



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Branch and Bound法による最適制御の計算法
Author(s)	石動, 善久; 小山, 昭一; 三浦, 良一
Citation	北海道大學工學部研究報告, 66, 13-22
Issue Date	1973-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41109
Type	departmental bulletin paper
File Information	66_13-22.pdf



Branch and Bound 法による最適制御の計算法

石 動 善 久* 小 山 昭 一* 三 浦 良 一*

(昭和 47 年 9 月 30 日受理)

Computational Methods for Optimal Control by Branch and Bound Methods

Yoshihisa ISURUGI, Shoichi KOYAMA, Ryoichi MIURA

(Received September 30, 1972)

Abstract

In this paper, computational methods for the solution of optimal control are presented using Branch-and-Bound methods.

The problem treated here is the means by which to calculate optimal control of linear time-continuous and time-discrete systems with constrained state and control variables under the quadratic performance measure.

In order to determine the lower bounds of the performance index, Dynamic Programming recursive formula was used for the time-discrete systems. This is due to the fact that the lower bounds of optimal control with unconstrained state and control variables could be considered lower than those of the optimal control with constrained variables. And for the time-continuous systems, the Brockett's inequality was used.

Our methods are useful and effective when the number of dimensions of the control space is smaller than that of the state space.

1. 緒 言

一般に制御変数および状態変数に制限のある最適制御問題では、解析的に解くことがきわめて困難であり、結局は数値解を求めることになる。この種の最適制御問題を解く従来の方法には、代表的なものとしてポントリャギンの状態変数に制限のある場合の最大原理¹⁾とベルマンの動的計画法 (以下 D.P 法と略す) がある。前者は問題の解に対する解析的見通しを与える点において非常にすぐれているが、実際の解を求める際に 2 点境界値問題に帰着し、数値計算上多くの困難をとまう。後者の場合、最適性の原理より直接的に数値計算と結びついており、しかも制限条件の多い方が計算に有利であるという利点を持つ。しかし、システムの次元が増加すると急激に計算量が増大することになり多次元問題では非実用的なものになる。

本研究は、このような状態変数および制御変数に制限のある最適制御問題の数値解法をより有効なものにするための試みとして、有力な探索法の一つである Branch and Bound 法 (以下 B.B 法と略す) を用いることを検討し、その結果について考察するものである。

対象としたシステムは、時間離散値系および時間連続系であり、いずれの場合も 2 次形式の評価関数を仮定している。

* 精密工学科 自動制御工学講座

2. 問題の設定

状態変数および制御変数に制限のある最適制御問題として、時間離散値系および時間連続系の各場合に対応して次の2つの型の問題を設定する。

時間離散値系

始めに時間離散値システムを次のように設定する。

システム

$$\mathbf{x}(k+1) = G(k)\mathbf{x}(k) + H(k)\mathbf{u}(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

初期条件

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2)$$

制限条件

$$f_i(\mathbf{x}) \leq c_i \quad i=1, 2, \dots, l \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}_i \in U, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (2.4)$$

ただし $U = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$

評価関数

$$J_N = \sum_{k=1}^N \{\mathbf{x}'(k)Q(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k-1)\mathbf{u}(k-1)\} \quad (2.5)$$

ここで、 $'$ は転置を示し、

$\mathbf{x}$: n 次元状態ベクトル

$\mathbf{u}$: r 次元制御ベクトル、各々の要素は m 個の量子化された値をとる。(2.4) 式の関係はこのことを示す。

また、

$G(k)$: $(n \times n)$ 正則マトリクス

$Q(k)$: $(n \times n)$ 正定値マトリクス

と仮定する。なお制御過程は N 段で終了するものとする。

【問題1】

(2.1) および (2.2) 式で表わされる時間離散値システムを (2.3), (2.4) 式の制限条件のもとで (2.5) 式を最小にする制御 $\mathbf{u}(k)$ を求めよ。

時間連続系

次に時間連続システムについては、次のように仮定する。

システム

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

初期条件

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.7)$$

制限条件

$$f_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \quad i=1, 2, \dots, l \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i, \quad iT \leq t < (i+1)T, \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

$$\mathbf{u}_i \in U \quad \text{ただし, } U = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\} \quad (2.9)$$

評価関数

$$J = \int_0^{t_f} \{\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)\} dt \quad (2.10)$$

