



Title	薄肉断面曲線橋の剛性マトリックス
Author(s)	渡辺, 昇; Watanabe, Noboru; 稼農, 知徳 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 66, 1-12
Issue Date	1973-03-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41115
Type	departmental bulletin paper
File Information	66_1-12.pdf



薄肉断面曲線橋の剛性マトリックス

渡 辺 昇* 稼 農 知 徳* 藤 井 裕 司*

(昭和47年9月30日受理)

Stiffness Matrix for Thinwalled Curved Bridges

Noboru WATANABE, Tomonori KANO, Yuji FUJII

(Received September 30, 1972)

Abstract

The stiffness matrix method of structural analysis has been used extensively and accepted as a potent analytical tool. The method can be applied to any type of structure for which the stiffness coefficients can be derived.

It is the writers' purpose to present the derivation of thinwalled curved beam stiffness coefficients. Using the solutions of homogeneous differential equations governing the static problem for thinwalled curved beam considering bending-torsion, the stiffness matrix is derived. As the procedure, the way that established by numerous authors for structures composed from solid beams is used. Obtained results are completely agreement with results calculated by force method and are exact.

This stiffness matrix is applicable to curved beam of arbitrary arc length and arbitrary orientation. In the field of civil engineering, architecture, naval architecture and aeronautics, it might be applied to structures assembled from thinwalled members with open cross section.

1. ま え が き

橋梁・建築・航空・船舶等の構造工学の分野において薄肉断面構造物の施工は年々多くなっているが、これらの薄肉断面構造物の解析には曲げねじれ剛性を考慮しなければならない場合が多い。

応力法による曲げねじれ解析については今までにも多くの研究があり、ほぼ完成されている。しかし、最近の構造物の複雑化によって、この応力法が適用出来ない場合が多くなっている。

また、従来の変形法による解析では、曲げねじれ剛性を考慮したものは非常に少なく^{1~4)}、これらはずべて直線部材である。薄肉断面の曲線桁の解析では、G. Becker⁵⁾が Reduktionsverfahren によって、変断面連続曲線桁を解析しているのみである。

そこで、著者らは薄肉変断面曲り梁を含む骨組構造物を解析するために、曲げねじれ剛性を考慮した曲り梁の剛性マトリックスを誘導した。その後の解析の手順は従来から多くの研究者によって確立された方法をとっている。この剛性マトリックスを誘導したことによって、種々な薄肉変断面曲り梁を含む骨組構造物の解析が可能になった。

本文では、この剛性マトリックス法の応用例として、単純曲線格子桁を解析したものである。従来の応力法による解析では、横桁には曲げ剛性のみしか考慮していないが、ここでは曲げ剛

* 土木工学科橋梁学講座

性, ねじれ剛性, および曲げねじれ剛性を考慮している。

2. 曲線桁の曲げねじれ解析

今, 図-1 のような一般的な曲線桁に面外荷重が作用し, 曲率面内の作用荷重がない場合, 曲率面外への変形の弾性方程式を, せん断中心軸の変形で表わせれば, 式 (1) となる (文献 6) 参照)。

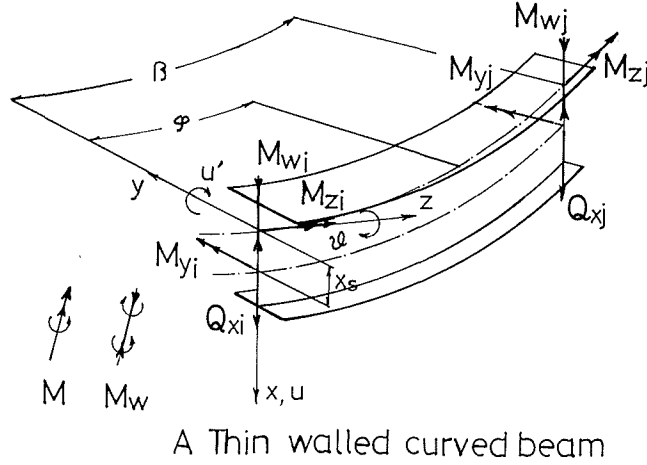


図-1

$$\left. \begin{aligned} (E\bar{J}_y + \frac{EJ_w}{R_s^2}) \frac{d^4 u_w}{d\varphi^4} - GJ_T \frac{d^2 u_w}{d\varphi^2} - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} + (GJ_T + E\bar{J}_y) \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} &= R_s^4 q_w - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi}, \\ -\frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 u_w}{d\varphi^4} + (GJ_T + E\bar{J}_y) \frac{d^2 u_w}{d\varphi^2} + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} - GJ_T \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} + E\bar{J}_y R_s \vartheta_z &= R_s^3 m_z \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad a-b$$

