



Title	熱伝導を考慮した超音波の速度並びに吸収について
Author(s)	渋川, 勝久; 滝沢, 英一
Citation	北海道大学工学部研究報告, 64, 19-29
Issue Date	1972-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41088
Type	departmental bulletin paper
File Information	64_19-30.pdf



熱伝導を考慮した超音波の速度並びに吸収について

渋川 勝久* 滝沢 英一*

(昭和46年11月30日受理)

On the Velocity and Absorption of Supersonic Waves with Thermal Conduction

Katsuhisa SHIBUKAWA and Ei Iti TAKIZAWA

Institute of Precision Mechanics, Faculty of Engineering, Hokkaido University

(Received November 30, 1971)

Abstract

The velocity and absorption of supersonic waves are calculated, taking explicitly into account the thermal conduction which is accompanied by relaxation phenomena.

The velocity and absorption of supersonic waves are plotted against wave-frequency, with thermal conductivity and relaxation time as parameters.

In order to make clear the effect of thermal conduction on the wave-velocity and absorption, other operators which correspond to rheological constants, such as Lamé's constants, specific heat, coefficient of thermal expansion, etc. are assumed to be constant.

Zusammenfassung

Die Geschwindigkeit und Absorption der Ultraschallwellen sind berechnet, unter Berücksichtigung von der Wärmeleitung, die die Relaxationserscheinungen begleitet.

Die Geschwindigkeit und Absorption der Ultraschallwellen sind graphisch gegen Wellenfrequenz dargestellt, mit Thermoleitfähigkeit und Relaxationszeit als Parametern.

Um den Einfluß der Thermoleitfähigkeit auf die Geschwindigkeit und Absorption klar zu machen, sind andere Operatoren, die zu den rheologischen Konstanten, wie Lamé'sche Konstanten, spezifische Wärme, Thermoausdehnungskoeffiziente, u.s.w., entsprechen, als Konstanten angesehen.

はじめに

超音波パルス技術の発達に伴い、それを利用して物質中の超音波の速度と吸収を測定することにより、物質の力学的内部構造を解き明かす試みが数多く為されている。しかし、その中で物質の熱伝導を陽に考慮している例は数少ない。本論文に於ては、熱伝導現象がどのような微視的な過程で起っているのかについては触れずに、現象論的な立場から、緩和現象を伴った熱伝導項を考える。熱伝導を、この様にして、陽に考慮した場合に、物質中を伝わる超音波の速度と吸収とがどのように影響されるかを、数値計算によって調べた。ここでは、熱伝導率以外の物性値、例えば、ラメ定数、比熱、熱膨脹係数等、は一定値であることを仮定し、緩和現象を伴う熱伝導項

* 精密工学科精密機器学第二講座

の影響を調べた。

記 号

x_i : 直交座標 ($i=1, 2, 3$)

X_i : 体積力の成分 ($i=1, 2, 3$)

ξ_i : 変位の成分 ($i=1, 2, 3$)

A_{ij} : 応力テンソルの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

A_{ij}^0 : 熱応力を考慮しない時の応力テンソルの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

A'_{ij} : 熱応力による応力テンソルの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$: 歪テンソルの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ記号

p_0 : 静圧力

k_0 : 静的体積弾性率

λ_r : 部分体積弾性率 ($r=1, 2, \dots, l$)

$\lambda_r = \lambda_r \tau_r$: 部分体積粘性係数

μ_r : 部分剪断剛性率 ($r=1, 2, \dots, m$)

$\mu_r = \mu_r \tau_r^{(1)}$: 部分剪断粘性係数

α_r/k_0 : 部分熱膨脹係数 ($r=1, 2, \dots, n$)

ρ_0 : 密度

T : 温度

$\vartheta = \delta T$: 温度の変化分

$\tau_r, \tau_r^{(1)}, \tau_r^{(2)}, \tau_r^{(3)}, \tau_r^{(4)}, \tau_r^{(r)}$: 緩和時間

C_0 : 静的定積比熱

C_r : 部分定積比熱 ($r=1, 2, \dots, s$)

$b_0 d\varepsilon_{kk}, b_{ij}^{(r)} d\varepsilon_{ij}$: 歪エネルギーの増し分

U : 単位質量当りの内部エネルギー

q_j : 熱流ベクトルの成分 ($j=1, 2, 3$)