ただし, $t_f = NT$

変数の用い方は時間離散値系のときほぼ同様である。ただし, ここでの制御は離散的な信号が 0 次ホールドされた形のもので, 制御変数の取り得る値は量子化されており有限である。

【問題 2】

(2.6), (2.7) 式で表わされる時間連続システムについて, (2.8), (2.9) 式の制限条件のもとで (2.10) 式の評価関数の値を最小にする制御を求めよ。

3. 最適制御問題への B. B 法の適用

3.1 B. B 法

B. B 法²⁾はその名の通り, 基本的には, 1) *branching*; すべての可能な解の空間のある適当な部分空間 (ノード) をさらに小さな部分空間に分割すること, 2) *bounding*; 分割された各部分空間の解に対応する評価関数の最小 (大) 値を推定し, その推定値により次に分割すべき部分空間を決定すること, の 2 つのステップを最適解が得られるまで繰返し行なう方法である。

したがって, この手法を適用するにあたって考慮すべき点は *branching* および *bounding* の方法である。特に, 後者の *bounding* における最小 (大) 値の推定の計算法がこの方法における大きな問題である。

一般に, 可能な解の空間内のある部分空間に対応する評価関数値の最小 (大) 値を推定することは困難であり, またその推定値の精度がこの方法における計算量と非常に関係が深い。

この B. B 法を前述の最適制御問題に適用するにあたって, *branching* に関しては次のように考える。

1. 選択的にある制御を採用する場合と, その制御を採用しない場合の 2 つのノードに分岐させる。

2. 可能なすべての制御について分岐させる。

一般に, 1 の分岐方法ではそれに続く最小 (大) 値の推定が困難である。しかしながら, 適当な推定方法がみつけれられれば 1 の方が計算時間の短縮および記憶容量の節減の点で有利になり得る。

例えば, 制御がバング・バングになるような場合, 制御を選択するアルゴリズムとその制御を

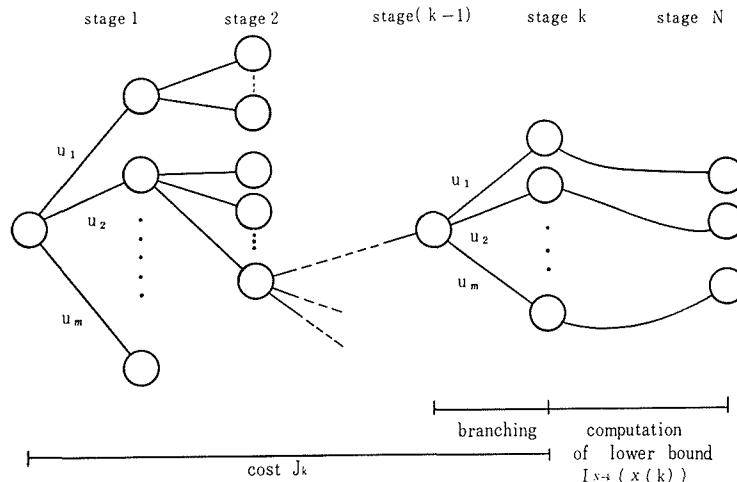


Fig. 1. B. B methods ○: node

用いない場合の最小（大）値の推定法が知られている場合には、1 の分岐方法が非常に有効になる。

bounding はこの場合、評価関数を最小にするので下限を推定する必要がある、その推定値として適当な下界 (lower bound) を取ることになる。このとき、用いられる下界は次の3つの性質を持たなければならない。いま、 k 段目まで制御が進んだものとして、 k 段目までの評価 $J_k[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)]$ 、 k 段目から最終段までの評価の下限の推定値を $I_{N-k}[\mathbf{x}(k)]$ 、全体の評価の下界を $\hat{J}_N^k[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)]$ とするならば、次式が成り立つ。

$$\hat{J}_N^k[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)] = J_k[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)] + I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] \quad (3.1)$$

ただし、 $\mathbf{x}(k)$ は $\mathbf{x}_0$ に制御 $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ を適用したときに遷移する $t=k$ における状態を示す。ここで、

1. ある k 段目から最終段までの評価の下限の推定値はその最適な評価よりも小さいか等しい。

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] \leq J_{N-k}^*[\mathbf{x}(k)] \quad (3.2)$$