ここで, u_w = 垂直変位, ϑ_z = ねじれ角

$$\bar{J}_y = J_y - \frac{J_{wy}^2}{J_x}$$

式 (1) の高階連立微分方程式を消去法により, u_w を消去すると式 (2) となり, ϑ_z と u_w との関係式は式 (3) となる。

$$\begin{aligned} \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^6 R_s \vartheta_z}{d\varphi^6} + \left(2\frac{EJ_w}{R_s^2} - GJ_T \right) \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} + \left(\frac{EJ_w}{R_s^2} - 2GJ_T \right) \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} - GJ_T R_s \vartheta_z \\ = \frac{J_w}{R_s^2 \bar{J}_y} \left(R_s^4 \frac{d^2 q_w}{d\varphi^2} - R_s^3 \frac{d^3 m_y}{d\varphi^3} \right) + \left(1 + \frac{J_w}{R_s^2 \bar{J}_y} \right) R_s^3 \frac{d^2 m_z}{d\varphi^2} \\ - \left(1 + \frac{GJ_T}{E\bar{J}_y} \right) \left(R_s^4 q_w - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi} \right) - \frac{GJ_T}{E\bar{J}_y} R_s^3 m_z, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(E\bar{J}_y + GJ_T + \frac{EJ_w}{R_s^2} \right) \frac{d^2 u_w}{d\varphi^2} + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} + \left(\frac{EJ_w}{R_s^2} - GJ_T \right) \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} + \left(E\bar{J}_y + \frac{EJ_w}{R_s^2} \right) R_s \vartheta_z \\ = \frac{J_w}{R_s^2 \bar{J}_y} \left(R_s^4 q_w - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi} \right) + \left(1 + \frac{J_w}{R_s \bar{J}_y} \right) R_s^3 m_z \end{aligned} \quad (3)$$

式 (2) および式 (3) において,

$$\lambda^2 = \frac{GJ_T R_s^2}{E\bar{J}_y}, \quad r = \frac{E\bar{J}_y}{GJ_T}, \quad \eta = \frac{2\lambda^2 r}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 r}$$

とおき, 剛性マトリックス法において節点間に中間荷重が作用しないものとすれば, 式 (2) および式 (3) の同次方程式は式 (4) および式 (5) となる。

$$\frac{d^6 \vartheta_z}{d\varphi^6} + (2 - \lambda^2) \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - 2\lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} - \lambda^2 \vartheta_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} = -\frac{R_s}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \tau} \left\{ \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - \lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2 \tau) \vartheta_z \right. \quad (5)$$

さらに、ねじれ中心軸のねじれ率⁶⁾ $(\theta_w = \frac{d\psi}{R_s d\varphi})$ は、式 (6) となる。

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\varphi} \right) \quad (6)$$

式 (4) の一般解は、式 (7) となる。

$$\vartheta_z = C_1 \sinh \lambda\varphi + C_2 \cosh \lambda\varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \varphi \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi \quad (7)$$

式 (5) および (6) から、式 (8), (9) および (10) が得られる。

$$u_x = -R_s \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda^2} \sinh \lambda\varphi + C_2 \frac{1}{\lambda^2} \cosh \lambda\varphi - C_3 \cos \varphi - C_4 (\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \right. \quad (8)$$

$$\left. - C_5 \sin \varphi - C_6 (\varphi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \right\} + C_7 \varphi + C_8,$$

$$\frac{du_x}{R_s d\varphi} = - \left[C_1 \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda\varphi + C_2 \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda\varphi + C_3 \sin \varphi - C_4 \{ (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \right. \quad (9)$$

$$\left. - \eta \cos \varphi \} - C_5 \cos \varphi - C_6 \{ (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \eta \sin \varphi \} \right] + \frac{C_7}{R_s},$$

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left[C_1 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \cosh \lambda\varphi + C_2 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \sinh \lambda\varphi + C_4 \eta \cos \varphi + C_6 \eta \sin \varphi - \frac{C_7}{R_s} \right] \quad (10)$$

断面力と変形の関係式は、断面形状が x 軸に対して対称断面をもつものとする、式 (11) となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{EJ_y}{R_s} \frac{d\kappa_y}{d\varphi} - \frac{GJ_T}{R_s} \theta_w + \frac{EJ_w}{R_s^3} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, \\ M_y &= -EJ_y \kappa_y, \\ M_z &= GJ_T \theta_w - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, \\ M_w &= -\frac{EJ_w}{R_s} \frac{d\theta_w}{d\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

a-b

ここで、 $\kappa_y = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + R_s \vartheta_z \right),$

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\varphi} \right),$$

$$J_{xy} = 0.$$

3. 部材座標系表示による基本式

(1) 部材座標系 D_{ij}

曲線桁の任意構成部材 ij において、 i 点における法線、接線および x 軸に対して正の方向余弦を示す向きの陪法線よりなる座標系 D_{ij} を図-2 のように、 $D_{ij} = \{x, y, z\}$ と定義する。また断面部材の主軸は i 点において、 x, y に一致するものとする。

