述語論理式間の含意関係判定の簡略化について

前　田　　隆*

(昭和47年4月28日受理)

On the Reduction of Recognition of the Implication Relations between Formulas in the Logic of Predicates

Takashi MAEDA

Abstract

In this paper, a method on the reduction of recognition of the implication relations between formulas in the logic of predicates was considered. By introducing the idea of equivalence in formulas, a reduced form in the logical formula is established. We have shown the validity of a simplified method in the recognition of the implication relations under this reduced form.

Furthermore, we have derived an idea of an extended equivalence, called *k*-degree equivalence, and have obtained the notion of "maximal partition of logical formulas" in connection with this equivalence, as a kind of learnings of the system. In addition, a concrete algorithm for the maximal partition of logical formulas is obtained.

1. まえがき

科学技術情報の著しい増大の下で，科学文献検索システムへの要求が高まり，これまで様々な角度から研究が進められてきている[2),4),7)]。これらの多くは主として実用化の観点から，いわば文献の形式的構造（検索語，語のカテゴリー，属性など）の情報をもとにするものである。これに対して，いわゆる機械翻訳の問題とも関連して，自然語の内容的・意味論[1)]的情報を取り扱うような研究も盛んになってきている[5),6)]。

文献（情報）検索の問題は，需要者の立場からみるならば，需要者の頭脳における問題発生および情報需要の形成から，いくつかのパターンの変換を仲介として，情報源から情報（文献）を得るまでの一連のプロセスである[4)*]。このように，高度な文献（情報）検索の問題は，ファイル知識を利用しての問題解決過程——多段決定過程——の最適な行動系列を求める問題として考察することができる。

科学文献の主要部は，概ね述語論理式で表現可能である[9)]。これらの観点から，上記の多段決定過程の単位的部分をなすとみなせる，二つの述語論理式の含意関係を判定するための試論が展開されている[8),10)]。

本論はこの判定手順の簡略化およびファイル知識の高度化（一種の学習過程）に関する一手法について考察したものである。

*（数物系共通）工業数学講座

2. 序　論

この章で述べることの詳細は文献10)にあるが，本論の位置づけおよび使用する記号等を明確にする上からも必要最低限の事項を要約しておくことにする。又，以下では通常の集合演算，述語論理における式の概念等に関する知識[3]を前題とする。ただし，式は既約型のみを，又一般性を失うことなく[3]，加法先頭標準型 (prenex disjunctive normal form) のみを対象とし，この全体を $\mathfrak{S}(L_3)$ で表わす。式における対象変数を表わす記号の集合を E^* で表わす。システムには E^* のある部分集合の要素間に成り立つ基本的述語が有限個与えられているものとし，この全体を R^* で表わす。例えば，$\exists e_1, e_2, \cdots, e_m \in E^*$, $\exists r \in R^*$ に対して $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 相互間に r という関係が成立しているとき，このことを $r(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ と表わすものとする。

【定義 2.1】　$\mathfrak{S}(L_3)$ の要素を明示するために次の定義を行なう。

$$L_1 \overset{\mathrm{df.}}{=} \left\{ r(e_1, e_2, \cdots, e_{\lambda(r)}) \mid r \in R^* ;\ e_1, e_2, \cdots, e_{\lambda(r)} \in E^* \right\}.$$

$$L_2 \overset{\mathrm{df.}}{=} \left\{ \wedge_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i \mid \mathfrak{P}_i \in L_1 ;\ k \text{ は自然数} \right\}.$$

$$L_3 \overset{\mathrm{df.}}{=} \left\{ \vee_{j=1}^{l} B_j \mid B_j \in L_2 ;\ l \text{ は自然数} \right\}.$$

但し，$\lambda(r)$ は r の関係をもつ E^* の要素数を表わす。

註：$\forall G \in \mathfrak{S}(L_3)$ に対して，量限定部分を $Z(G)$，スコープを $S(G)$ と表わし，$G = Z(G) \cdot S(G)$ と表わすことがある。

【定義 2.2】　一連の記号を次のように定義する。

1. $\mathfrak{F}[S_1, S_2]$：任意の空間 S_1 から S_2 の中への写像全体。
2. $\mathfrak{E}(G)$：式 G の対象変数の全体。この中で自由変数，束縛変数の集合をそれぞれ $\mathfrak{E}_f(G)$，$\mathfrak{E}_b(G)$ とする。
3. $(\varphi : S)$：写像 φ の定義域を S に制限したものを表わす。
4. $O^*[S]$：有限集合 S に導入され得る全順序関係の全体。
5. $\langle \eta, Q \rangle$：式 G に対して，$\eta \in O^*[\mathfrak{E}(G)]$ のとき，G の対象変数を η の順に量記号を作用させた量限定部分を表わす。$Q \in \{\forall, \exists\}$。対象変数 e にかかる量記号を $Q(e)$ とも書く。
6. $S(B) = \wedge_{i=1}^{k} \mathfrak{P}_i$ のとき，$\mathfrak{E}_1(B) = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_k\}$。
   $S(A) = \vee_{j=1}^{l} B_j$ のとき，$\mathfrak{E}_1(A) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{E}_1(B_j)$。$\mathfrak{E}_2(A) = \{B_1, B_2, \cdots, B_l\}$。