κ : 熱伝導率

κ_0 : 静的な熱伝導率

κ_r : 部分熱伝導率 ($r=1, 2, \dots, p$)

t : 時間

ω : 円振動数

β : 波数

$D = d/dt$: 微分演算子

但し、テンソルを含む式で、一つの項の中に同じ添字が2度現われる時には、その添字について1から3までの和をとるものとする。

§1 状態方程式

弾性体の歪と応力との関係式は、熱応力を考慮しない場合には^{1,2)},

$$A_{ij}^0 = -p_0 \delta_{ij} + k_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \left[\sum_{r=1}^l \lambda_r \left\{ \varepsilon_{kk}(t) - \int_0^\infty g_r(t') \varepsilon_{kk}(t-t') dt' \right\} - \frac{2}{3} \sum_{r=1}^m \mu_r \left\{ \varepsilon_{kk}(t) - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty h_r(t') \varepsilon_{kk}(t-t') dt' \right\} \delta_{ij} + 2 \sum_{r=1}^m \mu_r \left\{ \varepsilon_{ij}(t) - \int_0^\infty h_r(t') \varepsilon_{ij}(t-t') dt' \right\} \quad (1-1)$$

と書ける。 $g_r(t')$, $h_r(t')$ は緩和関数で、夫々次の条件を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty g_r(t') dt' &= 1 & (r=1, 2, \dots, l) \\ \int_0^\infty h_r(t') dt' &= 1 & (r=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

いま、Maxwell 型の緩和機構を考えれば、調和振動を行なう系に対しては、

$$\left. \begin{aligned} g_r(t') &= \frac{1}{\tau_r} \exp(-t'/\tau_r) & (\tau_r > 0) \\ h_r(t') &= \frac{1}{\tau_r^{(1)}} \exp(-t'/\tau_r^{(1)}) & (\tau_r^{(1)} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

と採ることが出来る。式 (1-1) は、

$$A_{ij}^0 = -p_0 \delta_{ij} + \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{\lambda'_r D}{1 + \tau_r D} - \frac{2}{3} \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \varepsilon_{ij} \quad (1-4)$$

となる。

次に、熱膨脹による応力を考える。熱力学的な 2 つの独立変数として、歪 ε_{ij} と温度の変化分 ϑ を採る。又、温度上昇により物質が熱膨脹し、応力を発生する過程には、上と同様な緩和機構が有るものとする。今、熱応力が n 個の要素から成立っているとすれば、

$$A_{ii}(t) = - \sum_{r=1}^n \alpha_r \left\{ \vartheta(t) - \int_0^\infty f_r(t') \vartheta(t-t') dt' \right\} \quad (i \text{ 固定}) \quad (1-5)$$

ただし、

$$\int_0^\infty f_r(t') dt' = 1 \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (1-6)$$

である。ここで、調和振動を行う系を考えて、

$$f_r(t') = \frac{1}{\tau_r^{(2)}} \exp(-t'/\tau_r^{(2)}) \quad (1-7)$$

と採れば、式 (1-5) は、

$$A_{ii} = - \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r \tau_r^{(2)} D}{1 + \tau_r^{(2)} D} \vartheta \quad (i=1, 2, 3) \quad (1-8)$$

となる。また、 A'_{ij} は熱膨脹による応力なので $A'_{ij}=0$ ($i \neq j$) である。

物質中の応力 A_{ij} は上に述べた 2 つの応力 A_{ij}^0 と A'_{ij} との和である。式 (1-4) 及び (1-8) より、熱応力を考慮した場合には、歪と応力の関係式として、

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^0 - \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r \tau_r^{(2)} D}{1 + \tau_r^{(2)} D} \vartheta \delta_{ij} \\ &= -p_0 \delta_{ij} + \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{\lambda'_r D}{1 + \tau_r D} - \frac{2}{3} \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \varepsilon_{ij} - \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r \tau_r^{(2)} D}{1 + \tau_r^{(2)} D} \vartheta \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1-9)$$

を得る。

§2 内部エネルギー

物質の内部エネルギーの増加は、その物質が外力によってなされた仕事と、熱伝導によりその物質へ流れ込んだエネルギーの和である。

物質の一部分を考え、その運動エネルギーと内部エネルギーを夫々^{1,2)},

$$L = \frac{1}{2} \int \rho_0 u^2 d\mathbf{x} \quad (2-1)$$

$$E = \frac{1}{2} \int \rho_0 U d\mathbf{x} \quad (2-2)$$

と表わす。ここに $d\mathbf{x}$ は体積要素で、 U は単位質量当りの内部エネルギーである。微小時間 dt における L と E の増分 dL , dE は、

$$dL = dt \int \rho_0 u_i \frac{du_i}{dt} d\mathbf{x} = dt \int u_i \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} d\mathbf{x} + dt \int \rho_0 u_i X_i d\mathbf{x} \quad (2-3)$$

$$dE = dt \int \rho_0 \frac{dU}{dt} d\mathbf{x} \quad (2-4)$$

である。物質の表面力によって物質になされる仕事 W_1 は次のように表わせる。

$$W_1 = dt \int X_{i,\nu} u_i dS = -dt \int A_{ij} \cos(\nu, x_j) u_i dS \quad (2-5)$$