(2) 部材座標系表示による剛性マトリックス

式 (7)~(10) に含まれる定数 $C_1 \sim C_8$ を材端 i, j における境界条件より式 (14) のように定める。また、式 (11) から式 (15) が得られ、結局材端の断面力と変形との関係が式 (12) のように

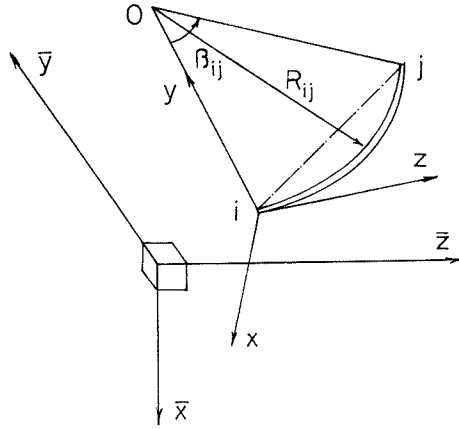


図-2

求められる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{mi} \\ M_{yt} \\ M_{zt} \\ M_{wt} \\ Q_{mj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}, K_{16}, K_{17}, K_{18} \\ K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{26}, K_{27}, K_{28} \\ K_{33}, K_{34}, K_{35}, K_{36}, K_{37}, K_{38} \\ K_{44}, K_{45}, K_{46}, K_{47}, K_{48} \\ (Sym.) & K_{55}, K_{56}, K_{57}, K_{58} \\ & K_{66}, K_{67}, K_{68} \\ & K_{77}, K_{78} \\ & K_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mi} \\ u'_{mi} \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wt} \\ u_{mj} \\ u'_{mj} \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix} \quad (12) \text{ a}$$

$$\text{ここで, } ()' = \frac{d}{R_s d\varphi}$$

式 (12) a を簡単に表示すると,

$$\{P\} = [K]\{u\} \quad (12) \text{ b}$$

式 (12) の $[K]$ が薄肉断面曲線桁の剛性マトリックスである。剛性マトリックス $[K]$ の要素は式 (14) と式 (15) から, 式 (13) となる。

$$[K] = [G][B] \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_1 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 \\ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 \\ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 \\ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 \\ T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 \\ H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8 \\ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 \\ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mi} \\ u'_{mi} \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wt} \\ u_{mj} \\ u'_{mj} \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix} \quad (12) \text{ a}$$

$$\{C\} = [B]\{u\} \quad (14) \text{ b}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & -\frac{GJ_T}{R_s} \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \eta, \\ -\frac{EJ_w}{R_s^2} (1+\lambda^2), & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & -\frac{EJ_y}{R_s^2} (2-\eta) \sin \beta, \\ 0, & 0, & \frac{GJ_T}{R_s} \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \eta \cos \beta, \\ \frac{EJ_w}{R_s^2} (1+\lambda^2) \sinh \lambda \beta, & \frac{EJ_w}{R_s^2} (1+\lambda^2) \cosh \lambda \beta, & -\frac{EJ_w}{R_s^2} \eta \sin \beta, \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0, & 0, & 0, & -\frac{GJ_T}{R_s^2}, & 0 \\ -\frac{EJ_y}{R_s^2} (2-\eta), & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{GJ_T}{R_s^2}, & 0 \\ -\frac{EJ_w}{R_s^2} \eta, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{GJ_T}{R_s^2}, & 0 \\ -\frac{EJ_y}{R_s^2} (2-\eta) \cos \beta, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{GJ_T}{R_s} \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \eta \sin \beta, & 0, & 0, & -\frac{GJ_T}{R_s^2}, & 0 \\ \frac{EJ_w}{R_s^2} \eta \cos \beta, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{matrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_1 \\ C_4 \\ C_6 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = [G]\{C\} \quad (15) \text{ a-b}$$

式 (14) の係数マトリックス $[B]$ の要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= R_s [(1+\lambda^2)(\beta + \sin \beta)(1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda + \eta \{ \sinh \lambda \beta (1 - \cos \beta) - \lambda \sin \beta (1 - \cosh \lambda \beta) \}], \\
 A_2 &= -R_s [(1+\lambda^2)(\beta + \sin \beta) \sinh \lambda \beta / \lambda - \eta \{ (1 + \cosh \lambda \beta)(1 - \cos \beta) + \lambda \sin \beta \sinh \lambda \beta \}], \\
 A_3 &= R_s \eta [(1+\lambda^2) / \lambda \{ (\beta + \sin \beta)(1 - \cos \beta)(1 - \cosh \lambda \beta) + \beta \sin \beta (\sin \beta \cosh \lambda \beta - \beta) - \\
 &\quad - (\sin \beta - \beta) \sin \beta \sinh \lambda \beta / \lambda \} + \eta \{ \beta \sin \beta - 2(1 - \cos \beta) \} (\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta)], \\
 A_4 &= -R_s \eta [(1+\lambda^2) / \lambda \{ (\beta + \sin \beta)(1 - \cos \beta) \sinh \lambda \beta - \beta \sin \beta^2 \sinh \lambda \beta - \\
 &\quad - \sin \beta (\sin \beta - \beta)(1 - \cos \lambda \beta) / \lambda \} - \eta \{ \beta \sin \beta - 2(1 - \cos \beta) \} (\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta)], \\
 A_5 &= A_2 A_3 - A_1 A_4,
 \end{aligned}$$

