであるから，O_3 は満足される。O_2 については，明らかに満足される。

オートマトン R_{12} についても，定理 1，系 1 と同様のことがいえる。

R_{21}, R_{22} の E_2 による分割についても，定理 1 と同様のことがなりたつ。また各商オートマトンについては，R_{11}, R_{12} の場合のような，セルフループについての考察を行なわなくても，系 1 と同様のことがなりたつ。

定 義 6

各オートマトンの族において，それぞれの商オートマトンが同一なオートマタは，同値関係に関して構造等価であるという。

そのとき次のようなことが明らかである。

(1) 任意のオートマトン B ($\in R_{21}$ または $\in R_{22}$) に対して，E_2 に関して構造等価なオートマトン C ($\in R_{23}$ または $\in R_{24}$) が存在する。

(2) 任意のオートマトン B ($\in R_{11}$ または $\in R_{12}$) に対して，その商オートマトンが，B^*/E_1 となるとき，E_1 に関して構造等価なオートマトン C ($\in R_{13}$ または $\in R_{14}$) が存在する。

(( ) の中は順番になりたつ。)

定 義 7

セルフループをのぞいて，外へでるパスのみをもつ同値類を上限サブオートマトン，内へはいるパスのみをもつ同値類を下限サブオートマトンとよぶ。

系　2

同値関係により分割されたオートマトンは，すくなくとも1つずつ，上限および下限サブオートマトンをもつ。(ただし，同値類が2個以上のばあい。)

証　　明

この系2は，上限サブオートマトンの縮小を上限状態，下限サブオートマトンの縮小を下限状態として，商オートマトンにおいて考えると，すくなくとも1つずつ上限および下限状態をもつことを示せばよい。商オートマトンを $D=(T, \Sigma, \delta_T)$ とする。(T の状態数を n とする。) $t \in T$ をとる。商オートマトンにはサイクルが存在しないので，長さ1の入力で t へ入るパスをもつ状態を t_1，長さ1の入力で t_1 へ入るパスをもつ状態を t_2，… とたどってゆくと，たかだか $n-1$ ステップで，そのようなパスはなくなる。すなわちすくなくとも1つ上限状態が存在する。

下限状態についても，同様の議論がなりたち，すくなくとも1つ下限状態が存在する。

上限および下限サブオートマトンが1つずつのときは，そのオートマトンは束の構造と類似の構造をもつ。

5. primary との関連

Bavel[3] により導入された primary との関連について考察する。

定　義　8

(1)　オートマトン A は，ある $s \in S$ が存在して，$A=\langle s \rangle$ ならば，そのときのみ，単一状態により生成されるという。ここで，$\langle s \rangle=(\delta(s), \Sigma, \delta)$。$s$ は $\langle s \rangle$ の生成元という。$\langle s \rangle$ の生成元の集合は，$\mathrm{gen}\,\langle s \rangle=\{t \in S_{\langle s \rangle} : \langle t \rangle=\langle s \rangle\}$。

(2)　空でない有限オートマトンの primary は，最大の，単一状態により生成されるサブオートマトンである。

任意のオートマトンが与えられて，その分割を行ない，強連結サブオーマトンの数が k であったとする。そして各サブオーマトンの状態数が $l_1, l_2, \cdots, l_k$ であったとする。各サブオートマトンを S_i $(i=1, \cdots, k)$，上限サブオートマトンを S_{ui} $(i=1, \cdots, l\,;\,0<l<k)$ とする。上限サブオートマトンのそれぞれの状態数を l_{ui} とする。そのとき次のようなことがいえる。

(1)　primary の数は l である。

(2)　$\|\mathrm{gen}\,\langle s_{ui} \rangle\|=l_{ui}$

$s_{ui} \in S_{ui}$，$\|X\|$：　集合 X の要素の数。

(3)　空でない有限オートマトンの状態集合は，上限サブオートマトンの各状態の successors の union である。

6. 可制御性との関連

オートマトンにおける可制御性は，セルフループ，サイクルの存在，連結性と，密接な関係がある。まずそれらと関連したいくつかのことがらについて考察する。

定　義　9

(1)　オートマトン A は，次式を満足する整数 k が存在すれば，弱 k 可制御であるという。

$$\forall s_i, s_j \in S,\ \exists x \in \Sigma^*,\ |x| = k$$
$$s_i = \delta(s_j, x)$$