ここで、 ν は内向き法線、 $X_{i,\nu}$ は表面要素 dS に垂直な外力の x_i 成分である。体積力によってなされる仕事 W_2 は、

$$W_2 = dt \int \rho_0 u_i X_i d\mathbf{x} \quad (2-6)$$

となる。物質が外力によって為される仕事 W は W_1 と W_2 の和に等しいから、

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = -dt \int A_{ij} \cos(\nu, x_j) u_i dS + dt \int \rho_0 u_i X_i d\mathbf{x} \\ &= dt \int \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij} u_i) d\mathbf{x} + dt \int \rho_0 u_i X_i d\mathbf{x} \\ &= dL + dt \int A_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = dL + dt \int A_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-7)$$

又、系に流入する熱エネルギー Q は次のように表わせる。

$$Q = dt \int q_\nu dS = -dt \int \frac{\partial q_j}{\partial x_j} d\mathbf{x} \quad (2-8)$$

ここで、 q_j は熱流ベクトルの成分、 q_ν は dS に垂直な成分である。

エネルギー保存則は、

$$dL + dE = W + Q \quad (2-9)$$

である。この式に (2-3), (2-4), (2-7), (2-8) を代入して、エネルギー保存則は

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} = A_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2-10)$$

となる。

熱力学的独立変数として温度と歪とを採っているので、内部エネルギーの増し分は、

$$\delta U = \delta U_\varepsilon + \delta U_T \quad (2-11)$$

と表わせる。ここに、 δU_ε , δU_T は等歪状態及び等温状態での内部エネルギーの増し分を表わす。即ち

$$\delta U_\varepsilon(t) = C_0 \delta T(t) + \sum_{r=1}^s C_r \left\{ \delta T - \int_0^\infty \bar{f}_r(t') \delta T(t-t') dt' \right\} \quad (2-12)$$

$$\int_0^\infty \bar{f}_r(t') dt' = 1 \quad (r=1, 2, \dots, s) \quad (2-13)$$

$$\delta U_T = b_0 \delta \varepsilon_{kk}(t) + \sum_{r=1}^{s'} b_{ij}^{(r)} \left\{ \delta \varepsilon_{ij} - \int_0^\infty \bar{f}_r(t') \delta \varepsilon_{ij}(t-t') dt' \right\} \quad (2-14)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{f}_r(t') dt' = 1 \quad (r=1, 2, \dots, s') \quad (2-15)$$

である。また $\bar{f}_r(t')$, $\bar{\bar{f}}_r(t')$ を夫々,

$$\bar{f}_r(t') = \frac{1}{\tau_r^{(3)}} \exp(-t'/\tau_r^{(3)}) \quad (\tau_r^{(3)} > 0) \quad (2-16)$$

$$\bar{\bar{f}}_r(t') = \frac{1}{\tau_r^{(4)}} \exp(-t'/\tau_r^{(4)}) \quad (\tau_r^{(4)} > 0) \quad (2-17)$$

として、調和振動を行なう系に関しては、

$$\delta U = \left\{ C_0 + \sum_{r=1}^s \frac{C_r \tau_r^{(3)} D}{1 + \tau_r^{(3)} D} \right\} \delta T + \left\{ b_0 \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{s'} \frac{b_{ij}^{(r)} \tau_r^{(4)} D}{1 + \tau_r^{(4)} D} \right\} \delta \varepsilon_{ij} \quad (2-18)$$

を得る。式 (2-18) を微分形に書き直せば、

$$dU = \left\{ C_0 + \sum_{r=1}^s \frac{C_r \tau_r^{(3)} D}{1 + \tau_r^{(3)} D} \right\} dT + \left\{ b_0 \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{s'} \frac{b_{ij}^{(r)} \tau_r^{(4)} D}{1 + \tau_r^{(4)} D} \right\} d\varepsilon_{ij} \quad (2-19)$$

となる。

§3 熱流ベクトルについて^{3~7)}

熱伝導についての Fourier の法則

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\kappa = \text{const.}) \quad (3-1)$$

は、温度勾配の発生と同時に熱の流れが生じることを表わしている。ここで、 κ は熱伝導率である。一般に、物質の温度は、その物質を構成する分子の振動（格子振動）の激しさに依存する。熱の流れは格子振動の伝播によって引き起こされる。格子振動の伝播速度は有限の大きさを持つので、熱流の伝わる速さも有限である。従って、熱伝導についての Fourier 則を次のように考えよう。

$$q_j = - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r}{1 + \tau_r^{(r)} D} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3-2)$$