とにおいて,

$$B_1 = \eta \sin \beta (\sin \beta - \beta) A_1 / A_5, \quad B_2 = -R_s \eta \sin \beta A_3 / A_5,$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= R_s \eta [(1 - \cos \beta)A_3 - \{\sin \beta (\sin \beta - \beta) - \eta \beta \sin \beta + 2\eta (1 - \cos \beta)\}A_1] / A_5, \\
B_4 &= R_s^2 [\{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\}A_3 + \eta \{\beta^2 \sin \beta - (\sin \beta + \beta)(1 - \cos \beta)\}A_1] / A_5, \\
B_5 &= -\eta \sin \beta (\sin \beta - \beta)A_1 / A_5, \quad B_6 = R_s \eta [\sin \beta A_3 + \eta \sin \beta \{\beta \sin \beta - 2(1 - \cos \beta)\}A_1] / A_5, \\
B_7 &= R_s \eta [(1 - \cos \beta)A_3 + \{\sin \beta (\sin \beta - \beta) - \eta \beta \sin \beta \cos \beta + 2\eta \cos \beta (1 - \cos \beta)\}A_1] / A_5, \\
B_8 &= -R_s^2 [\{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\}A_3 + \eta \{(\sin \beta - \beta)(1 - \cos \beta) + (1 - \eta) \sin \beta (\beta \sin \beta - 2(1 - \cos \beta))\}] / A_5, \\
D_1 &= -B_1 A_2 / A_1, \quad D_2 = -(R_s \eta \sin \beta + B_2 A_2) / A_1, \quad D_3 = \{R_s \eta (1 - \cos \beta) - B_3 A_2\} / A_1, \\
D_4 &= [R_s^2 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} - B_4 A_2] / A_1, \quad D_5 = -B_5 A_2 / A_1, \quad D_6 = (R_s \eta \sin \beta - B_6 A_2) / A_1, \\
D_7 &= \{R_s \eta (1 - \cos \beta) - B_7 A_2\} / A_1, \quad D_8 = -[R_s^2 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} + B_8 A_2] / A_1,
\end{aligned}$$

次に、

$$\begin{aligned}
A_6 &= -(1 + \lambda^2) \sin \beta (1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda - \eta (\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta) / \eta (\sin \beta - \beta), \\
A_7 &= \{(1 + \lambda^2) \sin \beta \sinh \lambda \beta / \lambda + \eta (\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta - 1)\} / \eta (\sin \beta - \beta)
\end{aligned}$$

とおいて、

$$\begin{aligned}
S_1 &= A_6 D_1 + A_7 B_1, \quad S_2 = A_6 D_2 + A_7 B_2, \quad S_3 = 1 / (\sin \beta - \beta) + A_6 D_3 + A_7 B_3, \\
S_4 &= R_s \sin \beta / \eta (\sin \beta - \beta) + A_6 D_4 + A_7 B_4, \quad S_5 = A_6 D_5 + A_7 B_5, \quad S_6 = \sin \beta / (\sin \beta - \beta) + A_6 D_6 + A_7 B_6, \\
S_7 &= -\cos \beta / (\sin \beta - \beta) + A_6 D_7 + A_7 B_7, \quad S_8 = -R_s (1 - \eta) \sin \beta / \eta (\sin \beta - \beta) + A_6 D_8 + A_7 B_8,
\end{aligned}$$

また、

$$A_8 = (1 - \cos \beta) / \sin \beta, \quad A_9 = (1 + \lambda^2) (1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda \eta \sin \beta, \quad A_{10} = -(1 + \lambda^2) \sinh \lambda \beta / \lambda \eta \sin \beta$$

とおいて、

$$\begin{aligned}
F_k &= A_8 S_k + A_9 D_k + A_{10} B_k \quad (k=1, 2, 3, 5, 6, 7), \\
F_4 &= -R_s / \eta \sin \beta + A_8 S_4 + A_9 D_4 + A_{10} B_4, \quad F_8 = R_s / \eta \sin \beta + A_8 S_8 + A_9 D_8 + A_{10} B_8,
\end{aligned}$$

次に、

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \sin^2 \beta, \quad A_{12} = \sin \beta \cos \beta - \beta, \\
A_{13} &= -(\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta), \quad A_{14} = -(\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta),
\end{aligned}$$