ただし、 J_{N-k}^* は k 段で考えた残りの段に対する最適評価である。

2. あるノードの下界はそのノードより分岐されたノードの下界よりも等しいか小さい。

$$J_k[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)] + I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] \leq J_{k+1}[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k)] + I_{N-(k+1)}[\mathbf{x}(k+1)] \quad (3.3)$$

3. 最終段でのノードの下界はその評価に等しい。

$$\hat{J}_N^N[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1)] = J_N[\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1)] \quad (3.4)$$

3.2 問題1の計算法

問題1の型の下限の推定値 $I_{N-k}[\mathbf{x}(k)]$ を求めるために次の考え方を採用する。「状態変数および制御変数に制限のない最適制御問題を考えると、この最適な評価は、もとの制限条件のついた最適制御問題の最適な評価の下界となっている。」これに基づいて I_{N-k} 、 $\hat{J}_N^k$ を求めると、明らかに下界の性質を満足している。制限条件 (2.3), (2.4) 式のない最適制御問題を解く手法として、解析的に漸化式の形で解くことのできる D. P 法を用いる。

D. P の逐次計算法によると、最適な評価関数の値は次式のように表現される。(付録 A を参照³⁾)

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}'(k)P(N-k)\mathbf{x}(k) \quad (3.5)$$

ただし、 P は $(n \times n)$ 正定値マトリクスで、

$$P(N-k) = L_{GG}(N-(k+1)) + L_{GH}(N-(k+1))D(N-k) \quad (3.6)$$

$$D(N-k) = -[L_{HH}(N-(k+1)) + I]^{-1}L_{HG}(N-(k+1)) \quad (3.7)$$

ただし、

$$\begin{cases} L_{GG}(N-(k+1)) = G'(k)[Q(k+1) + P(N-(k+1))]G(k) \\ L_{GH}(N-(k+1)) = G'(k)[Q(k+1) + P(N-(k+1))]H(k) \\ L_{HG}(N-(k+1)) = H'(k)[Q(k+1) + P(N-(k+1))]G(k) \\ L_{HH}(N-(k+1)) = H'(k)[Q(k+1) + P(N-(k+1))]H(k) \end{cases} \quad (3.8)$$

I は単位マトリクスである。

(3.6), (3.7), (3.8) 式と初期値 $P(0)=0$ より $P(N-k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ を求めることができる。この P を下界マトリクスと名付ける。

次に計算手順とフローチャートを簡単に示す。(Fig. 2)

- i) $P(0)=0$ より始めて、(3.6), (3.7), (3.8) 式より各段での下界マトリクスを求める。

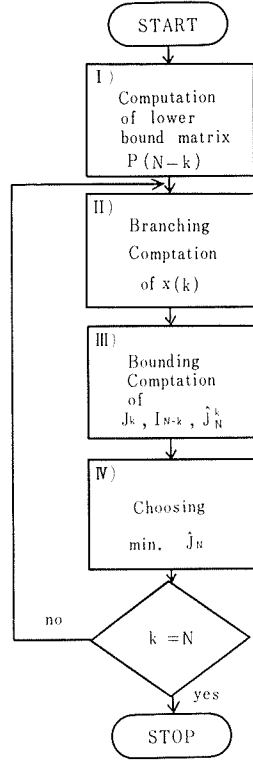


Fig. 2. Flow-Chart of algorithm for optimal control by B. B methods

ii) 量子化された制御について $m=1$ から順に分岐を行ない、状態値 $\mathbf{x}(k)$ を (2.1) 式で計算し、(2.3) 式の条件を満たしているか否かを判定し、もし満たしていなければそのノードを消去する。

iii) 生じたノードに対して、その段までの評価 J_k 、残りの段の下界 I_{N-k} と全体の下界 $\hat{J}_N^k$ をそれぞれ、(2.5)、(3.5)、(3.1) 式より計算する。

iv) まだ分岐されていないノードに関する下界 $\hat{J}_N$ を比較し、最小の下界をもつノードを選択する。

v) もし、選ばれたノードが最終段以外のノードであれば ii) へもどる。最終段であれば最適解が求まったことになる。

3.3 問題 2 の計算法

問題 2 の型の下限の推定値 $I_{N-k}[\mathbf{x}(kT)]$ を求めるために Brockett⁴⁾, Canales⁵⁾ の不等式を使う。

【定理】(Brockett)