ここで、 $\tau_r^{(r)}$ は有限の大きさを持つ緩和時間である。又、 $D = d/dt$ 。 κ_r は部分的熱伝導率である。この熱伝導率演算子をさらに書き直して、式 (3-2) は、

$$q_j = - \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r \tau_r^{(r)} D}{1 + \tau_r^{(r)} D} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3-3)$$

となる。但し、

$$\kappa_0 = \sum_{r=1}^p \kappa_r \quad (3-4)$$

は、熱的緩和現象を伴わない場合の熱伝導率である。従って、振動数無限大のとき、

$$\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r \tau_r^{(r)} D}{1 + \tau_r^{(r)} D} \longrightarrow 0$$

となる。本論文に於ては、式 (3-2) に比べて更に一般的な式 (3-3) を使用する。

§4 超音波への応用

体積力を考慮しない場合の粘弾性体の運動方程式、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4-1)$$

と、エネルギー保存則 (2-10) に熱流ベクトル (3-3) を代入した式,

$$\rho_0 \frac{dU}{dt} = A_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r \tau_l^{(r)} D}{1 + \tau_l^{(r)} D} \right) \Delta \vartheta \quad (4-2)$$

を用いる。式 (1-9), (2-19) を (4-1), (4-2) に代入し、一次の微小量のみを考えると,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \left\{ k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{\lambda'_r D}{1 + \tau_r D} - \frac{2}{3} \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \right\} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2 \sum_{r=1}^m \frac{\mu'_r D}{1 + \tau_r^{(1)} D} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r \tau_r^{(2)} D}{1 + \tau_r^{(2)} D} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (4-3)$$

$$\rho_0 \left\{ \left\{ C_0 + \sum_{r=1}^s \frac{C_r \tau_r^{(3)} D}{1 + \tau_r^{(3)} D} \right\} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \left\{ b_0 \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{s'} \frac{b_{ij}^{(r)} \tau_r^{(4)} D}{1 + \tau_r^{(4)} D} \right\} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right\} = -\rho_0 \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r \tau_l^{(r)} D}{1 + \tau_l^{(r)} D} \right) \Delta \vartheta \quad (4-4)$$

を得る。

ここで、特別な場合として、円振動数 ω で $+x_1$ 方向へ進む平面波を考える。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x, & \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} &= 0 \\ \xi_1 &= \Re[\xi \exp(i\omega t - \beta x)], & \xi_2 &= \xi_3 = 0 \\ \vartheta &= \delta T = \Re[\theta \exp(i\omega t - \beta x)] \\ \varepsilon_{kk} &= \varepsilon_{11} = -\beta \xi \exp(i\omega t - \beta x), & \Im m[\beta] &> 0 \\ \varepsilon_{ij} &= 0 \quad (i=j=1 \text{ を除く}) \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

式 (4-5) を運動方程式 (4-3) とエネルギー保存則 (4-4) に代入して,

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho_0 \omega^2 + \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{i\omega \lambda'_r}{1 + i\omega \tau_r} + \frac{4}{3} \sum_{r=1}^m \frac{i\omega \mu'_r}{1 + i\omega \tau_r^{(1)}} \right) \beta^2 \right\} \xi + \sum_{r=1}^n \frac{i\omega \alpha_r \tau_r^{(2)}}{1 + i\omega \tau_r^{(2)}} \beta \theta = 0 \quad (4-6) \\ & -i\omega \beta \left(\frac{p_0}{\rho_0} + b_0 + \sum_{r=1}^s \frac{i\omega b_{11}^{(r)} \tau_r^{(4)}}{1 + i\omega \tau_r^{(4)}} \right) \xi + \left\{ i\omega \left(C_0 + \sum_{r=1}^{s'} \frac{i\omega C_r \tau_r^{(3)}}{1 + i\omega \tau_r^{(3)}} \right) - \frac{1}{\rho_0} \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{i\omega \kappa_r \tau_l^{(r)}}{1 + i\omega \tau_l^{(r)}} \right) \beta^2 \right\} \theta = 0 \end{aligned} \quad (4-7)$$