とおいて、

$$\begin{aligned}
T_k &= A_{11} F_k + A_{12} S_k + A_{13} D_k + A_{14} B_k \quad (k=1, 2, 3, 4, 5), \\
T_6 &= -\sin \beta + A_{11} F_6 + A_{12} S_6 + A_{13} D_6 + A_{14} B_6, \quad T_7 = \cos \beta + A_{11} F_7 + A_{12} S_7 + A_{13} D_7 + A_{14} B_7, \\
T_8 &= -R_s \sin \beta + A_{11} F_8 + A_{12} S_8 + A_{13} D_8 + A_{14} B_8, \\
H_k &= -\cot \beta T_k - \beta F_k - \beta \cot \beta S_k - (\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_k - (\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_k \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8), \\
H_7 &= 1 / \sin \beta - \cot \beta T_7 - \beta F_7 - \beta \cot \beta S_7 - (\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_7 - (\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_7,
\end{aligned}$$

さらに、

$$A_{15} = -R_s \{\beta \cos \beta + (1 - \eta) \sin \beta\}, \quad A_{16} = R_s \{\beta \sin \beta - (1 - \eta) \cos \beta\}$$

とおいて、

$$P_k = -R_s \cos \beta H_k + R_s \sin \beta T_k + A_{15} F_k + A_{16} S_k + (R_s \cosh \lambda \beta / \lambda) D_k + (R_s \sinh \lambda \beta / \lambda) B_k \quad (k=1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)$$

$$P_6 = R_s - R_s \cos \beta H_6 + R_s \sin \beta T_6 + A_{15} F_6 + A_{16} S_6 + (R_s \cosh \lambda \beta / \lambda) D_6 + (R_s \sinh \lambda \beta / \lambda) B_6$$

最後に、

$$\begin{aligned}
A_{17} &= -R_s (\beta \sin \beta + \eta \cos \beta), \quad A_{18} = -R_s (\beta \cos \beta - \eta \sin \beta), \\
A_{19} &= R_s \sinh \lambda \beta / \lambda^2, \quad A_{20} = R_s \cosh \lambda \beta / \lambda^2,
\end{aligned}$$

とおいて、

$$\begin{aligned}
Q_k &= -\beta P_k - R_s \sin \beta H_k - R_s \cos \beta T_k + A_{17} F_k + A_{18} S_k + A_{19} D_k + A_{20} B_k \quad (k=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8), \\
Q_5 &= 1 - \beta P_5 - R_s \sin \beta H_5 - R_s \cos \beta T_5 + A_{17} F_5 + A_{18} S_5 + A_{19} D_5 + A_{20} B_5
\end{aligned}$$

4. 絶対座標系表示による基本式

(1) 絶対座標系 \bar{D}

空間に直交座標 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ を定め、各部材の節点の位置を表わすものとする。座標は右手系とし、 $\bar{y}\bar{z}$ 平面は水平とし、 \bar{x} を鉛直下方にとる。この座標系 \bar{D} を図-2 のように、 $\bar{D} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ と定義して、絶対座標系 \bar{D} と称する。

(2) 座標変換

図-3 に示すように、 $\angle iOj$ の 2 等分線 \vec{OK} に平行な y' 、直線 ij 方向の z' および x' よりなる座標系を D'_{ij} とすれば、

$$D'_{ij} = A_{ij} D_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \\ 0, & \cos \frac{\beta_{ij}}{2}, & -\sin \frac{\beta_{ij}}{2} \\ 0, & \sin \frac{\beta_{ij}}{2}, & \cos \frac{\beta_{ij}}{2} \end{pmatrix} \tag{16} \text{ a-b}$$

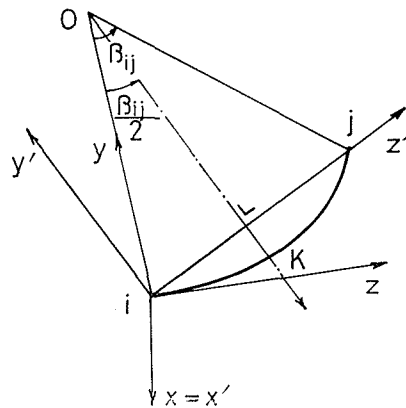


図-3

なお、 $\beta_{ji} = -\beta_{ij}$

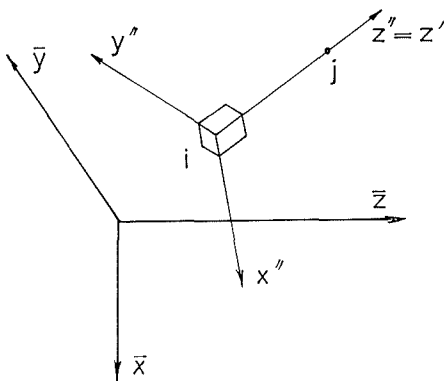


図-4

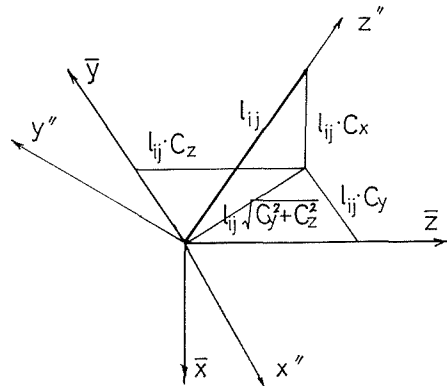


図-5

次に、 D_{ij} が z' の回わりに、時計方向まわりに α_{ij} 回転して $\bar{y}\bar{z}$ 平面と平行になるものとして得られる座標系を D'_{ij} とすれば、

$$D'_{ij} = A_{ij} D_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} & 0 \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17) \text{ a-b}$$

