



Title	計算機によるマイクロ波ホログラムからの像再生
Author(s)	青木, 由直; Aoki, Yoshinao
Citation	北海道大學工學部研究報告, 64, 37-45
Issue Date	1972-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41091
Type	departmental bulletin paper
File Information	64_37-46.pdf



計算機によるマイクロ波ホログラムからの像再生

青 木 由 直*

(昭和46年11月30日受理)

Image Reconstruction from a Microwave Hologram by Computer

Yoshinao AOKI

(Received November 30, 1971)

Abstract

Numerical reconstruction of images from a microwave hologram was conducted using computer. A photograph of a microwave hologram was divided into 64×64 cells and each cell was considered as one sampled point. According to the emulsion brightness of the photograph, each sampled cell was digitized into three levels for the convenience of computer calculation. Computer reconstruction was done by calculating the Frensel transform of the digitized hologram using fast Fourier transform algorithm. The images displayed by the absolute value and real part of the calculated results were discussed. The theoretical analysis was conducted to explain the numerical reconstruction, referring to the optical reconstruction.

1. ま え が き

マイクロ波を利用したホログラフィにおいて、ホログラム作製には大きくわけて二通りの方法がある。一つは受波器や検波器でホログラム面を走査し、検波器からの出力信号を何らかの方法で表示・記録してホログラムを得る方法^{1),2)}であり、他の方法は液晶³⁾やポラロイド・フィルム⁴⁾などのような電界強度に感ずる素子を用い直接ホログラム面の電界分布を記録してマイクロ波ホログラムを作製する方法である。後者の方法は装置、方法が簡単で比較的短い時間でホログラムを作製することができる利点があるが、感度や記録できるホログラムの大きさといった点では前者の方法がすぐれている。また前者の方法は本来二次元の情報であるホログラム情報を走査という手段で一次元の情報に分解しているため、電子計算機を含む電気回路系でホログラム情報の伝達、処理が可能である。特に計算機を用いたホログラム情報の処理は、光学系や写真処理過程無しで再生像を得ることを可能にし、ホログラム情報を得るための走査方法、情報の伝達・変換方法、計算機による像再生の方法がさらに改良されれば、マイクロ波領域における実時間ホログラフィにいくらかでも近づけることができる点で応用価値のある技術となり得る可能性を含んでいる。本論文ではマイクロ波を利用して作製したホログラムから計算機を使用して像を再生する実験をおこない検討をくわえた。また理論解析により、得られた実験結果の説明をおこなった。

2. 理 論

2.1 ホログラムの作製と像再生

ホログラムの作製および像再生に関する理論解析は多くの文献でなされているので本論文では

* 電子工学科

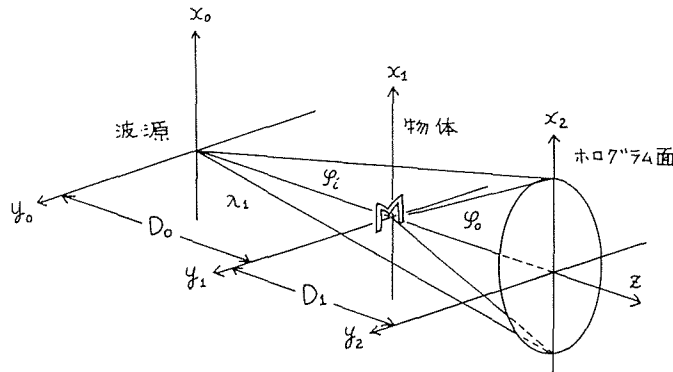


図1 マイクロ波ホログラムの作製

説明の都合上要点だけ述べる。図1においてマイクロ波波源からの照明波 φ_i で物体を照射し、照明波と物体からの物体波 φ_0 が干渉をおこした波動場を自乗検波で記録してマイクロ波ホログラム h を得たものとする。 h はつぎのように書ける。

$$h = (\varphi_i + \varphi_0)(\varphi_i + \varphi_0)^* = |\varphi_i|^2 + |\varphi_0|^2 + \varphi_i^* \varphi_0 + \varphi_i \varphi_0^* \quad (1)$$

