図形が与えられた平面へのポテンシャル関数の導入

北島秀夫*

(昭和47年4月28日受理)

Introduction of a Potential Function on the Patterned Two-dimensional Plane

Hideo KITAJIMA

Abstract

In spite of the advance of Computer science many problems remain unsolved. One of them, and probably the most difficult one, is pattern recognition. This paper suggests an entirely new method of pattern recognition by introducing a potential function on the two-dimensional plane where a black and white pattern is given. The potential function relates disconnected parts of the pattern and converts its features into a set of simple loops.

1. まえがき

コンピューターによる情報処理技術は非常に進歩し，多方面に実用的な効果をあげている。しかし文字，図形をコンピューターに入力するには種々の困難が生ずる。その解決のために多くの提案がなされて，それぞれ成果をあげているが今一歩の前進が必要でありそれには過去の成果をふまえながらも不連続な跳躍が可欠と考えられる。ここで発表する考え方は具体的なパターン認識の方法ではなく，認識の対象であるところの図形そのものを変った角度から見直そうというものである。

今，平面上に一つだけ点がある場合と二つの点がある場合を考えてみよう。後の場合はそれぞれが点であることにおいて先の場合と同じであるが，それらが同時に平面上に存在するという意味では全く異っている。これは極めて当然のことであるが，これをどの様に形式化したら良いかということは大きな問題である。その一つの解決法を以下に述べることにするが，これから考える図形は簡単のため平面上にある白黒図形に限るものとしよう。まず平面上においてスカラ関数を定義し，その値は与えられた図形全体によって決まるものとする。つまり平面上の各点に図形全体できまるスカラ量を的応させ，この対応関係考察して図形がもつ情報を調べるという構想である。

2. 図形が与えられた平面におけるスカラ関数の定義

次の様な性質を有する写像 f: $R^2 \rightarrow R$ を考える。

(1) $f(\xi_1, \xi_2)$ は $(\xi_1, \xi_2) \in R^2$ に対して一意的に決まること。

* 電子工学科　電子回路工学講座

(2) ξ_1, ξ_2 の連続関数であること。

(3) 微分可能であること。

f によって図形が与えられた $x_1 x_2$ 平面の点 (x_1, x_2) に $f(x_1, x_2)$ を対応させるものとする。ここで"図形が与えられた平面"とは平面の各点が $\{0, 1\}$ に写像Pによって対応づけられている場合をさす。そして f の具体的な関数形はPによって定められるものとする。$x_1 x_2$ 平面にさらに x_3 軸をつけ加えることにより三次元直交デカルト座標系をつくる。この座標系によって次のように曲面を定義しよう。一般に曲面は

$$x_1 = x_1(u, v)$$
$$x_2 = x_2(u, v)$$
$$x_3 = x_3(u, v)$$

というように径数表示されるが，ここでは x_1, x_2 を径数 u, v と一致させ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= v \\ x_3 &= f(u, v) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

とおく。こうして定められた曲面を図形曲面とよぶことにする。

3. 図形曲面の特異点，臨界点

曲面上の点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ において

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} < 2 \tag{2}$$

であるとき，$\boldsymbol{x}$ を特異点とよぶ。(1) によれば (2) の左辺は任意の $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 2 \tag{3}$$

であるから，この曲面は特異点をもたない。

また図形曲面上の点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ において

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0$$

となるとき $\boldsymbol{x}$ を臨界点とよぶことにする。

曲面の上の点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ を通る径数曲線の $\boldsymbol{x}$ における接線ベクトルは，u 曲線，v 曲線に対してそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_u &\equiv \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right) \\ \boldsymbol{x}_v &\equiv \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

であるから (1) を考慮すれば

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_u &= \left(1,\ 0,\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right) \\ \boldsymbol{x}_v &= \left(0,\ 1,\ \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となり，$\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ は一次独立であることがわかる。これはすでに述べた“特異点が存在しない”という事実に対応している (式 (3) を参照)。

臨界点においては

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0$$

であるから，(5) は

$$\boldsymbol{x}_u = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\boldsymbol{x}_v = (0,\ 1,\ 0)$$