なお、 $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ である。

さらに、この D'_{ij} なる座標系から絶対座標系 $\bar{D} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ への変換は次のように表わされる。

$$\bar{D} = A'_{ij} D'_{ij}$$

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{C_y^2 + C_z^2} & 0 & C_x \\ -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} & \frac{C_z}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} & C_y \\ -\frac{C_x C_z}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} & -\frac{C_y}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} & C_z \end{pmatrix} \quad (18) \text{ a-b}$$

ただし、この座標系 D'_{ij} の方向では、 i, j 点の位置を $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ とし、

$$\left. \begin{aligned} C_x &= (\bar{x}_j - \bar{x}_i) / l_{ij}, \\ C_y &= (\bar{y}_j - \bar{y}_i) / l_{ij}, \\ C_z &= (\bar{z}_j - \bar{z}_i) / l_{ij}, \\ l_{ij} &= \sqrt{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (19) \text{ a-d}$$

とおいている。

\vec{ij} (z'_{ij} 軸) が \bar{x} 軸に平行するとき、すなわち、 $\sqrt{C_y^2 + C_z^2} = 0$ のとき、式 (18) b は次のようになる。

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_x \\ -C_x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

結局、部材座標系 D_{ij} から絶対座標系 \bar{D} への変換は、

$$\bar{D} = A'_{ij} A_{ij} D_{ij} = R_{ij} D_{ij}$$

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{C_y^2 + C_z^2} \cos \alpha & -\sqrt{C_y^2 + C_z^2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \alpha + C_x \sin \frac{\beta}{2}, \\ \frac{-C_x C_y \cos \alpha + C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}}, & \frac{C_x C_y \cos \frac{1}{2}\beta \sin \alpha + C_z \cos \frac{1}{2}\beta \cos \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} + C_y \sin \frac{\beta}{2}, \\ \frac{-C_x C_z \cos \alpha - C_y \sin \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}}, & \frac{C_x C_z \cos \frac{1}{2}\beta \sin \alpha - C_y \cos \frac{1}{2}\beta \cos \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} + C_z \sin \frac{\beta}{2}, \\ & \sqrt{C_y^2 + C_z^2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \alpha + C_x \cos \frac{\beta}{2} \\ & \frac{-C_x C_y \sin \frac{1}{2}\beta \sin \alpha - C_z \sin \frac{1}{2}\beta \cos \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} + C_y \cos \frac{\beta}{2} \\ & \frac{-C_x C_z \sin \frac{1}{2}\beta \sin \alpha + C_y \sin \frac{1}{2}\beta \cos \alpha}{\sqrt{C_y^2 + C_z^2}} + C_z \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (21) \text{ a-b}$$

また、 \vec{ij} (z'_{ij} 軸) が \bar{x} 軸に平行するとき、式 (21) b は次のようになる。

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & C_x \sin \frac{\beta}{2}, & C_x \cos \frac{\beta}{2} \\ -C_x \cos \alpha, & C_x \cos \frac{\beta}{2} \sin \alpha, & -C_x \sin \frac{\beta}{2} \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & -\cos \frac{\beta}{2} \cos \alpha, & \sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (22)$$

また、直線部材のときは、 \mathbf{R}_{ij} において、 $\beta_{ij}=0$ とすればよい。

節点変位においてねじれ率 $\theta_w = \frac{d\phi}{R_s d\varphi}$ の変位成分は変換しないことにして、そのまま加え合わせることにする。

座標変換行列の一般的な性質として、

$$\mathbf{R}_{ij}^{-1} = \mathbf{R}_{ij}^* \quad *: \text{転置記号}$$

なる関係がある。

(3) 絶対座標系表示による剛性マトリックス

ij 部材の材端に作用する断面力と材端の変形を \mathbf{D}_{ij} 系に関して、

$$\begin{cases} \{\mathbf{P}\} = [Q_{xi}, M_{yi}, \dots, M_{zj}, M_{wj}]^* \\ \{\mathbf{u}\} = [u_{xi}, u'_{xi}, \dots, \vartheta_{zj}, \theta_{wj}]^* \end{cases} \quad (23) \text{ a-b}$$