ただし*印は複素共役を意味する。ここで照明波 φ_i を球面波とみなし、近軸光線の仮定のもとでつぎのようにあらわす。

$$\varphi_i(x_1, y_1) = \frac{A}{D_0} \exp\left[-ik_1\left(D_0 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2D_0}\right)\right] \quad (2)$$

ただし (x_1, y_1) は物体面での座標、 D_0 は図1に示した波源面から物体面までの距離、 A は定数、 $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ は波数で λ_1 はマイクロ波の波長である。ホログラム面での物体波 $\varphi_0(x_2, y_2)$ は式(2)を用いてフレネル・キルヒホッフ積分より近軸光線の仮定のもとでつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_2, y_2) &= \frac{i}{\lambda_1 D_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x_1, y_1) \cdot O(x_1, y_1) \\ &\quad \times \exp\left[-ik_1\left(D_1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2D_1}\right)\right] dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで D_1 は物体面からホログラム面までの距離、 $O(x_1, y_1)$ は物体をあらわす関数である。式(1)のホログラムを長さで $1/M$ に縮小して波長 λ_2 の平行光線にしたコヒーレント光で像再生をおこなった場合、像面 $x_3 - y_3$ での光の場 $\theta(x_3, y_3)$ はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \theta(x_3, y_3) &= \frac{i}{\lambda_2 D_2} e^{-ik_2 D_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(Mx_2, My_2) \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{ik_2}{2D_2} \{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\}\right] dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで D_2 はホログラム面から再生像面までの距離で、 $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ である。式(1)~(4)を用いると再生像を得る条件として次式が求まる(付録I参照)。

$$D_2 = \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2 M^2} \cdot \frac{D_1(D_0 + D_1)}{D_0} \quad (5)$$

式(5)において正負の符号はそれぞれ共役像、真の像に対応している。

マイクロ波ホログラムからの光学的像再生は式(4)のフレネル変換を光を用いてアナログ的におこなうことに相当する。これにたいし計算機を用いた像再生では式(4)の積分をデジタル的におこなって再生像を得ることになる。光学的像再生においては式(5)で決定される像面に再生像ができることになるが、 D_2 の値がわからなくとも光学系を移動させることにより容易に像面を観察者が判定できる。一方計算機による像再生においてはそれが不可能なため、式(5)の D_2 に

相当するパラメータをホログラム作製時の実験値より求め、得られた値の付近でパラメータを変化させ幾枚かの再生像を計算しそのうちから最もよいものを選ぶ方法がとられた。

2.2 ホログラムのデジタル・フーリエ変換

計算機による像再生⁵⁻⁶⁾においてはデジタル・フーリエ変換が基本になっており Cooley と Tukey によって開発された FFT (高速フーリエ変換法)⁹⁻¹¹⁾が用いられている。ホログラムがフーリエ変換ホログラムであれば、ホログラムのフーリエ (逆) 変換をおこなえば再生像が得られる。式 (1) であらわされるホログラムを図 2 に示すようにセルの大きさが $\Delta x \times \Delta y$ のメッシュに分割し、各セルを一つのサンプル点としてサンプルした値で得られるホログラムをつぎのようにあらわす。ただし m, n は零を含む正の整数にとられている。

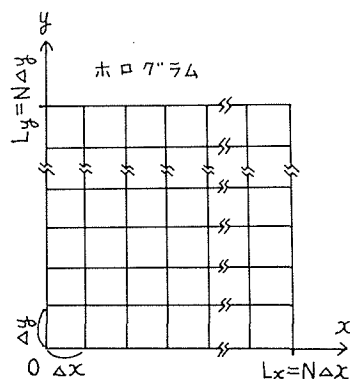


図2 ホログラムのサンプリング

$$h(Mx_2, My_2) \equiv h(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h(x, y) \delta\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right) \delta\left(\frac{y}{\Delta y} - n\right) \quad (6)$$

ここで δ はデルタ関数をあらわしており、 $N = Lx/\Delta x = Ly/\Delta y$ はサンプル点の数である。式 (6) であらわされたホログラムを一度フーリエ変換すると次式を得る (付録 II 参照)。

$$H(m', n') = \Delta x \Delta y \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h(m\Delta x, n\Delta y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{N}(mm' + nn')\right] \quad (7)$$