【定義 2.3】　システムには次式の形の“意味上の知識を表わす命題”が既知のものとして有限個与えられているものとする。

$$\langle \eta, Q^{\forall} \rangle \cdot (\mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_2) \tag{2.1}$$

但し，$\eta \in O^*[\mathfrak{E}(\mathfrak{P}_1) \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{P}_2)]$，$Q^{\forall}$ は量記号がすべて全称記号であることを示す。

註：(2.1)式の一意性は保障されているものとする。すなわち，$\mathfrak{P}_i = r_i(e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{i\lambda(r_i)})$, $(i=1, 2)$ において，$D = \mathfrak{E}(\mathfrak{P}_1) \cap \mathfrak{E}(\mathfrak{P}_2) \neq \phi$ のとき，$D_1 = \{k \mid e_{1k} \in D\}$，$D_2 = \{l \mid e_{2l} \in D\}$ とし，1対1写像 $\varphi \in \mathfrak{F}[D_1, D_2]$ に対して，$k \in D_1$ かつ $e_{1k} = e_{2l}$ ならば $\varphi(k) = l$ とする。こうして，(2.1)式の関係にある $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ を以下では，組 (r_1, φ, r_2) で表わし，この全体を L^* と書くことにする。

【定義 2.4】　L^* を用いての含意関係を次のように定義する。

(1)　$\mathfrak{P}_i = r_i(e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{i\lambda(r_i)})$, $(i=1, 2)$ に対して，$(r_1, \varphi, r_2) \in L^*$ とする。$\Psi_i \in \mathfrak{F}[\mathfrak{E}(\mathfrak{P}_i), \{1, 2, \cdots,$

$\lambda(r_1)\}]$ を $e_{ik}\in\mathfrak{E}(\mathfrak{P}_i)$ のとき，$\Psi_i(e_{ik})=k$ なるものとし，φ の定義域を $D'\subseteq\{1,2,\cdots,\lambda(r_1)\}$, $\Psi_1^{-1}(D')=D$, $\Psi_1'=(\Psi_1:D)$ とするとき，「$\Psi_2^{-1}\cdot\varphi\cdot\Psi_1'$ に関して $\mathfrak{P}_1\Rightarrow\mathfrak{P}_2$である」という。

(2) $B\in L_2$, $A\in L_3$ および $D\subseteq\mathfrak{E}(B)$ に対して1対1写像 $\varphi\in\mathfrak{F}[D,\mathfrak{E}(A)]$ が与えられたとき，$\nu\in\{0,1\}$ として，各 $\mathfrak{P}'\in\mathfrak{C}_1(B)$ に対して，

$$J_\nu^*(A\mid\mathfrak{P}',\varphi)\overset{\mathrm{df.}}{=}\left\{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{P}\in\mathfrak{C}_1(A),\ \varphi\text{ に関して }\mathfrak{P}'\Rightarrow\mathfrak{P}^{(\nu)}\right\}.$$

ここで $\mathfrak{P}^{(1)}=\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{(0)}=\overline{\mathfrak{P}}$ ($\mathfrak{P}$ の否定) とする。

$$J^*(\mathfrak{P}',\varphi,A)\overset{\mathrm{df.}}{=}\left\{X\mid X\in P(A),\ \forall\mathfrak{P}_i\in J_\nu^*(A|\mathfrak{P}',\varphi)\text{ に対して }X\text{ の第 }i\text{ 成分は }\nu\text{ である}\right\}.$$

ここで $P(A)$ は $\mathfrak{C}_1(A)$ の要素を $\{\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2,\cdots,\mathfrak{P}_m\}$ とするとき，m 次元論理変数 $(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m)$, $(\nu_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots,m)$ の値で L^* に矛盾しないものの全体である。

$$J^*(B,\varphi,A)=\bigcap_{\mathfrak{P}\in\mathfrak{C}_1(B)}J^*(\mathfrak{P},\varphi,A).$$

このとき，論理代数関数 A に関し，その変数領域 $J^*(B,\varphi,A)$ における値が1であるならば，「1対1写像 φ に関して，$B\Rightarrow A$ である」という。

(3) A_1, $A_2\in L_3$, $\exists\varphi\in\mathfrak{F}[D,\mathfrak{E}(A_2)]$, $(D\subseteq\mathfrak{E}(A_1))$ に対して，$\forall B\in\mathfrak{C}_2(A_1)$ について $(\varphi:\mathfrak{E}(B))$ に関して，$B\Rightarrow A_2$ が成り立つならば，「φ に関して，$A_1\Rightarrow A_2$ である」という。

【定義 2.5】　G_1, $G_2\in\mathfrak{S}(L_3)$ に対して，1対1写像 $\varphi\in\mathfrak{F}[D,\mathfrak{E}(G_2)]$, $(D\subseteq\mathfrak{E}(G_1))$ が次の条件を満たすとき，φ に関して $G_1\Rightarrow G_2$ であるという。ここで $Z(G_i)=\langle\eta_i,Q_i\rangle,(i=1,2)$ とおく。

Γ_1: φ に関して $S(G_1)\Rightarrow S(G_2)$.