(2)　弱 k 可制御であって，弱 $(k-1)$ 可制御でなければ，k 可制御であるという。

補　題　1[2)]

可制御なオートマトン A は，強連結である。

定　理　2[2)]

n コの状態をもつオートマトン A が強連結で，1つでもセルフループをもてば，k 可制御である。ここで，$k \leqq 2n-2$。

定　理　3[2)]

強連結なオートマトン A が可制御であるための必要充分条件は，そのすべての単純サイクルの長さの最大公約数が1となることである。(ここで，単純サイクルとは，同一状態を2度とうらないサイクルである。)

この定理3は，すべての単純サイクルを調べなければならない。2つのサイクルを調べることによる，次の系が得られる。

系　3

強連結なオートマトン A が可制御であるための必要充分条件は，2つのサイクル，C_l, C_s があって，その長さ L_l, L_s が，$L_l-L_s=1\,(L_l>L_s)$ となることである。

証　　明

必　要　性

A が可制御であるから，s_i から s_i へ k 段で制御できる。その長さ k のサイクルにおいて，かならず，s_i へ1入力でくる状態がある。それを s_j とする。そのとき s_i から s_j へ長さ k で制御でき，長さ $k+1$ のサイクルができる。

充　分　性

今，2つのサイクル C_l, C_s の状態 s_l, s_s を考える。任意の状態 s_i から，任意の状態 s_j へのパスの長さが i と j に依存しないことを示す。L_{ij} を s_i から s_j へのパスの長さとする。

$$L_{ij} = L_{il}+L_{ls}+L_{sj}$$

L_{ls}:　s_l から s_s へのパスで最小長さのものとする。

$$\begin{aligned}
\max L &= \max_i L_{il}+L_{ls}+\max_j L_{sj} \\
\min L &= \min_i L_{il}+L_{ls}+\min_j L_{sj} \\
L^*_{ij} &= L_{il}+(\max L-L_{ij})\cdot L_l+L_{ls}+(L_{ij}-\min L)\cdot L_s+L_{sj} \\
&= L_{ij}(1-L_l+L_s)+\max L\cdot L_l-\min L\cdot L_s \\
&= \max L\cdot L_l-\min L\cdot L_s
\end{aligned}$$

次に，分割と関連したいくつかの結果についてのべる。

定　義　10

強連結サブオートマトンが k 可制御であるとき，k-local 可制御という。

次のようなことがいえる。

(1)　R^*_{11}/E_1 におけるすべての強連結サブオーマトンは，それぞれ local 可制御である。

(2)　隣接した k_i-local 可制御なサブオートマトン S^C_i と，k_j-local 可制御なサブオートマトン S^C_j において，$(S^C_i<S^C_j)$ 任意の $s\in S^C_i$ から，任意の $t\in S^C_j$ へ，ある k が存在して，k 可制御であり，その上限は次のように与えられる。$k\leqq k_i+k_j+1$。

7. あ と が き

オートマトンの順序関係による分類，同値関係による分割にもとづいて，オートマトンの順

序構造に関する考察を行なった。セルフループ，サイクル，連結性と，順序構造の関連をいくつか明らかにすることができた。また，primary，可制御性についても考察し，とくに可制御性については，これまで得られているいくつかの結果とともに，セルフループ，サイクル，連結性との関連が深いことを示した。

連結性と可逆性を考察した研究[6]もあり，これらとの関連，有向グラフ理論とのさらに詳細な関連などについての考察が残されている。

謝　　辞

日頃，御討論いただく，小山昭一助教授に厚く感謝いたします。

参考文献

1) 彌永昌吉，小平邦彦：現代数学概説 (1961), pp. 28-45, 岩波書店.
2) 矢島脩三：制御工学, **14** (1970), 9, pp. 40-47.
3) Bavel, Z.: Inf. and Cont., **18** (1971), 2, pp. 140-155.
4) Harary, F., Norman, R. Z., Cartwright, D.: Structural models (1965), John Wiley.
5) Busacker, R. G., Saaty, T. L.: グラフ理論とネットワーク (1970), 培風館 (矢野，伊理共訳).
6) Bavel, Z., Muller, D. E.: J. of A. C. M., **17** (1970), 2, pp. 231-240.
7) Mowle, F. J.: J. of A. C. M., **17** (1970), 3, pp. 518-524.