式 (7) において m', n' は付録に示されているように零を含む正の整数にとられている。式 (7) により、FFT を用いホログラムのサンプル値 $h(m\Delta x, n\Delta y)$ によりそのフーリエ・スペクトル $H(m', n')$ を求めることができる。

2.3 ホログラムのデジタル・フレネル変換

本論文で実験がおこなわれているマイクロ波ホログラフィは物体のフレネル回折縞を記録してホログラムを得ているから、このホログラムから像再生をおこなう場合にはホログラムにフレネル変換をほどこす必要がある。つまり式 (4) の積分をおこなうと再生像が求まるわけであるが、式 (4) はホログラム h と式 (8) に示す伝搬関数 f のコンヴォリューションとなっている。

$$f(x, y) = \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda_2 D_2}(x^2 + y^2)\right] \quad (8)$$

したがってコンヴォリューションのフーリエ変換は各々の関数のフーリエ変換の積になるということを利用して図 3 に示す順序で式 (4) の計算をおこなう。つまりホログラムおよび伝搬関数のフーリエ変換をそれぞれ求め、これらの積をフーリエ逆変換して再生像を得る。ここで伝搬関数は式 (8) で与えられ、このフーリエ変換は解析的に求まるので、ホログラムのフーリエ変換とスペクトル座標を一致させることを考慮すれば、式 (8) のフーリエ変換 $F(m', n')$ はつぎのように求まる (付録 III 参照)。

$$F(m', n') = -i\lambda_2 D_2 \exp\left[\frac{i\pi\lambda_2 D_2}{L^2}(m'^2 + n'^2)\right] \quad (9)$$

ただし m', n' は式 (7) のスペクトル座標と同じである。また簡単のため $L = Lx = Ly$ とホログラムの一辺の長さをきめている。ここで記録されるべき原ホログラム面を長さ L_0 の正方形と考えるならば、ホログラムの縮小率 M はつぎのようにあらわされる。

$$M = \frac{L_0}{L} \quad (10)$$

式 (5), (9), (10) よりつぎの新しいパラメータ D を考えておくと以後実際に数値的像再生をお

こなるのに便利である。

$$D \equiv \frac{\pi \lambda_0 D_2}{L^2} = \frac{\pi \lambda_1 D_1 (D_0 + D_1)}{L_0^2 D_0} \quad (11)$$

式(11)は再生像の像面の位置を決定するパラメータ D が、ホログラム作製時のパラメータである、マイクロ波の波長 λ_1 、波源面から物体面までの距離 D_0 、物体面からホログラム面までの距離 D_1 、原ホログラム面の大きさ L_0^2 により決定されることを意味している。