Γ_2: $\varphi(\mathfrak{E}_f(G_1)\cap D)\subseteq\mathfrak{E}_f(G_2)$, $\varphi(\mathfrak{E}_b(G_1)\cap D)\subseteq\mathfrak{E}_b(G_2)$.

Γ_3: $(\varphi:\mathfrak{E}_b(G_1))$ は (η_1,η_2) に関して単調。

Γ_4: $\forall e\in D\cap\mathfrak{E}_b(G_1)$ に対して，$Q_1(e)=\exists$ で，$Q_2(\varphi(e))=\forall$ となることはない。

但し，Γ_3 における単調の意味は次のことである。F_1, $F_2\in E^*$, $D'\subseteq F_1$, $\exists\xi_i\in O^*[F_i]$, $(i=1,2)$ のとき，$\Psi\in\mathfrak{F}[D',F_2]$ に対して，$\exists e$, $e'\in D'$ が ξ_1 について e' が e に先行するならば，ξ_2 について $\Psi(e')$ が $\Psi(e)$ に先行することを，Ψ は (ξ_1,ξ_2) に関して単調であるという。

【補題 2.1】　G_1, $G_2\in\mathfrak{S}(L_3)$ に対して，適当な1対1写像 φ に関して $G_1\Rightarrow G_2$ であるとする。このとき，G_1 が真ならば常に $\pi(G_2|\varphi)$ は真である。但し，$\pi(G_2|\varphi)$ は G_2 の自由変数が φ の指定以前に偶然同一のものであるとき，これを他の異なる E^* の記号で置きかえた後の G_2 である。

こうして，任意の述語論理式間の含意関係はそれらの同値類を除けば，原理的には【定義2.4】および【定義2.5】に従って判定される。これらの妥当性は【補題2.1】によって与えられる。しかし，この判定には多大の計算が必要であり，又無駄も多い。その意味でこの手順の簡略化及びシステムの“学習”に相当するようなことがらは極めて重要な問題である。次章以下はそれらに関する一手法について述べる。

3. 論理式の縮退形

3.1 等価概念の導入

二つの論理式において，その部分として全く同じものを含んでいる場合，あるいは多く論理式に共通に含まれるような部分については，これを明示した形に表現を統一することにより，論理式の種々の処理を簡略化することができる。以下の議論では，論理式は加法先頭標準型に書か

れたもののスコープの部分のみに考察を限ることにする。すなわち，直接には前章で述べた含意関係判定における，【定義2.5】の条件 Γ_1 に関する簡略化を目的とするものである。

【定義 3.1】　$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in L_1$, $\exists \gamma$, $\gamma' \in O^*[\mathfrak{E}(\mathfrak{P}_1) \cup \mathfrak{E}(\mathfrak{P}_2)]$ に対して，次式が成り立つとき，$\mathfrak{P}_1$ と $\mathfrak{P}_2$ とは第1種の等価関係にあるという。これを $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$ と書き，対象変数は同記号に統一する。

$$\langle \gamma, Q^V \rangle \cdot (\mathfrak{P}_1 \supset \mathfrak{P}_2) = \langle \gamma', Q^V \rangle \cdot (\mathfrak{P}_2 \supset \mathfrak{P}_1) . \tag{3.1}$$

【定義 3.2】　$B_i = \wedge_{j=1}^{k} \mathfrak{P}_{ij} \in L_2$, $(i=1,2)$ に対して，1対1写像 $\varphi \in \mathfrak{F}[\mathfrak{E}_1(B_1), \mathfrak{E}_1(B_2)]$ が全単射の恒等写像となっているとき，すなわち，

$$Vi\Big[\exists j[\varphi(\mathfrak{P}_{1i}) = \mathfrak{P}_{2j}]\Big], \text{ かつ } Vj\Big[\exists i[\varphi^{-1}(\mathfrak{P}_{2j}) = \mathfrak{P}_{1i}]\Big],$$

のとき，B_1 と B_2 とは第2種の等価関係にあるという。これを $B_1 = B_2$ と書く。

【補題 3.1】　第1(2)種の等価関係は反射律，対称律，推移律を満たす同値関係となっている。

3.2　論理式の縮退形

二つの論理式，$B_i \in L_2$, $(i=1,2)$ において，$\mathfrak{E}_1(B_1)$ と $\mathfrak{E}_2(B_2)$ の間に第1種の等価関係にあるペアがいくつかあるとする。すなわち，等価部分を $v^e = \mathfrak{E}_1(B_1) \cap \mathfrak{E}_1(B_2) \neq \phi$ とする。このとき，B_1 と B_2 の等価部分を明示して書きかえると，$i=1,2$ に対して，次式のように書ける。

$$B_i = [\bigwedge_{\mathfrak{P} \in v^e} \mathfrak{P}] \wedge [\bigwedge_{\mathfrak{P} \in \mathfrak{E}_1(B_i) - v^e} \mathfrak{P}] . \tag{3.2}$$