を得る。式 (4-6), (4-7) が ξ, θ について解を持つためには,

$$A\beta^4 + B\beta^2 + \Gamma = 0 \quad (4-8)$$

である。但し,

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{i\omega \kappa_r \tau_l^{(r)}}{1 + i\omega \tau_l^{(r)}} \right) \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{i\omega \lambda'_r}{1 + i\omega \tau_r} + \frac{4}{3} \sum_{r=1}^m \frac{i\omega \mu'_r}{1 + i\omega \tau_r^{(1)}} \right) \\ B &= \left(i\omega C_0 - \sum_{r=1}^s \frac{\omega^2 C_r \tau_r^{(3)}}{1 + i\omega \tau_r^{(3)}} \right) \left(k_0 + \sum_{r=1}^l \frac{i\omega \lambda'_r}{1 + i\omega \tau_r} + \frac{4}{3} \sum_{r=1}^m \frac{i\omega \mu'_r}{1 + i\omega \tau_r^{(1)}} \right) - \\ & \quad - \left(\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{i\omega \kappa_r \tau_l^{(r)}}{1 + i\omega \tau_l^{(r)}} \right) \omega^2 - \left(\sum_{r=1}^n \frac{\omega^2 \alpha_r \tau_r^{(2)}}{1 + i\omega \tau_r^{(2)}} \right) \left(\frac{p_0}{\rho_0} + b_0 + \sum_{r=1}^{s'} \frac{i\omega b_{11}^{(r)} \tau_r^{(4)}}{1 + i\omega \tau_r^{(4)}} \right) \\ \Gamma &= i\omega \rho_0 \left(C_0 + \sum_{r=1}^s \frac{i\omega C_r \tau_r^{(3)}}{1 + i\omega \tau_r^{(3)}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

とおいた。式 (4-8) から β を円振動数 ω の関数として求めることができる。超音波の速度 v 及び単位長当りの吸収係数 a は夫々,

$$v = \frac{\omega}{\Im m[\beta]} \quad (4-10)$$

$$a = \Re e[\beta] \quad (4-11)$$

から求められる。

式 (4-8) は β についての 4 次方程式であるため、根は 4 個存在する。そのうちの二組の根は

物質中を伝わる弾性波に対応し、夫々 $+x$ 方向と $-x$ 方向へ進む波を表わす。他の一組の根は熱伝導項に起因する波に対応し、夫々 $+x$ 方向と $-x$ 方向へ進む波を表わす。この波は、熱伝導係数に対応する演算子、

$$\kappa_0 - \sum_{r=1}^p \frac{\kappa_r \tau_l^{(r)} D}{1 + \tau_l^{(r)} D}$$

が本質的に利いてくる波動である。この波動は、上記の演算子が零に近づくと共に消失する。

§5 計算結果及び結論

計算するに当たって、次のように仮定した。

$$\begin{aligned} l=m=n=s=s'=p=1 \\ \tau_r = \tau_r^{(1)} = \tau_r^{(2)} = \tau_r^{(3)} = \tau_r^{(4)} = \tau, \quad \tau_l^{(1)} = \tau_l, \quad \kappa_1 = \kappa_r \\ b_{11}^{(r)} = 0 \quad (b_0 \gg b_{11}) \\ C_r = 0 \quad (C_0 \gg C_r) \end{aligned}$$

熱伝導項の影響を調べるために、式 (3-1), (3-2), (3-3) の3個の式を用いた。 κ , κ_0 , κ_r の大きさを変え、又、 τ_l の大きさを変えて、速度及び吸収係数を求めた。

計算に用いた数値は、室温 (20°C) に於ける純水のデータを採用した。熱伝導率の数値としては、 $5.86 \times 10^3 \sim 10^5 \text{ erg cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} / ^\circ\text{C}$ の値の範囲で計算を行った。 τ_l の数値は $\tau \times 10^{-1} \sim 10$ の程度に採った。

尚、以下の図の中に現れる v_0 は、極く低い振動数に於ける超音波の速度、

$$v_0 = \sqrt{k_0 / \rho_0}$$

である。

i) 弾性波について

弾性波の計算結果を Fig.-1, Fig.-2 に示す。Fig.-1 は伝播速度、Fig.-2 は一波長当りの吸収係数を表わす。横軸は $\omega\tau$ である。式 (1-9), (2-19), (4-3), (4-4), (4-6), (4-7) からわかるように、伝播速度の大きさは、 ω が増大するにつれて増加し、 $\omega \rightarrow \infty$ で飽和する。吸収係数の大きさは、 $\omega\tau \simeq 1$ のあたりで最大となり、 $\omega \rightarrow \infty$ 及び $\omega \rightarrow 0$ では0になっている。熱伝導率の式を、(3-1), (3-2), (3-3) と採り、 κ と τ_l を前記の範囲で変化させた場合、伝播速度と吸収係数の計算結果には、有効数字5桁の範囲で、 κ や τ_l の影響が見られなかった。この理由は次の如くである。

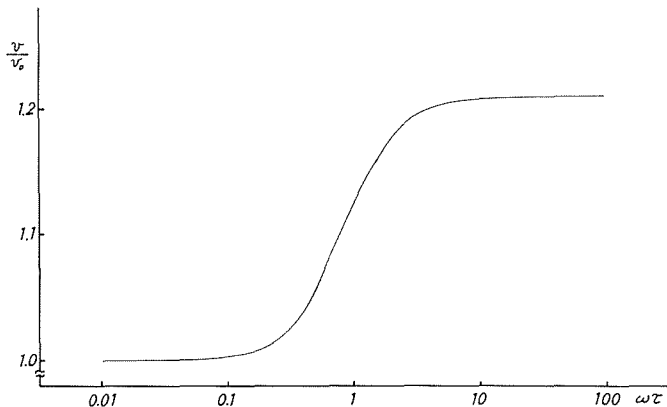


Fig.-1 Velocity of mechanical wave vs. frequency, Eq. (3-3)