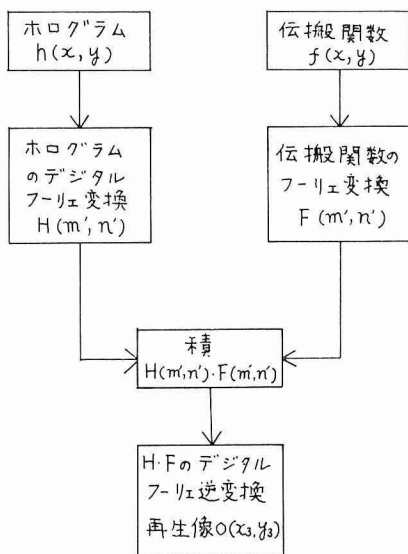


図3 計算機によりフレネル変換ホログラムから像を再生する計算方法

3. 実 験

3.1 マイクロ波ホログラムの作製と光学的像再生

マイクロ波ホログラムの作製および光学的像再生についてはすでに文献1で述べられているの

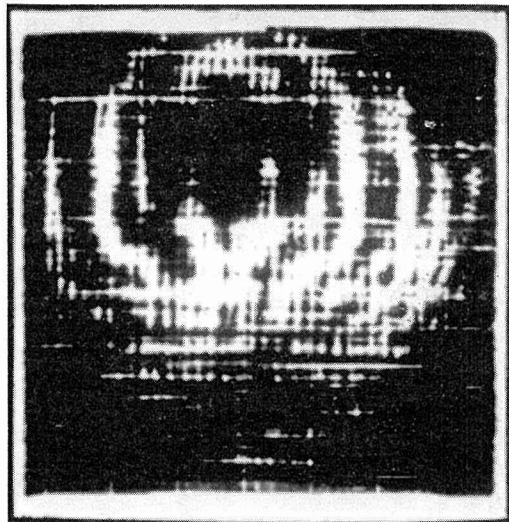


図4 マイクロ波ホログラム

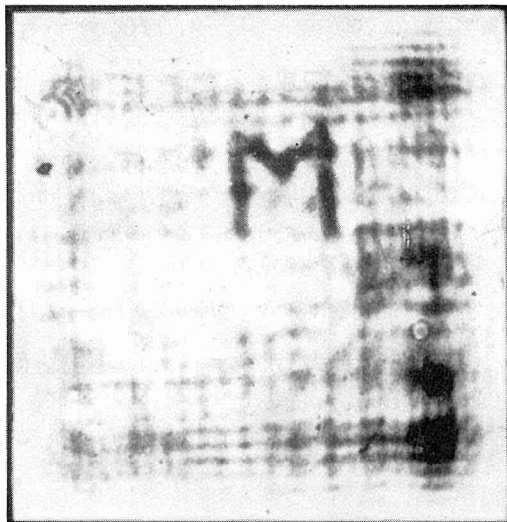


図5 光学的に再生された真の像

で本論文では文献1で得られた結果のみを簡単に記す。図1と同じ配置で、電磁ホーンから放射された周波数 9630 MHz 付近のマイクロ波をアルミニウム板で作った文字 M (大きさ $31\text{ cm} \times 33\text{ cm}$, 文字の太さ 4 cm) に照射する。ホログラム面ではダイオード検波器が約 $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ の空間を走査し、検波信号で CRT の輝度変調をおこない、CRT コープ上に表示された物体の回折パターンをフィルムに記録してマイクロ波ホログラムを得た。得られたマイクロ波ホログラムを図4に示す。

図4のホログラムを適当に縮小してレーザー光を照射すると真の像と共役像が得られる。このような光学的像再生で得られた真の像を図5に示す。像再生のための光学系その他については文献1に詳しく述べてある。

3.2 マイクロ波ホログラムのデジタル化

図4に示してあるホログラムはマイクロ波の波動場の強弱というアナログ量を記録しているのでアナログ・ホログラムともいえる。一方計算機を使用して像再生をおこなう場合、計算機入力として図4のホログラムをデジタル化する必要がある。本論文で用いたホログラムのデジタル化は、図4のホログラムを拡大し印画紙に焼きつけたものをもとにし、印画紙での黒白の濃淡を肉眼で判定しておこなった。レベルを3段階にわけ電界強度の強いところ (図4の写真では白い部分) を1, 弱いところ (黒い部分) を9, 中間を5の数値であらわした。式(6)または式(7)におけるサンプル点の数 N は $2^6=64$ にえらんだ。つまり図4のホログラムを $64 \times 64 = 4096$ 個のセルに分け、そのひとつひとつに、1, 5, 9の数値をあてはめた。このようにしてデジタル化したマイクロ波ホログラムを計算機のタイプライターで打ち出して表示したものを図6に示す。図6においては入力データ1, 5, 9の各々に対してプリンター出力として空白, ピリオッド, 文字 M をえらんだ。計算された再生像の表示にあたっては空白, \cdot , M のプリンター出力を用いた。