このように B_i は互いの等価部分と等価でない部分とに“分割”されるが，これらを次式のように書くことにし，以下左辺は L_1 要素と同等に取り扱うことにする。

$$\mathfrak{P}^{(1)}\Big[v^e \,|\, I(1)\Big] \overset{\text{df.}}{=} \bigwedge_{\mathfrak{P} \in v^e} \mathfrak{P} . \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{P}^{(0)}[v_i^n] \overset{\text{df.}}{=} \bigwedge_{\mathfrak{P} \in v_i^n} \mathfrak{P}, \quad (i=1,2) \tag{3.4}$$

但し，$v_i^n = \mathfrak{E}_1(B_i) - v^e$, $I(1) = \{1(1), 2(1)\}$ とする。$I(1)$ の正確な規定は4章で行なうが，その要素 $i(1)$ の i は B_i の添字に相当し，(　) 内は等価の次数（後述）を示している。

【定義 3.2】　$i=1,2$ に対して，$B_i \in L_2$ が等価部分を持つとき，B_i を次式のように書いて，これを B_i の第1種の縮退形という。

$$B_i = \mathfrak{P}^{(1)}\Big[v^e \,|\, I(1)\Big] \wedge \mathfrak{P}^{(0)}[v_i^n] . \tag{3.5}$$

但し，v^e, v_i^n, $I(1)$ 等は (3.3), (3.4) 式におけるものとする。

【補題 3.2】　$i=1,2$ に対して，$B_i \in L_2$ が縮退形に書かれているとき，$\bigwedge_{\mathfrak{P} \in v^e} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'_e$, $\bigwedge_{\mathfrak{P} \in v_i^n} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'_i$ とすると，恒等写像 $\varphi_0 \in \mathfrak{F}[v, v]$, $(v \in \{v^e, v_i^n\})$ に関してそれぞれ，$\mathfrak{P}'_e \Rightarrow \mathfrak{P}^{(1)}[v^e | I(1)]$, $\mathfrak{P}'_i \Rightarrow \mathfrak{P}^{(0)}[v_i^n]$ が成り立つ。(自明)。

【定理 3.1】　$i=1,2$ に対して，$B_i \in L_2$ が第1種の縮退形に書かれているとき，1対1写像 $\varphi \in \mathfrak{F}[D, \mathfrak{E}(B_2)]$, $(D \subseteq \mathfrak{E}(B_1))$ に関して $B_1 \Rightarrow B_2$ が成り立つための必要十分条件は，$(\varphi : \mathfrak{E}(v_1^n))$ に関して，$\mathfrak{P}^{(0)}[v_1^n] \Rightarrow \mathfrak{P}^{(0)}[v_2^n]$ が成り立つことである。

（証　明）　縮退形の定義および【補題3.2】から，各 B_i は二項の積から成っているとしてよい。簡単のため，等価部分を $\mathfrak{P}'_e$, その他を $\mathfrak{P}'_i$ と書く。又，φ に関しては叙述から除く。$B_1 \Rightarrow B_2$ が成り立つとき，【定義2.4】から，$J^*(B_1, \varphi, B_2) = J^*(\mathfrak{P}'_e, \varphi, B_2) \cap J^*(\mathfrak{P}'_1, \varphi, B_2)$ における論理代数関数 B_2 の値は1となっている。そこで，$P(B_2)$ を一応考慮に入れないで，$J^*(B_1, \varphi, B_2)$ を作ってみる。まず $J^*(\mathfrak{P}'_e, \varphi, B_2)$ について考えると，$J_1^*(B_2 | \mathfrak{P}'_e, \varphi) = \{\mathfrak{P}'_e, \mathfrak{P}'_2\}$ および $J_1^*(B_2 | \mathfrak{P}'_e, \varphi) = \{\mathfrak{P}'_e\}$ の

二つの場合がある。ところが第1の場合は，$\mathfrak{P}_c \Rightarrow \mathfrak{P}_2'$ であり B_2 は $\mathfrak{P}_c$ に含まれてしまう。これはあり得ない。他方第2の場合は，(イ) $J_0^*(B_2|\mathfrak{P}_c', \varphi)=\{\mathfrak{P}_2'\}$，(ロ) $J_0^*(B_2|\mathfrak{P}_c', \varphi)=\phi$ の場合がある。ところが(イ)の場合は B_2 は矛盾していることになる。結局，$J^*(\mathfrak{P}_c', \varphi, B_2)=\{(1, \nu)\}$, $(\nu\in\{0, 1\})$ となる。$J^*(\mathfrak{P}_1', \varphi, B_2)$ についても同様な考察により，$J^*(\mathfrak{P}_1', \varphi, B_2)=\{(1, 1), (1, \nu), (\nu, 1)\}$ となる。故に，$J^*(B_1, \varphi, B_2)\neq\phi$ であれば，$\nu=1$ の場合しかない。このことは，$\mathfrak{P}_1'\Rightarrow\mathfrak{P}_2'$ を意味している。逆は明らか。