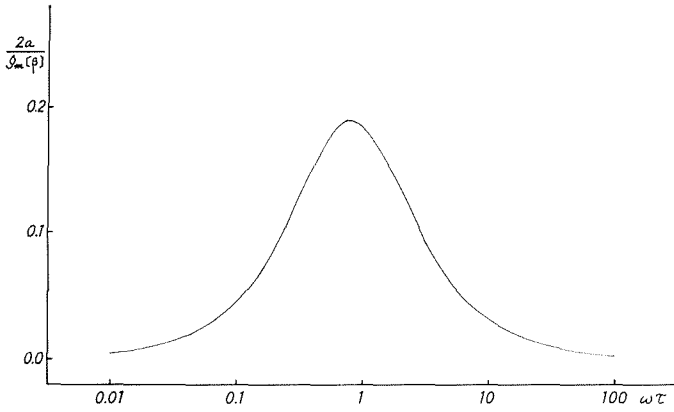
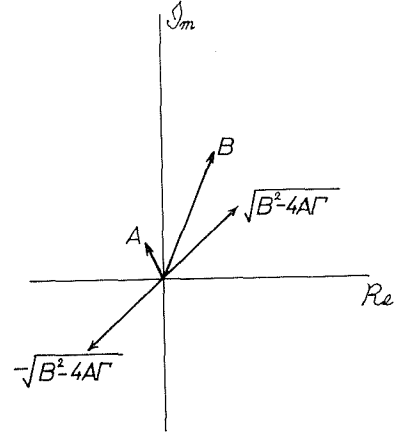


Fig.-2 Absorption of mechanical wave vs. frequency, Eq. (3-3)

Fig.-3 Relative position of A and $B \pm \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}$

熱伝導率が他の量に比べて小さいため、式 (4-8), (4-9) の中で、

$$A \ll B, \quad A \ll \Gamma$$

である。Fig.-3 に示す複素平面上で考えると、 κ が変化しても速度と吸収とに影響しないことがわかる。即ち、 $-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}$ は A の一次式と見て差支えない。従って、方程式 (4-8) の一根は

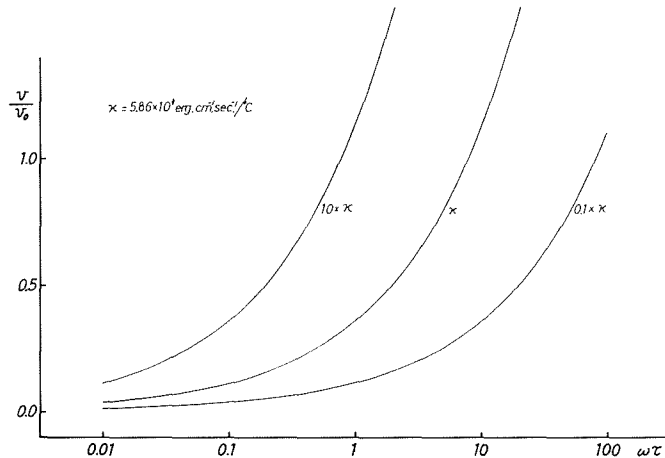
$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A} \simeq \text{const.}$$

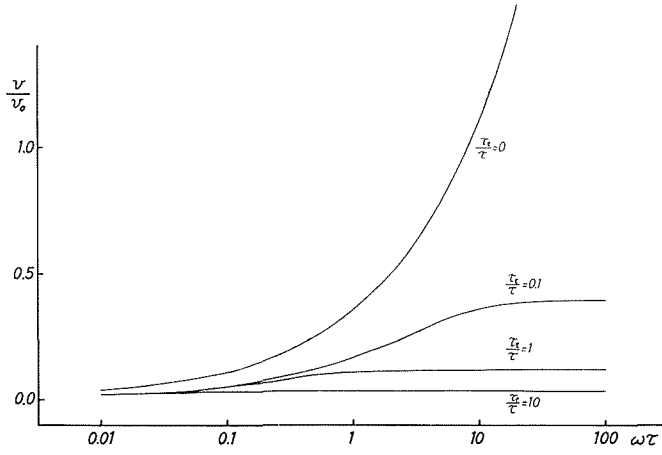
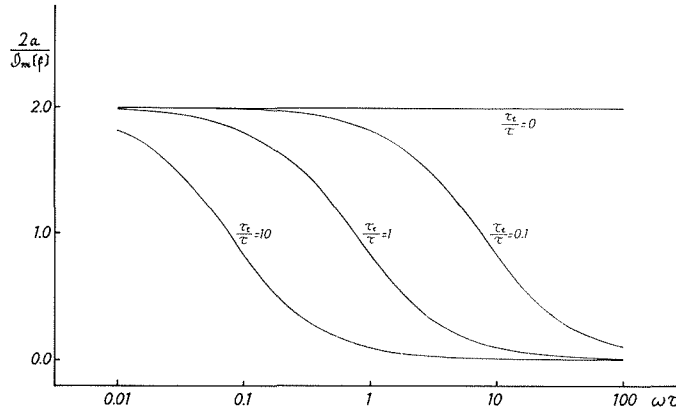
となる。言い換えると、 A が変化しても上式の左辺の複素数の絶対値及び偏角は夫々一定値を採る。