homogeneous なシステムの評価 J_h に対する最適な評価の割合は次の不等式に従う。

$$\frac{J^*}{J_h} \geq \frac{1}{1+g^2} \quad (3.9)$$

ただし、

$$g = \|G\| = \sup_u (\|Gu\|/\|u\|) \quad (3.10)$$

証明は付録 B を参照されたい。

線形作用素 G のノルムである g は周波数領域で考えると、

$$g \leq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (3.11)$$

なる関係がある。ここで、 $G(j\omega)$ は開ループ伝達関数である。

つぎに、homogeneous なシステムの kT 時間以後の評価を計算する。

$$J_{h,N-k} = \int_{kT}^{NT} \mathbf{x}'(t) Q \mathbf{x}(t) dt \quad (3.12)$$

今、(3.12) 式の右辺の不定積分を $-\mathbf{x}'(t)F\mathbf{x}(t)$ とすると、

$$-\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'(t)(A'F + FA)\mathbf{x}(t) \quad (3.13)$$

となるから、リアプノフの方程式

$$-Q = A'F + FA \quad (3.14)$$

を満足するマトリクス F を求めると (3.12) 式は次のように求まる。

$$\begin{aligned} J_{h,N-k} &= \mathbf{x}'(kT)F\mathbf{x}(kT) - \mathbf{x}'(NT)F\mathbf{x}(NT) \\ &= \mathbf{x}'(kT)[F - \exp\{A'(N-k)T\}F\exp\{A(N-k)T\}]\mathbf{x}(kT) \end{aligned} \quad (3.15)$$

したがって I_{N-k} は次式により計算される。

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(kT)] = \mathbf{x}'(kT)P(N-k)\mathbf{x}(kT) \quad (3.16)$$

ただし、下界マトリクス P は、

$$P(N-k) = \frac{F - \exp\{A'(N-k)T\}F\exp\{A(N-k)T\}}{\sup_{\omega} \{1 + |G(j\omega)|^2\}} \quad (3.17)$$

で求められる。

計算手順は 3.2 節の手順とほとんど同じでつぎの点が違う。

- i) 始めに $\sup\{1 + |G(j\omega)|^2\}$ を計算する。次に (3.14) 式のリアプノフの方程式を解く⁹⁾。(3.17) 式より $k=N-1$ から下界マトリクス $P(N-k)$ を各段において求める。
- ii) 状態値の計算は各サンプリング時刻に対して計算する。
- iii) 評価関数の値を数値計算する。 I_{N-k} 、 $\hat{J}_N^k$ はそれぞれ、(3.16)、(3.1) 式より求める。

4. 例 題

問題 1 および問題 2 のそれぞれについての計算例を示す。

Fig. 3 は例題 1 の計算結果である。a 図は最適制御関数であり、b 図は最適制御を行なった場合の状態値の遷移を示している。

Fig. 4 は例題 2 の計算結果で、a 図、b 図はそれぞれ、例題 1 の図と対応している。

例題 1

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.47 & 0.09 \\ -0.09 & 0.81 & 0.29 \\ -0.29 & -0.67 & 0.23 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.09 \\ 0.29 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_0 = \text{col.} [1 \ 1 \ 1] \quad (4.2)$$

$$|x_3| \leq 1.0, \quad \text{ただし } \mathbf{x} = \text{col.} [x_1 \ x_2 \ x_3] \quad (4.3)$$

$$u \in U, \quad \text{ただし } U = \{-1.0, -0.9, \dots, 0, \dots, 1.0\} \quad (4.4)$$

$$J_N = \sum_{k=1}^N \left\{ \mathbf{x}'(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + u^2(k-1) \right\} \quad (4.5)$$