$\bar{\mathbf{D}}$ 系に関して、

$$\begin{cases} \{\bar{\mathbf{P}}\} = [\bar{Q}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \dots, \bar{M}_{zj}, \bar{M}_{wj}]^* \\ \{\bar{\mathbf{u}}\} = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}'_{xi}, \dots, \bar{\vartheta}_{zj}, \bar{\theta}_{wj}]^* \end{cases} \quad (24) \text{ a-b}$$

と表わすことにする。

ここで両系の間には、

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{P}\}, \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{R}]^*\{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (25) \text{ a-b}$$

なる関係がある。

従って、式 (12) b で示される、部材座標系 \mathbf{D}_{ij} 表示による剛性マトリックスを絶対座標系 $\bar{\mathbf{D}}$ 表示に変換すれば次のようになる。

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\mathbf{R}][\mathbf{K}][\mathbf{R}]^*\{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (26)$$

すなわち、

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\bar{\mathbf{K}}]\{\bar{\mathbf{u}}\}, \quad \text{ここで、} [\bar{\mathbf{K}}] = [\mathbf{R}][\mathbf{K}][\mathbf{R}]^* \quad (27) \text{ a-b}$$

式 (27) の $[\bar{\mathbf{K}}]$ が絶対座標系 $\bar{\mathbf{D}}$ によって表示された剛性マトリックスである。

5. 薄肉断面直線部材の剛性マトリックス

曲り梁を含む骨組構造物を解析するためには薄肉断面直線部材の剛性マトリックスが必要である。ここでは図-6の薄肉断面直線部材について求めた剛性マトリックスの結果のみを示すことにする。

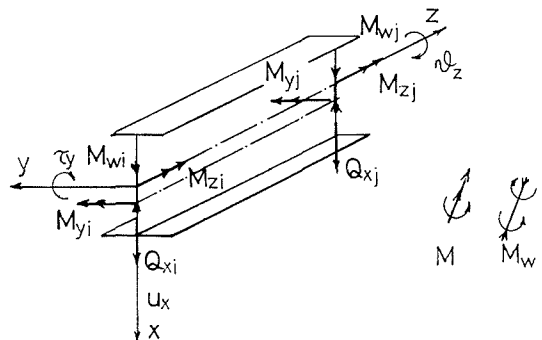


図-6

$$\begin{pmatrix} Q_{wi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EJ_y}{l^3}, & \frac{6EJ_y}{l^2}, & 0, & 0, & -\frac{12EJ_y}{l^3}, \\ & \frac{4EJ_y}{l}, & 0, & 0, & -\frac{6EJ_y}{l^2}, \\ & & \frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda, & \frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1), & 0, \\ & & & \frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda), & 0, \\ & & & & \frac{12EJ_y}{l^3}, \\ (Sym.) \\ & & & & \\ \frac{6EJ_y}{l^2}, & 0, & 0, & & \\ \frac{2EJ_y}{l}, & 0, & 0, & & \\ 0, & -\frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda, & \frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1) & & \\ 0, & -\frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\cosh \lambda - 1), & -\frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda - \sinh \lambda) & & \\ -\frac{6EJ_y}{l^2}, & 0, & 0, & & \\ \frac{4EJ_y}{l}, & 0, & 0, & & \\ & \frac{EJ_w \lambda^3}{D} \sinh \lambda, & -\frac{EJ_w \lambda^2}{D} (\sinh \lambda - 1) & & \\ & & \frac{EJ_w \lambda}{D} (\lambda \cosh \lambda - \sinh \lambda) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{wi} \\ \tau_{yi} \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{wj} \\ \tau_{yj} \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{pmatrix}$$

ここで、 $D = \lambda \sinh \lambda - 2(\cosh \lambda - 1)$, $\lambda^2 = \frac{GJ_r l^2}{EJ_w}$ (28) a-c

6. 数値計算例

図-7のような曲線格子桁橋について数値計算例を示す。また、形状寸法及び断面諸定数は表-1に示すとおりである。

表-1 形状寸法及び断面諸定数

	ϕ [°]	R_s [m]	J_y [cm ⁴]	J_r [cm ⁴]	J_w [cm ⁶]
主 桁 a	20	37	1.694×10^6	$3,390 \times 10^3$	$1,967 \times 10^6$
主 桁 b	20	40	2.106×10^6	$4,805 \times 10^3$	$2,487 \times 10^6$
主 桁 c	20	43	2.579×10^6	$6,565 \times 10^3$	$3,081 \times 10^6$
横 桁	-	-	$5,880 \times 10^5$	$6,749 \times 10$	$2,308 \times 10^7$