【定義 3.4】　$i=1,2$ に対して，$G_i\in L_3$ が第2種の等価部分を持つとき，G_i を次のように書いて，これを G_i の第2種の縮退形といい，右辺の各項は L_2 要素と同等に取り扱う。

$$G_i = B^{(1)}\Big[V^c\,|\,I(1)\Big]\vee B^{(0)}[V_i^n]\,. \tag{3.6}$$

但し，$V^c\subseteq\mathfrak{C}_2(G_i)$ は第2種の等価部分，$V_i^n=\mathfrak{C}_2(G_i)-V^c$, $I(1)=\{1(1), 2(1)\}$ である。

【補題 3.3】　$i=1,2$ に対して，$G_i\in L_3$ が縮退形に書かれているとき，$\bigvee_{B\in V^c} B=B_c'$, $\bigvee_{B\in V_i^n} B=B_i'$ とすると，恒等写像 $\varphi_0\in\mathfrak{F}[V, V]$, $(V\in\{V^c, V_i^n\})$ に関して，それぞれ，$B_c'\Rightarrow B^{(1)}[V^c|I(1)]$, $B_i'\Rightarrow B^{(0)}[V_i^n]$ が成り立つ。(自明)。

【定理 3.2】　$i=1,2$ に対して $G_i\in L_3$ が第2種の縮退形に書かれているとき，1対1写像 $\varphi\in\mathfrak{F}[D, \mathfrak{C}(G_2)]$ $(D\subseteq\mathfrak{C}(G_1))$ に関して $G_1\Rightarrow G_2$ が成り立つための必要十分条件は，$(\varphi:\mathfrak{C}(V_1^n))$ に関して，$B^{(0)}[V_1^n]\Rightarrow B^{(0)}[V_2^n]$ が成り立つことである。(証明は定理3.1の証明と同様の論法で容易なので略す)

【定理3.1】と【定理3.2】で示されたように，等価部分を共有する論理式間の含意関係の判定は，等価でない部分の含意関係の判定に帰着される。又，縮退形そのものが実は論理式の簡略化である。しかしこれにとどまらず，次章で展開するように，拡張された等価概念は，蓄積ファイルの一種の階層的構造を規定していく上で重要な役割を持っている。しかもこれはシステムの一種の学習過程ともなっている。

4.　k 次等価と極大分割

4.1　k 次等価の概念

3章では各々 L_2, L_3 レベルにおける二つの論理式について等価部分が存在する場合に，これらは縮退形という二項の積(和)からなる簡略化された形に帰着され，従って含意関係の判定はより少ない計算ですむことが示された。しかし一般には数多くあるファイル相互間において，それぞれのファイルが他の種々のファイルとの間に様々の大きさの等価部分を持つ可能性がある。従ってこれらの知識を最大限利用することが，記憶量の減少，判定手順の能率化の上からも重要なことである。k 次等価の概念はこれらの要請にもとづいて導入される。

【定義 4.1】　第1種の k 次等価を以下のように帰納的に定義する。

(1)　【定義3.1】における等価関係を1次等価とする。

(2)　$B_i\in L_2$ (以下 $i=1,2$) に対して，B_1, B_2 は $v^c\subseteq\mathfrak{C}_1(B_i)$ を k_0 次等価として持ち，更に $B_3\in L_2$ は B_i との間に $v_i=\mathfrak{C}_1(B_i)\cap\mathfrak{C}_1(B_3)\neq\phi$ を k_i 次等価として持ち，更に $v_0=v_1\cap v_2\neq\phi$ とする。このとき，v_0 は B_1, B_2, B_3 に共通する等価部分であり，その次数を

$$k \overset{\mathrm{df.}}{=} \min(k_0, k_1, k_2)\,,$$

とする。但し，これにともない，次の操作を行なう。

(i)　$v_0\subset v^c$ のとき，

(a)　$v_0 \subset v_i$ ならば，$k=k_j$ (以下 $j=0,1,2$) に対して，k_j に 1 加える。

(b)　$v_0 = v_i$ ならば，$k=k_0$ のとき，k_0 に 1 加える。

(ii)　$v_0 = v^e$ のとき，

(a)　$v_1 = v_2$ ならば，k_j は不変。

(b)　$v_{i'} \subset v_i (i', i=1,2, i' \neq i)$ ならば，$k=k_i$ のとき，k_i に 1 加える。

(c)　(a), (b) 以外のとき，k_j に 1 加える。

(3)　k 次等価はこれらの場合以外は定義されない。

以上の定義により，$B_i \in L_2 (i=1,2)$ 間に k 次等価が存在する場合，第 1 種の（拡張された）縮退形は次式のように書く。

$$B_i = \mathfrak{P}^{(k)}\Big[v^e \,|\, I(k)\Big] \wedge \mathfrak{P}^{(0)}[v_i^n]\,. \tag{4.1}$$

但し，$v^e \subseteq \mathfrak{C}_1(B_i)$ は k 次等価部分，$v_i^n = \mathfrak{C}_1(B_i) - v^e$, $I(k) = \{1(k), 2(k)\}$ である。前と同様に k 次等価部分 $\mathfrak{P}^{(k)}[\cdot]$，等価でない部分 $\mathfrak{P}^{(0)}[\cdot]$ は L_1 要素と同じ取り扱いをするものとする。