3.3 計算機による像再生

計算機による像再生にあたって、像面の位置決定という問題がある。フーリエ変換ホログラムであればホログラムを一度フーリエ (逆) 変換すれば再生像が得られるが、フレネル変換ホログラムの場合式(9)に含まれる再生像面の位置 D_2 がホログラム作製時の条件によりいろいろ変る。そこで式(11)のパラメータを導入しこの値をあらかじめ求めておく。図4のマイクロ波ホログラムは、 $\lambda_1=3.12\text{ cm}$, $D_0=5.5\text{ m}$, $D_1=2.2\text{ m}$, $L_0=2\text{ m}$ の条件で作製されたのでこれらの数値を式(11)に代入すると $D=0.076$ と求まる。そこで D の値を求めた値の付近で変化させて再生像を求めた。計算は図3の手順にしたがっておこなったが、FFTのプログラムその他計算の仕方の詳細についてはスペースがないので省略する。 $D=0.067, 0.071, 0.075$ の場合の計算機による再生像を図7-a~cに示す。図7をみると図6のホログラムにフレネル変換をほどこした場合、各々のフレネル変換面でのパターン形成の様子がわかる。 $D=0.071$ の図7-bが最良像面と考えられ、物体である文字 M の像が再生されているのがわかる。図7-bの再生像は共役像 (実像) に相当し、式(1)の $\varphi_i \varphi_0^*$ の項から再生される像である。ただし計算においては式(1)の他の項



図6 計算機プリンターにより表示されたサンプルされデジタル化されたマイクロ波ホログラム



のフレネル変換も同時におこなっているわけで、これはコヒーレント・バックグラウンド法によるホログラフィであれば光学的像再生の場合でもバックグラウンド光、真の像を再生する光、共役像を再生する光が同時に観察者の目に入る事情と同じである。図7-bにおいて共役像が再生されてみえるのは、光学的像再生の場合と同様に式(1)のバイアス項が一定であり、真の像を再生させる項は共役像の像面では発散してその影響が少なくなっているためである。なお計算機はIBMシステム360を使用し、計算時間は D を変化させ10枚の再生像を計算した場合8.8分であった。

図7-bの再生像と図5の光学的再生像を比べると、計算機による像が質が劣るようにみえるが、これは計算結果の表示に問題があり、適当なプロッター、その他CRTなどのディスプレイ装置が用いられれば再生像の質はもっと向上することが考えられる。またプリンターの関係より図7の再生像が縦に長くなって再生されているが、これもプロッターなどの使用により実際の像に相似なものに改善できる。さらにサンプル点の数の選び方やホログラムのデジタル化の際のレベルのとり方なども再生像の解像度という点から問題となるが、これらの点については今後の研究にゆだねたい。

3.4 絶対値と実数部による再生像の表示

一般に実数関数をフーリエまたはフレネル変換した場合、変換後の関数は複素関数となる。一方ホログラムは式(1)でもあきらかなように自乗検波で記録されるとしているから実数である。したがって図6のホログラムは実数データとして読み込まれるが、計算された結果は複素数であ



図7 計算機により再生された像、パラメータ D はそれぞれ $D=0.067$ (a), 0.071 (b), 0.075 (c)にえらんである

る。光学的像再生の場合は再生像が光の強度を記録して得られていることを考えて、図7-a~cの計算機による再生像は計算結果の絶対値をとって表示されている。しかし計算機による像再生の場合には特に絶対値をもって再生像を表示する必要はなく、計算されたフレネル変換の実数部や虚数部で像を表示してかまわない。図7-bの計算において実数部で再生像を表示すると図8のようになる。図7-bと図8の再生像を比べるとほとんど異っていない。ここで絶対値と実数部によって表示される再生像が異なる場合、元の物体についてより多くの情報を得ることができる。つまり式(3)に含まれる物体をあらわす関数 $O(x, y)$ は一般に複素関数で、照明波の振幅のみでなく位相も変化させる物体の場合も考えられる。ホログラムは物体からの波面を記録しかつ再生させるので、計算された再生波面の絶対値と実数部（または虚数部）が同じ物体の形を与えればこの物体は照明波の振幅のみを変化させるような構造をもったものだと考えられる。逆にいうと絶対値と実数部（または虚数部）による再生像が異なるような場合、再生波面を複素関数で求められる計算機による像再生の場合は、元の物体の照明波に対する位相構造も知り得るということの意味している。これらのことについては実際に照明波の位相も変化させるような物体を選びホログラムを作製し、それからの再生像を計算し検討すべき問題で今後の課題としたい。