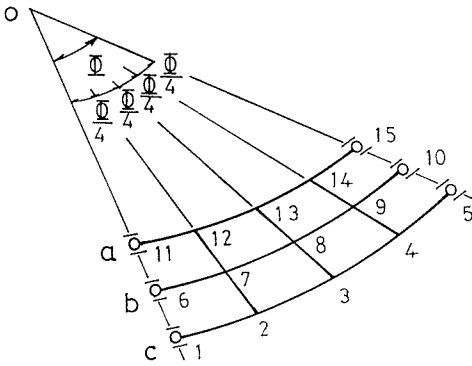


図-7

図-8は格点3における $P=1$ による曲げねじれモーメント影響面を示したものである。図-9は格点4における $P=1$ による垂直変位影響面を示したものである。図中の点線は応力法による値⁷⁾で横桁の曲げ剛性のみを考慮した場合である。実線は著者らの誘導した剛性マトリックス法による値で、横桁の曲げ剛性、ねじれ剛性および曲げねじれ剛性が考慮されている。このほか、すでに多くの計算をしているが、これらの結果から分るように横桁の曲げ剛性のほかにねじれ剛性および曲げねじれ剛性をも考慮しても大差がなく、設計上では無視してもよい。

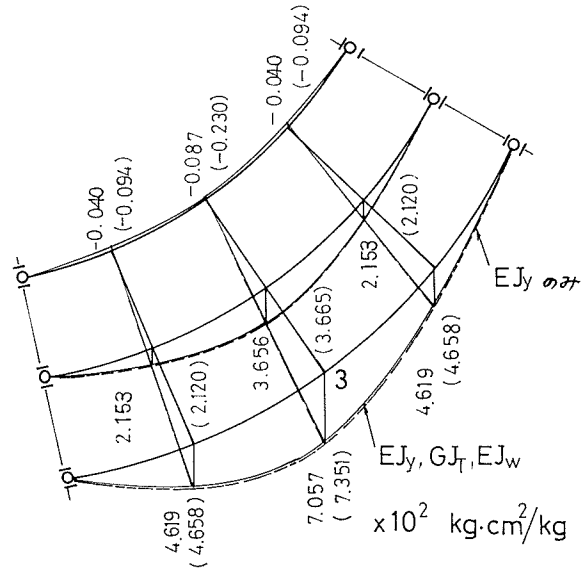
なお、すでに連続曲線桁に関する解析で、応力法による計算結果と本方法による結果とが全く一致することが検証されている。^{8),9)}

7. 結 論

剛性マトリックス法による構造解析は広く用いられ、また有力な解析の手法として認められる。この方法は剛性マトリックスが誘導される任意の構造形式に適用出来る利点がある。本論文では曲り梁を含む薄肉断面構造物を解析するために必要な薄肉断面曲線桁の剛性マトリックスが誘導された。

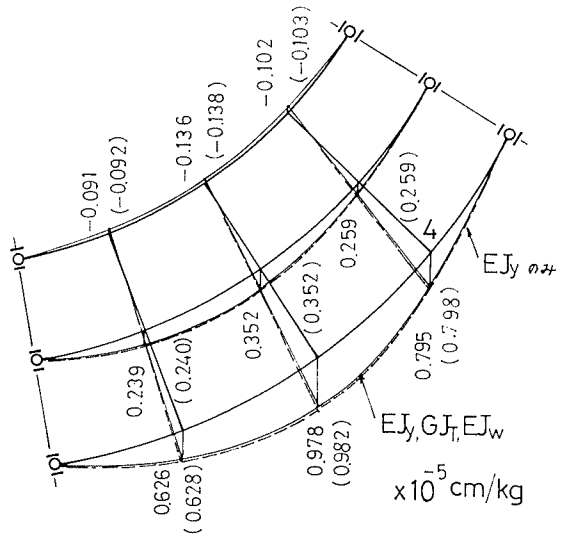
これによって、土木、建築、航空および船舶等の薄肉構造工学分野における種々な構造物への適用が可能となる。

最後に、本論文に関するプログラムおよび数値計算は北大大型計算センター (FACOM 230-60) によるものであることを附記する。



Bending-Torsion Inf. L. at Pt. 3

図-8



Deflection Inf. L. at Pt. 4

図-9

文 献

- 1) Klöppel, K. und Frieman, H.: Stahlbau, Band 35 (1966), Heft 12, S. 365/372.
- 2) Krajcinovic, D.: Int. J. of Solids and Structures, Vol. 5 (1969), p. 639/662.
- 3) 鷹羽信勝, 成岡昌夫: 土木学会論文報告集, 178 (1970), p. 1/9.
- 4) Argyris, J. H. und Radaj, D.: Ingenieur-Archiv, Band 40 (1971), S. 198/210.
- 5) Becker, G.: Stahlbau, Band 34 (1965), Heft 11, S. 334/.
- 6) 稼農知徳: 北海道大学工学部研究報告, 57 (1970), p. 17/50.
- 7) 稼農知徳: 北海道大学博士論文 (1972), p. 282/296.
- 8) 稼農知徳, 藤井裕司: 土木学会第 27 回年次学術講演会講演概要集, 第 I 部門。
- 9) 渡辺 昇: 曲線げたの理論と計算, 技報堂(1976),