【定理 4.1】　$B_i = \wedge_{j=1}^{n_i} \mathfrak{P}_{ij} \in L_2\,(i=1,2\,;\, n_i$ は自然数) 間に k 次等価部分が存在する場合，次式が成り立つ。

$$1 \le k \le \min(n_i)\,. \tag{4.2}$$

（証 明）　集合 B の要素数を $\sharp(B)$ で表わす。1 次等価が存在する場合，等価部分を v_1 とすると，$\sharp(v_1) \ge 1$ 更に v_2 を 2 次等価として持つとすれば，【定義 4.1】から $v_2 \supset v_1$ であり，$\sharp(v_2) > \sharp(v_1)$。同様に k 次等価部分を v_k とすれば，$\sharp(v_k) \ge k$。一方常に $\sharp(v_k) \le \min(n_i)$ であるから，$k \le \min(n_i)$。

【定理 4.2】　$B_i = \wedge_{j=1}^{ni} \mathfrak{P}_{ij} \in L_2$, $(i=1,2,\cdots,N\,;\,N, ni$ は自然数) において，B_1 が $B_l\,(l=2,3,\cdots,N)$ との間にそれぞれ v_l を k_l 次等価として共有するならば次式が成り立つ。

$$1 \le \max(k_l) \le n_1\,. \tag{4.3}$$

【補題 4.1】　$i=1,2$ に対して，$B_i \in L_2$ 間に k 次等価部分が存在するとき，$\bigwedge_{\mathfrak{P} \in v^e} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'_e$, $\bigwedge_{\mathfrak{P} \in v_i^n} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'_i$ とすると，恒等写像 $\varphi_0 \in \mathfrak{F}[v, v]$, $(v \in \{v^e, v_i^n\})$ に関して，$\mathfrak{P}'_e \Rightarrow \mathfrak{P}^{(k)}[v^e | I(k)]\}$, $\mathfrak{P}'_i \Rightarrow \mathfrak{P}^{(0)}[v_i^n]$ が成り立つ。(自明)。

【定理 4.3】　第 1 種の拡張された縮退形についても，【定理 3.1】は成り立つ。(自明)。

全く同様な議論で L_3 レベルにおける，第 2 種の k 次等価概念，第 2 種の（拡張された）縮退形が定義される。これを次式のように書く。$G_i \in L_3, (i=1,\ 2)$ に対して，

$$G_i = B^{(k)}\Big[V^e \,|\, I(k)\Big] \wedge B^{(0)}[V_i^n]\,. \tag{4.4}$$

明らかに，【定理 4.1】～【定理 4.3】，【補題 4.1】にそれぞれ対応した定理，補題が成り立つ。これらを引用するときは，* をつけることにする。

4.2　論理式の極大分割

k 次等価の概念にもとづき，論理式の（等価関係に関する）極大分割の概念を導入する。これは 1 つの論理式に対して，他の論理式との間でこれまでに判明したすべての等価関係を “情報として” 保持した表示を求めるものである。その意味で，これは一種の “学習” ともいえるものである。学習が進めば進むほど情報が増え，ファイル知識は階層的に（次数との関連）構造化されていくことになるであろう。まず一般的な定義を与え，次に極大分割を具体的に求めるアルゴリズムを定式化する。

【定義 4.2】　空でない集合 S に対して，S の部分集合族 $H=\{A_\lambda\}$ は次の条件を満たすとき，S の（等価に関する）閉じた族という。

(1)　他の S' との間で，A_λ の１つは等価でない部分，他は等価部分となっている。但し，更に他の S'' との等価部分が A_λ と共通部分（これを A'_λ とする）をもつとき，$A_\lambda-A'_\lambda$ を新たに A_λ とし，A'_λ を H につけ加える。（この操作を H の細分という。）

(2)　$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}=\phi$, $(\lambda_1\neq\lambda_2)$.

(3)　$\bigcup_\lambda A_\lambda=S$.

【定義 4.3】　$B\in L_2$ に対して，$\mathfrak{C}_1(B)$ が等価に関する閉じた族 $H=\{v_\lambda\}$ をもつとき，B を次式のように書き，これを B の第１種の極大分割 (maximal partition) という。

$$B=\bigwedge_\lambda\Big[\bigwedge_{\mathfrak{P}\in v_\lambda}\mathfrak{P}\Big]. \tag{4.5}$$

【補題 4.2】　$B=\wedge_{j=1}^n\mathfrak{P}_j\in L_2$ が (4.5) のように極大分割されているとき，次式が成りたつ。

$$1\leq\lambda\leq n. \tag{4.6}$$

【定理 4.4】　$B_i\in L_2$, ($i=1,2,\cdots,M$；M は自然数) において，B_1 が B_l との間にそれぞれ等価部分を共有するとき，B_1 は一意な第１種の極大分割をもち，次式で表わすことができる。

$$B_1=\left[\bigwedge_{m=1}^{\lambda_0}\mathfrak{P}^{(k_m)}[v_m^e|I(k_m)]\right]\wedge\mathfrak{P}_{\lambda_0+1}^{(0)}[v_1^n]. \tag{4.7}$$