4. む す び

マイクロ波ホログラムから計算機により像を再生させを実験をおこない再生像を得ることができた。本論文での実験は原理的なものでさらに検討すべき問題がいろいろある。まず計算機入力のためのホログラムのデジタル化で、本論文ではフィルムに記録された波動場の強弱を人間の目でデジタル化しており、不正確なうえ時間がかかり非常に不便である。ホログラム作製の際、検波器からのホログラム信号を適当な A-D 変換器を通してカード（またはテープ）さん孔機につなげばこの問題は大幅に改善される。つぎに計算された再生像の表示の問題がある。これは適当なプロッター、CRT ディスプレイなどの使用により本論文での再生像よりもっと質のよい再生像が得られるだろう。さらに本論文で述べられている技術を発展させ、実時間またはそれに近いもので再生像を得るシステムを考えれば、ホログラム面での高速度の走査や受波素子のアレイを用いる方法、ホログラム情報の伝送に伴うホログラム情報の圧縮、変換などの問題、計算機により on-line でホログラム情報を処理する方法などいろいろな問題がある。これらの問題の解決は今後のマイクロ波ホログラフィ技術の発展に欠かせぬものである。

謝辞 本論文の研究はカナダ国 LAVAL 大学物理学科において A. Boivin 教授の援助のもとでおこなわれたもので、同教授に感謝する。また FFT のプログラミングについては、当時北海道大学応用電気研究所 ME 部門の技官であった中村鎮雄君にお世話になったことを感謝する。

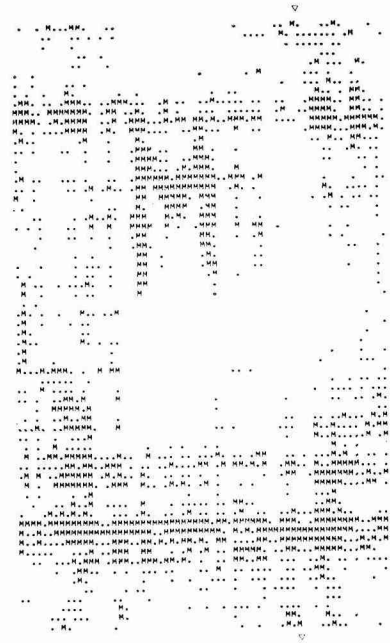


図8 計算値の実数部で表示された再生像

文 献

- 1) 青木由直：電子通信学会論文誌-B, 51-B (昭43), 7, p. 339.
- 2) 青木由直：電子通信学会論文誌-B, 52-B (昭44), 1, p. 1.
- 3) Augustine, C. F., C. Deutsch, D. Fritzier and E. Marom : Proc. IEEE (Letters), 57(1969), 7, p. 1333
- 4) Iizuka, K. : Proc. IEEE (Letters), 57(1969), 5, p. 813.
- 5) Lesem, L. B., P. Hirsch and J. A. Jordan, Jr. : Proc. of the Symposium of Mordern Optics (1967), p. 681, Polytechnic Press.
- 6) Goodman, J. W. and R. W. Lawrence : Applied Phys. Letters, 11(1967), p. 77.
- 7) Aoki, Y. and A. Boivin : Proc. IEEE (Letters), 58(1970), 5, p. 821.
- 8) Aoki, Y. : IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, AU-18 (1970), 3, p. 258.
- 9) Cooley, J. W. and J. W. Tukey : Math. Comput., 19(1965), p. 297.
- 10) Cochran, W. T. et al : Proc. IEEE, 55(1967), 10, p. 1664.
- 11) Brigham, E. O. and R. E. Morrow : IEEE Spectrum, December (1967), p. 63.

付 録

I 式 (5) の導出

簡単のため式 (1) のホログラムの $\varphi_i \varphi_0^*$ の項から再生される共役像について考えてみる。式 (4) において $h(Mx_2, My_2)$ を $\varphi_i(Mx_2, My_2) \cdot \varphi_0^*(Mx_2, My_2)$ でおきかえ、式 (2), 式 (3) を代入して整理すると式 (4) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(x_3, y_3) = & \frac{A^2}{\lambda_1 \lambda_2 D_0 D_2 (D_0 + D_1)} \exp \left[-ik_2 D_2 - \frac{ik_2}{2D_2} (x_3^2 + y_3^2) \right] \\ & \times \iiint_{-\infty}^{+\infty} O^*(x_1, y_1) \times \exp(i) \left[\frac{k_1 M^2 D_0 D_2 - k_2 D_1 (D_0 + D_1)}{2D_1 D_2 (D_0 + D_1)} (x_2^2 + y_2^2) \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_2 x_3}{D_2} - \frac{k_1 M x_1}{D_1} \right) x_2 + \left(\frac{k_2 y_3}{D_2} - \frac{k_1 M y_1}{D_1} \right) y_2 + \frac{k_1 (D_0 + D_1)}{2D_0 D_1} (x_1^2 + y_1^2) \right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (A-1) \end{aligned}$$