同様に考えると、複素数 $\{-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}\} / 2A$ は、 A が変化するにつれて、その絶対値も偏角も変化する。従って、複素数 $-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}$ と複素数 A とのなす角は、 A が変化すると共に変化する。

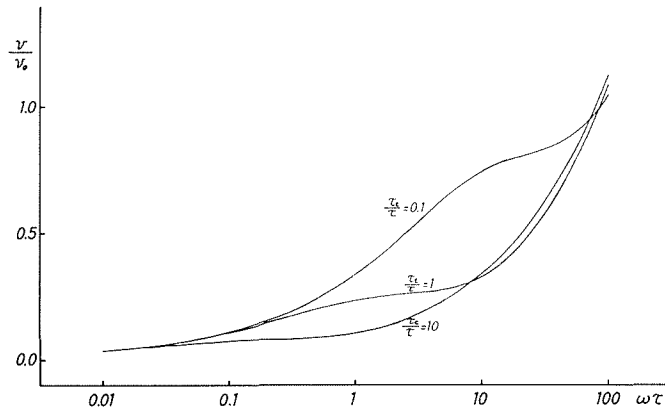
ii) 熱伝導項に起因する波について

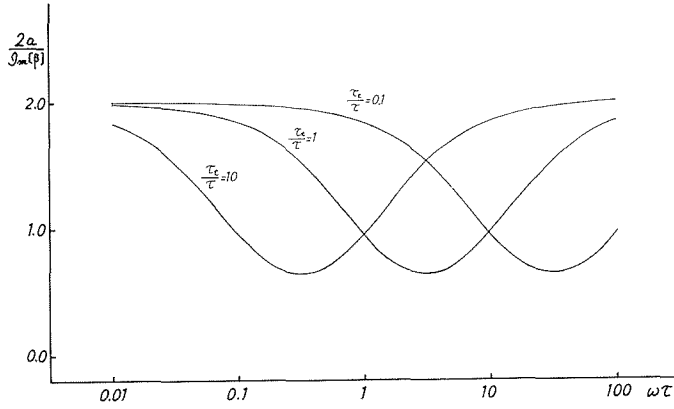
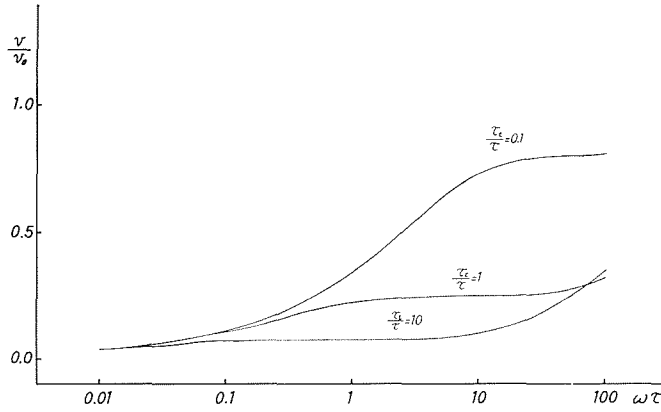
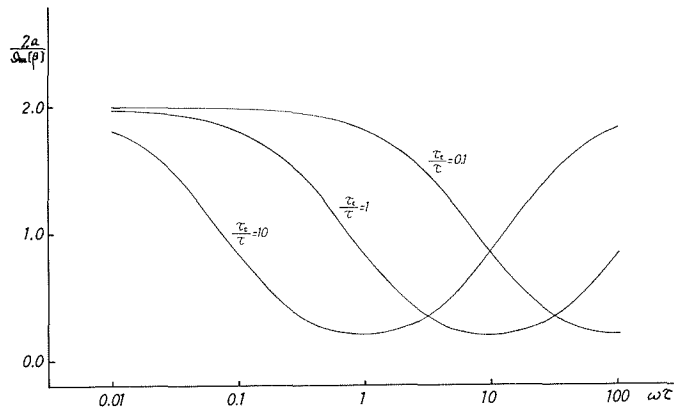
計算結果を Fig.-4~Fig.-10 に示す。Fig.-4 は式 (3-1) (即ち、 $\tau_t = 0$) を用いて、 κ をパラメータとした場合の伝播速度である。Fig.-5 は式 (3-2) を用いて、 τ_t をパラメータとして描い