但し，各 m に対して，$k_m\overset{\mathrm{df.}}{=}\min(k|l(k)\in I(k_m))$, $H=\{v_m^e, v_1^n|m=1,2,\cdots,\lambda_0\}$ は $\mathfrak{C}_1(\dot{B}_1)$ の等価に関する閉じた族，$l(k)\in I(k_m)$ は B_1 と B_l とが v_m^e を k 次等価として共有することを意味するものとする。$\lambda_0=\#(H)-1$。

この定理の証明は容易であるので，実際にこれを求めるアルゴリズムを定式化することで，その正当性を示すことにする。

〈アルゴリズム 1〉

[I]　$M=2$ のときは，(4.1) 式における B_1 の縮退形となる。

[II]　$M\geq3$ のときは以下のように帰納的に求められる。B_1 は B_l ($l=2,3,\cdots,M-1$) との間で (4.7) のように極大分割されているとする。更に B_1 は B_M との間で v_M^e を k_M 次等価として共有するとき，次の操作により，B_1 は（より細分された）極大分割となる。

(1)　$l=1$, $j=0$ とおく。

(2)　l に１加える。

(i)　$l=\lambda_0+1$ のとき，$u=v_M^e\cap v_1^n$ をつくる。ⓐ $u=\phi$ ならば終了。ⓑ $u\neq\phi$ ならば，j に１加え，λ'_0 に j を加える。v_1^n-u, u をそれぞれ新たに v_1^n, $v_{\lambda'_0}^e$ とし，$k_{\lambda'_0}=k_M$ として終了。

(ii)　$l<\lambda_0+1$ のとき，$u_l=v_M^e\cap v_l^e$ をつくる。ⓐ $u_l=\phi$ ならば (2) へもどる。ⓑ $u_l\neq\phi$ ならば，j に１加え，$\lambda'_0=\lambda_0+j$ とする。$v_l^e-u_l$, u_l をそれぞれ新たに v_l^e, $v_{\lambda'_0}^e$ とする。$k_{\lambda'_0}=\min(k_l,k_M)$, $I(k_l)$ から u_l にのみに関する部分を除き，$I(k_{\lambda'_0})=\{l(k)|u_l$ を k 次等価としてもつ$\}$ とする。(3) へ進む。

(3)　$v_M^e-u_l$ を新たに v_M^e とする。

(i)　$v_M^e=\phi$ のとき終了。

(ii)　$v_M^e\neq\phi$ のとき，(2) へもどる。（アリゴリズム１終）。

この結果，B_1 は次式のように書き換えられる。

$$B_1=\left[\wedge_{m=1}^{\lambda_0'}\mathfrak{P}^{(k_m)}[v_m^e|I(k_m)]\right]\wedge\mathfrak{P}^{(0)}[v_1^n]. \tag{4.8}$$

但し，λ_0' は(4.7)における λ_0 に対して，族 H が細分された数だけ増している。

極大分割の有用性は，(4.7)式等から容易に推察されるように，$B_i \in L_2\ (i=1,2,\cdots,M)$ 相互間における等価関係が，$I(k_m)$ の要素を調べることにより，簡単に導き出せる点にある。もちろんこれで求められるのは，これまでの“学習”で判明している範囲での等価関係に限られる。等価部分は関連する v_m^e の和集合，その次数は $I(k_m)$ の要素に示されているものをとることに注意する必要がある。

4.3　極大分割の L_3 への拡張

極大分割の L_3 レベルへの単純な拡張は容易であるが，ここでは第2種の等価部分についてだけでなく，第1種の等価部分をも考慮に入れることにより，若干複雑になる。

L_3 要素の二つが等価部分を共有するとき，一般に次のような部分に分けて考えられる。(i) 第2種の等価部分，(ii) 第2種の等価部分ではないが，第1種の等価部分をもつ L_2 要素の集合——これを半等価部分とよぶ——，(iii), (i), (ii) 以外の部分。

そこで (ii) の半等価部分をも明示した極大分割を得るために，この全体の次数に相当するものを α と定めておく。但し，$I(k)$ における要素の(　)内は β と書くことにする。こうして，$i=1,2$ に対して，$G_i \in L_3$ が k 次等価部分，半等価部分をもつとき，G_i は一般に次式のように書ける。

$$G_i=B^{(k)}\left[V^e\,|\,I(k)\right]\vee B^{(\alpha)}\left[V_i^a|I(\beta)\right]\vee B^{(0)}[V_i^n]. \tag{4.9}$$

但し，V^e, V_i^a, V_i^n はそれぞれ上記の (i), (ii), (iii) に対応するものである。

【定義 4.2′】　【定義 4.2】における条件 (1) を拡張して，次の (1′) とする。(2), (3) は同じ。

(1′)　他の S' との間で，A_λ の1つは等価でない部分，他は等価部分，半等価部分となっている。但し，更に他の S'' との等価部分，半等価部分が A_λ と共通部分（それぞれ A_λ', A_λ'' とする）をもつとき，$A_\lambda-(A_\lambda' \cup A_\lambda'')$ を新たに A_λ とし，A_λ', A_λ'' を H につけ加える。（この操作を H の細分という）