となる。従って $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ の張る平面すなわち接平面は水平 ($x_1 x_2$ 平面に平行) である。また接平面が水平な点は明かに臨界点である。

4. 等高線の性質

地図を頼りに地形を調べる場合に等高線に注目するが，図形曲面も一種の地形とみることができるからこれと同様のことを行なうことにしよう。平面 $x_3=C$ (定数) と図形曲面の共有点の集合が空でない場合，その集合を高さ C 等高線 $\boldsymbol{H}_c$ という。特に $\boldsymbol{H}_c$ が臨界点を含まない時，$\boldsymbol{H}_c$ を正規等高線とよぶことにする。正規等高線上の任意の点 $x=(x_1, x_2, x_3)$ と，図形曲面上にある x の近くの点 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}$ を考える。ただし $\boldsymbol{dx}=(dx_1, dx_2, dx_3)$ である。この点もまた同じ等高線にあるためには

$$dx_3 = 0$$

であれば良い。すなわち

$$\begin{aligned} dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} dx \\ &= A_1 dx_1 + A_2 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

ただし

$$A_1 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \quad A_2 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$$

である。$\boldsymbol{x}$ は臨界点ではないから A_1, A_2 のうち少なくとも一方は 0 ではない。従って dx_1, dx_2 のうちいずれか一方は任意にとることができ，他方はそれによって一意的にきまる。こうして得られた dx_1, dx_2 の対によって $\boldsymbol{dx}=(dx_1, \boldsymbol{x}d_2, 0)$ が決まる。すぐわかるように $\boldsymbol{dx}$ と逆むきの $-\boldsymbol{dx}=(-dx_1, -dx_2, 0)$ を考えると，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{dx}$ も同じ等高線にある。$\boldsymbol{x}$ からみて $\boldsymbol{dx}$, $-\boldsymbol{dx}$ 以外の方向にはこの等高線上の点は $\boldsymbol{x}$ の近傍には存在しない。これらのことから正規等高線に関して次の様な性質が導かれる。

性質 1. 正規等高線には端点，分岐点は存在しない。

性質 2. 正規等高線の連結部分は単純閉曲線である。

異なった高さに関する二つの正規等高線は次の性質をもつ。

性質 3. 任意の $C\in[C_1, C_2]$ $(C_1\neq C_2)$ に対して等高線 $\boldsymbol{H}_c$ が正規等高線であるとき，正規等高線 $\boldsymbol{H}_{c_1}$ と $\boldsymbol{H}_{c_2}$ とは位相同形である。

(略証) まず図形曲面上において次の様な条件を満足する曲線を g 曲線として定義する。

g 曲線：

その上の任意の点で，そこを通る等高線と直交する。

g 曲線の性質：

ある点を通る g 曲線はその点が臨界点でないならばそこでは分岐することはない（臨界点以外の点では等高線の接線ベクトルはユニークであるから，これと直交する方向もユニークに決まる)。

この g 曲線を用いて写像 φ : $\boldsymbol{H}_{c_1}\rightarrow\boldsymbol{H}_{c_2}$ を次の様に定める。$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{H}_{c_1}$ に対して，$\boldsymbol{x}$ を通る g 曲線と $\boldsymbol{H}_{c_2}$ との交点を $\varphi(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{H}_{c_2}$ とする。φ が位相写像であることは容易に確認でき，$\boldsymbol{H}_{c_1}$ と $\boldsymbol{H}_{c_2}$ とが位相同形であることが導かれる。

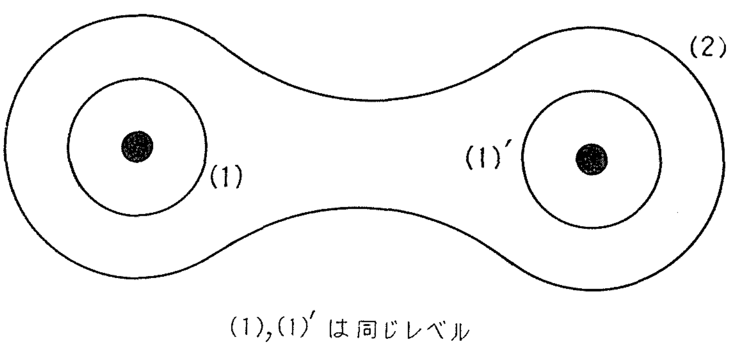
5. 図形曲面のパターン認識への応用

これまで述べた事は新しい結果ではないが，パターン認識に応用できそうな見通しがあるので整理しておいたわけである。なお，以下に述べることは推察の域を出ないことを断っておきたい。