$$N=10$$

例題 2

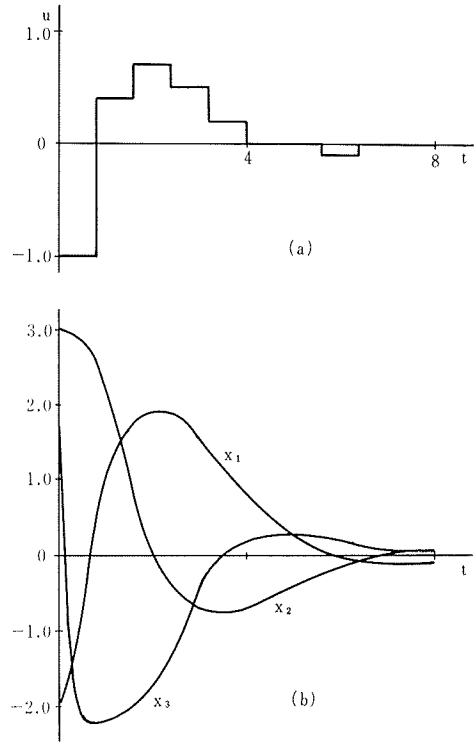
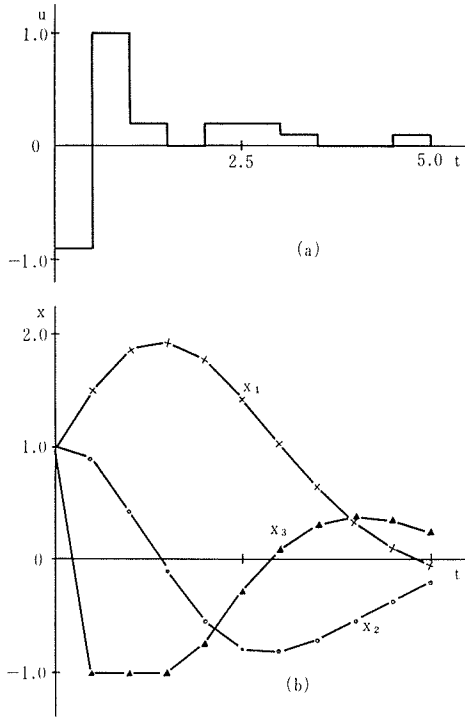


Fig. 3. Control function and states of example-1

Fig. 4. Control function and states of example-2

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_0 = \text{col.} [-2 \ 3 \ 2] \quad (4.7)$$

制御については例題 1 と同じ (4.4) 式を用いる。

$$J = \int_0^{NT} \left\{ \mathbf{x}'(t) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + u^2(t) \right\} dt \quad (4.8)$$

$$N=10, \quad T=0.8$$

5. 考 察

D. P. の直接計算法は最適性の原理を用いて後退的に最適軌道を数値計算して表を作成してゆく。この過程は B. B 法における下界を探索的に計算する過程と考えることができる。D. P 法で作られた表は、各軌道に沿った評価関数の下限値を与えているので、初期値が与えられると最適軌道が直接計算される。B. B 法は解析的関係を用いて評価関数の下限値を推定するため、その下界を修正してゆく意味での探索が必要となる。

実際に両手法を比較すると、D. P 法は探索の各段において各々の状態値について計算しており、一方 B. B 法は制御について探索を行なっている。したがって、計算量は D. P 法においては状態変数ベクトルの次元に支配され、B. B 法では制御変数ベクトルの次元に支配される。また、制御段に関する計算量の増減は、D. P 法においては段数に比例して増減し、B. B 法では下界

の精度によって異なるが、一般に段数倍よりも大きくなる。しかしながら、状態変数ベクトルの次元が制御変数ベクトルの次元よりも大きい場合には、全体として B. B 法の方が有利である。

本論文で下界の計算法として、D. P の逐次計算法および Brockett の不等式を用いた。

3.1 節でも述べたように、この下界の計算法は B. B 法において非常に本質的な役割を果たすものである。しかしながら、現在、一般の最適制御問題に対する一般的な下界の計算法がまだ確立されていない。したがって個々の問題に応じて計算法が考えられなければならない。

実際に計算を行なう場合において、B. B 法の計算にはかなりの自由度があり、記憶容量の節減あるいは計算時間の短縮等の計算能力の向上のため back-track 法⁷⁾との併用が考えられる。制御変数ベクトルあるいは制御段数が大きくなる場合には、この方法が有利である。

6. 結 言

状態変数および制御変数に制限条件のある線形の最適制御問題を B. B 法を適用して解く計算法を述べた。これは従来、あまり試みられていない方法である。

下界の計算法として、時間離散値系では D. P の逐次計算法を、時間連続系においては Brockett の不等式を用いた。

数例ではあるが実際に数値計算を行い、非常に良い結果が得られた。

例題の計算は、すべて北大大型計算機センターの FACOM 230-60 によった。

最後に B. B 法について適切な助言を与えて下さった関口恭毅さん（現在日立製作所勤務）に深く感謝いたします。

7. 付 録

A

(2.5) 式より k 制御段で残りの段に対する評価は次式で示される。

$$J_{N-k} = \sum_{j=k+1}^N \{ \mathbf{x}'(j)Q(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{u}'(j-1)\mathbf{u}(j-1) \} \quad (7.1)$$