Fig.-4 Velocity vs. frequency, Eq. (3-1) Thermal conductivity = $0.1\kappa, \kappa, 10\kappa$

Fig.-5 Velocity vs. frequency, Eq. (3-2) $\tau_t/\tau=0, 0.1, 1, 10$ Fig.-6 Absorption vs. frequency, Eq. (3-2) $\tau_t/\tau=0, 0.1, 1, 10$

た伝播速度を表わす。Fig.-6 は式 (3-2) を用いて、 τ_t をパラメータとした場合の一波長当りの吸収係数を表わす。式 (3-1) を用いた場合の吸収係数は、Fig.-6 の $\tau_t=0$ の直線である。 κ が大きくなれば、伝播速度も大きくなることが Fig.-4 に示されている。即ち、 κ の大きさが 1 桁変化したときの伝播速度を表わす曲線は、元の伝播速度を表わす曲線をそのまま $\omega\tau$ 軸の方向

Fig.-7 Velocity vs. frequency, Eq. (3-3) $\kappa_0 - \kappa_r = 0.1\kappa_0$

Fig.-8 Absorption vs. frequency, Eq. (3-3) $\kappa_0 - \kappa_r = 0.1\kappa_0$ Fig.-9 Velocity vs. frequency, Eq. (3-3) $\kappa_0 - \kappa_r = 0.01\kappa_0$ Fig.-10 Absorption vs. frequency, Eq. (3-3) $\kappa_0 - \kappa_r = 0.01\kappa_0$

へ、 $\omega\tau$ にして 1 桁移動した曲線に一致する。 $\omega \rightarrow \infty$ の場合には、式 (3-1) の下で述べたように、伝播速度が無限に大きくなることも示されている。Fig.-5 に示した様に、 τ_i が有限の大きさのとき、 $\omega \rightarrow \infty$ で伝播速度が飽和し、無限大にならないことがわかる。実際には、伝播速度は有限であるので、 τ_i は或る有限値を持つ。又、 κ_r の大きさの変化による影響は、式 (3-1) を用

いた場合と同様である。吸収曲線 Fig.-6 には、 τ_i が或る有限の大きさのとき、 ω が大きくなるに従い、吸収が 0 に近づくことが示されている。

式 (3-3) の熱伝導率を用いて計算した結果を、Fig.-7~Fig.-10 に示す。 $\kappa_0 - \kappa_r$ の値が $0.1\kappa_0$ になる場合の伝播速度を Fig.-7 に、吸収曲線を Fig.-8 に示す。Fig.-9, Fig.-10 は、 $\kappa_0 - \kappa_r$ の値が $0.01\kappa_0$ になる場合の伝播速度と吸収を表わす。Fig.-7~Fig.-10 では、熱伝導項として、式 (3-1) を用いた場合と (3-2) を用いた場合との中間的な傾向を示している。即ち、 $\omega\tau$ が小さいうちは (3-2) を用いた場合に似ており、 $\omega\tau$ が大きくなると (3-1) を用いた場合に似てくる。その類似の度合は、 $\kappa_0 - \kappa_r$ の値の大きさに依る。しかし、 $\kappa_0 - \kappa_r$ の値が 0 にならない限り、式 (3-3) の τ_i をいくら変化させても、式 (3-2) を用いた場合とは一致しない。

このことから、 $\omega \rightarrow \infty$ の時の $\kappa_0 - \kappa_r$ の値が図の値よりも更に小さい場合、又は τ_i の値が更に小さい場合には、熱伝導が、式 (3-3) の形で表わされると考えても差支えないであろう。この様に考えれば、熱伝導率は、式 (1-9), (2-19) に現われる弾性係数演算子、熱膨脹係数演算子、比熱演算子などと同様な形の演算子として表わされることになる。

文 献

- 1) H. L. Kuo: Memo. Fac. Engng. Nagoya Univ. **22** (1970), 196.
- 2) É. I. Takizawa: Memo. Fac. Engng. Ngoya Univ. **5** (1953), 1.
- 3) 橋爪夏樹: 固体物理, **6** (1971), 537.
- 4) S. Kaliski: IUTAM Symposia Vienna 1966 (Springer 1967), 159.
- 5) S. Kaliski: Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **4** (1965), 13.
- 6) S. Kaliski: Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **5** (1965), 13.
- 7) S. Kaliski: Proc. Vibr. Probl. **3** (1965), 6.