ここで本文式 (5) の関係 (共役像の場合 + 符号) があれば (A-1) の被積分指数関数中の $(x_2^2 + y_2^2)$ の係数が消えるから、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixy) dx = 2\pi \delta(y) \quad (A-2)$$

なる関係式を用いて積分を遂行すると結局次式を得る。

$$\Phi(x_3, y_3) = \frac{(k_1 AM)^2}{D_1 (D_0 + D_1)^2} e^{-ik_2 D_2} \cdot O^* \left(\frac{D_0 M}{D_0 + D_1} x_3, \frac{D_0 M}{D_0 + D_1} y_3 \right) \quad (A-3)$$

式 (A-3) より元の物体をあらわす関数 $O(x_1, y_1)$ に共役な関数 $O^*(D_0 M x_3 / D_0 + D_1, D_0 M y_3 / D_0 + D_1)$ が再生されることがわかる。真の像についても同様の議論が成り立つ。したがって本文式 (5) は再生像を与えるための条件となる。

II 式 (7) の導出

式 (6) であらわされたサンプルされたホログラムを一度フーリエ変換したものを $H(\xi, \eta)$ とすると、

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h(x, y) \delta \left(\frac{x}{\Delta x} - m \right) \delta \left(\frac{y}{\Delta y} - n \right) e^{-i2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy \\ = & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h(m \Delta x, n \Delta y) \exp \left[-i2\pi \left\{ \frac{m L x \xi}{(L x / \Delta x)} + \frac{n L y \eta}{(L y / \Delta y)} \right\} \right] \quad (A-4) \end{aligned}$$

式 (A-4) において $N = Lx / \Delta x = Ly / \Delta y$ の関係を代入してフーリエ変換面の座標 ξ と η に関して、 $H(\xi, \eta)$ を $1/Lx$ および $1/Ly$ の間隔でサンプルすると本文の式 (7) が得られる。ただし式 (7) において m' および n' は零を含む正の整数であり、 $H(m'/Lx, n'/Ly)$ は $H(m', n')$ とあらわされている。

III 式 (9) の導出

式 (8) であらわされた伝搬関数をフーリエ変換したものを $F(\xi, \eta)$ とすると

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda_2 D_2}(x^2 + y^2) - i2\pi(\xi x + \eta y)\right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i) \left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2 D_2}} x + \sqrt{\pi \lambda_2 D_2} \xi \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2 D_2}} y + \sqrt{\pi \lambda_2 D_2} \eta \right)^2 - \pi \lambda_2 D_2 (\xi^2 + \eta^2) \right] dx dy \quad (\text{A-5}) \end{aligned}$$

ここで

$$X = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2 D_2}} x + \sqrt{\pi \lambda_2 D_2} \xi \quad (\text{A-6})$$

$$Y = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2 D_2}} y + \sqrt{\pi \lambda_2 D_2} \eta$$

なる変数変換をおこない。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{i}} \quad (\text{A-7})$$

なる関係を用いると式 (A-5) はつぎのように求まる。

$$F(\xi, \eta) = -i\lambda_2 D_2 \exp\left[\frac{i\pi\lambda_2 D_2}{L^2}(L^2\xi^2 + L^2\eta^2)\right] \quad (\text{A-8})$$

式 (A-8) において ξ, η 座標に関して $1/L (=1/Lx=1/Ly)$ の間隔でサンプルして、 $F(m'/L, n'/L)$ を $F(m', n')$ とおくと本文の式 (9) が求まる。式 (9) においても m', n' は零を含む正の整数である。