最適性の原理より、

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] = \min_{\mathbf{u}(k)} \{ \mathbf{x}'(k+1)Q(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{u}'(k)\mathbf{u}(k) + I_{N-(k+1)}[\mathbf{x}(k+1)] \} \quad (7.2)$$

ここで D. P 法の一般的手法からいえば繰返し計算に移るのだが、この問題ではさらに解析的に解くことが可能である。そのために次式を仮定する。

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}'(k)P(N-k)\mathbf{x}(k) \quad (7.3)$$

ただし P は正定値マトリクスで今は未知である。 $I_{N-(k+1)}[\mathbf{x}(k+1)]$ に対して (7.3) 式を適用すると、

$$I_{N-(k+1)}[\mathbf{x}(k+1)] = \mathbf{x}'(k+1)P(N-(k+1))\mathbf{x}(k+1) \quad (7.4)$$

(7.4) 式を (7.2) 式に代入し、(2.1) 式を用いると、

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] = \min_{\mathbf{u}(k)} \{ \mathbf{x}'(k)L_{GG}(N-(k+1))\mathbf{x}(k) + 2\mathbf{u}'(k)L_{HG}(N-(k+1))\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k)[L_{HH}(N-(k+1)) + I]\mathbf{u}(k) \} \quad (7.5)$$

となる。ただし (3.8) 式の関係がある。(7.5) 式の中括弧の中は (7.1) 式の J_{N-k} が $P(N-(k+1))$ なる未知行列により $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ のみの関数に変形されたもので、これの $\mathbf{u}(k)$ についての最小化は、

$$\frac{\partial J_{N-k}}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad (7.6)$$

を用いて行なうことができる。 J_{N-k} は次のように $\mathbf{u}$ についての 2 次形式となっている。

$$J_{N-k} = a + 2\mathbf{u}'(k)\mathbf{b} + \mathbf{u}'(k)\mathbf{c}\mathbf{u}(k)$$

ただし、

$$\begin{cases} a = \mathbf{x}'(k)L_{GG}(N-(k+1))\mathbf{x}(k) & ; \text{スカラー} \\ \mathbf{b} = L_{HG}(N-(k+1))\mathbf{x}(k) & ; \text{ベクトル} \\ c = L_{HH}(N-(k+1)) + \mathbf{I} & ; \text{マトリクス} \end{cases} \quad (7.7)$$

したがって、

$$\frac{\partial J_{N-k}}{\partial \mathbf{u}(k)} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}\mathbf{u} \quad (7.8)$$

(7.6), (7.7), (7.8) 式より最適制御 $\mathbf{u}^*(k)$ は、

$$\mathbf{u}^*(k) = D(N-k)\mathbf{x}(k) \quad (7.9)$$

$$D(N-k) = -[L_{HH}(N-(k+1)) + \mathbf{I}]^{-1}L_{HG}(N-(k+1)) \quad (7.10)$$

で求められる。 D の中には未知マトリクス P を含んでいるから次にこれを求める。(7.9) 式を使って $I_{N-k}[\mathbf{x}(k)]$ は、

$$I_{N-k}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}'(k)[L_{GG}(N-(k+1)) + L_{GH}(N-(k+1))D(N-k)]\mathbf{x}(k) \quad (7.11)$$

となる。(7.3), (7.11) 式より、

$$P(N-k) = L_{GG}(N-(k+1)) + L_{GH}(N-(k+1))D(N-k) \quad (7.12)$$

を得る。これは P に関する漸化式である。その方向は $P(N-(k+1)) \rightarrow P(N-k)$ となっており、その初期値は $P(0) = 0$ である。

なお、詳細については参考文献を参照されたい。

B

$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$ なる m 次元ベクトルを考える。このとき、 $Q = C'C$ である。

ベクトルの時間関数 $\mathbf{u}(t)$ と $\mathbf{y}(t)$ はヒルベルト空間 $H_1 = L_2^r[t_0, t_f]$ と $H_2 = L_2^m[t_0, t_f]$ の要素として考えられる。次にそのノルムを定義する。

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)dt \quad (7.13)$$

$$\|\mathbf{y}\|_2^2 = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{y}'(t)\mathbf{y}(t)dt \quad (7.14)$$