この定義によって，H は $\mathfrak{C}_2(G)$, $(G \in L_3)$ の拡張された，閉じた族となる。

【定義 4.3′】　$G \in L_3$ に対して，$\mathfrak{C}_2(G)$ が拡張された閉じた族 $H=\{V_\lambda\}$ をもつとき，G を次式のように書き，G の第2種の極大分割という。

$$G=\bigvee_{\lambda}\,[\bigvee_{B\in V_\lambda} B]. \tag{4.10}$$

【定理 4.5】　$G_i \in L_3\ (i=1,2,\cdots,M)$ において G_1 は $G_l\ (l=2,3,\cdots,M)$ との間にそれぞれ第2種の等価部分，半等価部分を共有するとき，G_1 は一意な第2種の極大分割を持ち，次式のように書くことができる。

$$G_1=\left[\bigvee_{m=1}^{\lambda_0} B_m^{(k_m)}\left[V_m^e|I(k_m)\right]\right]\vee\left[\bigvee_{j=1}^{\delta_0} B^{(\alpha)}\left[V_j^a|I(\beta)\right]\right]\vee B^{(0)}[V_1^n]. \tag{4.11}$$

但し，各 m に対して $k_m=\min\{k|l(k)\in I(k_m)\}$, $H=\{V_m^e, V_j^a, V_1^n|m=1,2,\cdots,\lambda_0\,;\,j=1,2,\cdots,\delta_0\}$ は $\mathfrak{C}_2(G_1)$ の拡張された閉じた族となっている。λ_0, δ_0 はそれぞれこの族の V_m^e, V_j^a の数を示す。又 $\forall\, l(j)\in I(\beta)$ について $j=\beta$ でなければならない。(証明略)。

この定理の正当性は次の第2種の極大分割を求めるアルゴリズムの定式化で示す。

〈アルゴリズム 2〉

[I] $M=2$ のとき，G_1 と G_2 とは第 2 種の縮退形に書ける。そこで $B^{(0)}[V_i^n]$ について第 1 種の等価部分を持つ L_2 要素から V_i^e をつくればよい。

[II] $M\geq 3$ のとき，G_1 は $G_l\,(l=2,3,\cdots,M-1)$ との関係で (4.11) に書けているとする。更に G_1 は G_M と V_M^e, V_M^n をそれぞれ等価部分，半等価部分として共有しているとする。このとき以下の手順で G_1 の新しい極大分割を求めることができる。これは次の四つの段階に分けられる。

(1) V_M^e と $\{V_l^e, V_1^n | l=1,2,\cdots,\lambda_0\}$ との間における族の細分。

(2) V_M^e と $\{V_l^n, V_1^n | l=1,2,\cdots,\delta_0\,;\ V_1^n$ は一般に (1) で修正されたもの$\}$ との間における細分。

(3) V_M^n と (1), (2) で修正された $\{V_l^e, V_1^n | l=1,2,\cdots,\lambda_0\}$ との間における細分。

(4) V_M^n と (1), (2), (3) で修正された $\{V_l^n, V_1^n | l=1,2,\cdots,\delta_0\}$ との間における族の細分。

これら (1)～(4) の具体的な手順は〈アルゴリズム 1〉における [II] とほとんど同様なので省略する。

5. あとがき

述語論理式の含意関係判定手順の簡略化の 1 手法として，論理式の等価関係の概念を導入し，論理式の縮退形とそのもとでの含意関係判定の妥当性を示した。更に等価関係を拡張して k 次等価の概念を導き，システムの一種の学習ともいうべき，極大分割とこれを求める具体的なアルゴリズムを定式化した。

本論での考察の主な対象は加法先頭標準型に書かれた述語論理式のスコープの部分，すなわち論理代数式の部分に限られていたが，上記の諸結果と量限定部分との関係等の問題が残されている。

最後に，本論をまとめるにあたり，種々の点で御配慮いただいた工業数学講座河口教授ならびに懇切に討論していただいた精密工学科萩原氏に深く感謝します。

参考文献

1) Kemeny, J. G.: Symb. Logic, 21 (1956).
2) Giuliano, V. E.: Vistas in Information Handling (1963), pp. 30–54.
3) 例えば，ノヴィコフ： 記号論理学 (1968), 東京図書 (株).
4) 概論的には例えば，高橋達郎： 情報検索 (昭 43), 高橋正明： 科学技術情報の検索方法* (昭 45), 共に東洋経済新報社.
5) Minsky, M., ed.: Semantic Information Processing, The MIT Press (1968)
6) 岡田直之・他： 信学論, 52–C (1969).
7) 笹森勝之助： 第 10 回情報処理学会講演予稿集 (昭 44)—以後毎回何件か講演がある.
8) 萩原芳樹, 前田　隆： 第 11 回情報処理学会講演予稿集 (昭 45).
9) 木村文彦・他： 第 12 回情報処理学会講演予稿集 (昭 46).
10) 萩原芳樹： 信学論, 55–D (1972).