地図上で地形を概観するのにはすべての等高線を見る必要はなく，いくつかの高さの等高線を知れば十分であることが多い。このことを図形曲面に対しても適用してみたらどうだろうか。この際，等高線としては正規等高線を用いることにすれば任意の図形曲面の概略が単純閉曲線群で表現されることになり，その取扱いが容易になると思われる。また図形中の非連結な成分の間の相互関係をも記述できる。有限個の等高線ではあくまで図形曲面の概略を記述するにすぎないが，これはかえって図形がもつ情報のうちの冗長な部分を除去することになるだろう。これから例をあげて上記のことを説明しよう。白黒図形を考え，$f(x_1, x_2)$ としては黒の部分が一様に帯電しているものとした時の点 (x_1, x_2) における電位をとることにする。そうすると，等電位線が等高線ということになる。

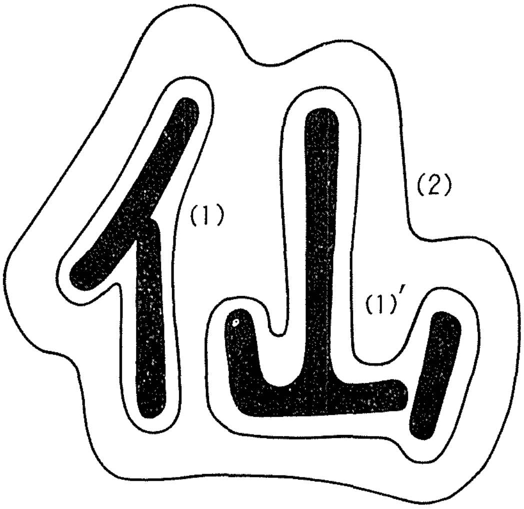
(例 1) 二点（有限の面積をもつ）

図 1 において，等高線 (1), (1)′ はそれぞれが点であることを表わし，(2) は二点が同時に存在することを表わしているものと解釈できる。((1), (1)′) と (2) とは位相同形ではないので臨界点



(1),(1)′ は同じレベル

図—1



(1),(1)′は同じレベル

図—2

を含む等高線がこの間に存在することが判る。

(例 2)

図 2 において (1), (1)′ は夫々偏と旁を記述し，(2) がその組合せを表現している。

6. 結　　論

平面図形が与えられた場合にその平面においてポテンシャル関数を導入し，図形曲面をつくり等高線の性質を調べた。その結果，図形を図形曲面として解釈した場合，単純閉曲線群に分解可能であることが判った。その際臨界点に関する情報は失われるわけであるが，異った高さの等高線同志の間の位相写像の存否によって臨界点の存在を知ることができる。

特別な形の図形（例えば，円，楕円）を除けばその解析的な表現は困難であるが図形曲面として捉える限りにおいて任意の図形が単純ループに分解される。単純ループであれば直交系への展開も容易である。しかしながら図形曲面の完全な記述のためには無限個の等高線が必要である。必要な情報を失わずに等高線の数を減らすこと，またその“高さ”をどの様に選ぶかが問題として残る。また図形→図形曲面の対応は良いとしてもこの逆，すなわち図形曲面が与えられた時もとの図形が一意に決まるとは限らない。どの様な図形の集合がその図形曲面に対応するかということも調べる必要がある。なお，簡単のため白黒図形としたが，すぐわかる様に濃淡のある場合にも拡張することができる。

最後に日頃御討論下さる電子回路工学講座の諸氏および電波伝送工学講座の仙石正和博士に感謝致します。