$L_2^r[t_0, t_f]$ から $L_2^m[t_0, t_f]$ へ写像する線形作用素 G は次のように定義される。

$$G\mathbf{u} = \int_{t_0}^t C\Phi_A(t, \tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (7.15)$$

ここで $\Phi_A(t, t_0)$ はマトリクス A の遷移マトリクスである。作用素 G のゲインは次のように定義される。

$$g = \|G\| = \sup_{\mathbf{u} \in L_2^r[t_0, t_f]} (\|\mathbf{G}\mathbf{u}\|_2 / \|\mathbf{u}\|_2) \quad (7.16)$$

$\mathbf{y}_h$ が homogeneous な出力とすると、

$$\mathbf{y}_h(t) = C\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (7.17)$$

$$J_h \equiv \|\mathbf{y}_h\|_2^2 \quad (7.18)$$

任意の制御 $\mathbf{u}(t)$ に対する評価は、

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{y}_h\|_2^2 \quad (7.19)$$

となる。

【補助定理 1】

もし $\mathbf{u}^*(t)$ が最適制御で $\mathbf{y}^*(t)$ がそれに対応する出力であるならば,

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}_0) = J^* = \langle \mathbf{u}^*, \hat{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{y}^*, \hat{\mathbf{y}} \rangle \quad (7.20)$$

である。ここで $\hat{\mathbf{u}}(t)$ は任意の制御で $\hat{\mathbf{y}}(t)$ はそれに対応する出力である。

証明は射影定理よりなされる。

【補助定理 2】

もし J_h と J^* が homogeneous な実行の評価と最適な評価で, $\mathbf{u}^*(t)$ が最適制御ならば次式が成り立つ。

$$J^* = J_h - \|\mathbf{Gu}^*\|_2^2 - \|\mathbf{u}^*\|_2^2 \quad (7.21)$$

$$J^* = J_h + \langle \mathbf{Gu}^*, \mathbf{y}_h \rangle \quad (7.22)$$

証明は補助定理 1 を用いる。

つぎに定理の (3.9) 式を証明する。

(7.21) 式と $\|\mathbf{Gu}\|_2 \leq \|G\| \|\mathbf{u}\|_2$ を使うと,

$$J^* \leq J_h - \|\mathbf{Gu}^*\|_2^2 (1 + 1/g^2) \quad (7.23)$$

となり, 同様に (7.22) 式と Schwarz の不等式より次式が求まる。

$$\|\mathbf{Gu}^*\|_2 \geq (J_h - J^*) / \|\mathbf{y}_h\|_2 \quad (7.24)$$

(7.24) 式の両辺は負でないから,

$$\|\mathbf{Gu}^*\|_2^2 \geq (J_h - J^*)^2 / J_h \quad (7.25)$$

で, $R \equiv J^* / J_h$ と定義すると (7.25) 式より,

$$\|\mathbf{Gu}^*\|_2^2 / J_h \geq (1 - R)^2 \quad (7.26)$$

となる。(7.23) 式の両辺を J_h で割ると,

$$R \leq 1 - (\|\mathbf{Gu}^*\|_2^2 / J_h) (1 + 1/g^2) \quad (7.27)$$

が得られ, (7.26) 式を (7.27) 式に置きかえと,

$$(1 - R) \geq (1 - R)^2 (1 + 1/g^2) \quad (7.28)$$

(7.28) 式は R が,

$$1 \geq R \geq 1/(1 + g^2) \quad (7.29)$$

を満足するならばその時のみ満足する。それゆえに,

$$1 \geq J^* / J_h \geq 1/(1 + g^2)$$

が成立する。

補助定理等のくわしい証明は文献 5) を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) L. S. Pontryagin: 「The mathematical theory of optimal processes」(1962), p. 257-316, Wily.
- 2) N. Agin: Manegement science vol. 13, No. 4, (1966), p. 176-185.
- 3) 辻 節三: 「最適制御概論」(1967), p. 83-88, 養賢堂。
- 4) R. W. Brockett: 「In Lecture notes on mathematics」, (1969), p. 61-69, Springer.
- 5) R. Canales: I. E. E. E. Trans on AC vol. 15, No. 4 (1970), p. 409-415.
- 6) D. Rothschild: INT. J. Control, vol. 11, No. 2 (1970), p. 181-198.
- 7) M. B. Wells: 「Elements of combinatorial computing」, p. 93-124, Pergamon Press.