



Title	粗さ要素から発達する乱流境界層の相似則
Author(s)	飯田, 誠一; Iida, Sei-ichi; 繁富, 佳行 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 67, 25-34
Issue Date	1973-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41120
Type	departmental bulletin paper
File Information	67_25-34.pdf



粗さ要素から発達する乱流境界層の相似則

飯田 誠 一 繁 富 佳 行 小 橋 安次郎
(昭和47年11月30日受理)

On the Similarities of Turbulent Boundary Layers Developed from a Roughness Element

Sei-ichi IDA, Yoshiyuki SHIGETOMI, Yasujiro KOBASHI
(Received November 30, 1972)

Abstract

It is a well known fact that the velocity profile of a fully developed turbulent boundary layer is expressed by a linear combination of two universal laws. One is the law of the wall and the other is the law of the wake, which is characterized by a universal function.

After an experimental survey of the turbulent boundary layer in the transient regime, we found that there exists a similarity rule in the wake function before it reaches its final universality. From the degree of the discrepancy between the universal wake function and that of the measured velocity profile at a certain section, we can determine to what extent the boundary layer of that section has become fully developed.

This similarity rule also enables us to estimate the position where the fully developed turbulent boundary layer commences.

1. 緒 言

平板の前縁付近に人工的な粗さ要素を設けて、乱流境界層の発達を促進する試みは、1932年以來、Schiller, Tani, Goldstein, Fage, Dryden, Krämer ら¹⁾によってなされており、遷移点の挙動に関して有用な結果をえている。また粗さ要素から十分に発達した乱流境界層については、Klebanoff & Diehl^{2,3)}の研究があり、平均風速、乱れ強さ、スペクトル、間欠度などの諸特性が詳細に調べられている。しかしながら、境界層が層流から乱流に遷移したのち、どこから十分発達した相似な乱流境界層になるかという判定に関しては資料が乏しい。本報告は粗さ要素として丸棒を用い、その下流に発達する乱流境界層の相似性を平均流の諸特性について検討したものである。その結果、任意の位置における速度分布と十分に発達した乱流境界層との相似性に関しては、“wake function”を用いることによって明確に判別できること、さらに、この速度分布が $10^3 < R_{\theta 0} < 1.5 \times 10^4$ の範囲にわたって、相似な速度分布のえられる位置が予測できることを、乱流境界層の諸特性を用いて明らかにしている。

2. 使用記号

X : 平板前縁からの距離	mm
x : 仮想原点からの距離	mm
y : 平板表面からの垂直距離	mm

- K : 粗さ要素 (丸棒) の直径 mm
- U_0 : 主流の平均風速 m/s
- u : 境界層内の平均風速 m/s
- ρ : 密度 kg s²/m⁴
- ν : 動粘性係数 m²/s
- τ_0 : 平板表面の摩擦応力 kg/m²
- u_τ : 摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$ m/s
- δ : 境界層厚さ mm
- δ^* : 境界層排除厚さ $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$ mm
- θ : 境界層運動量厚さ $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$ mm
- H : 形状係数 $H = \delta^*/\theta$
- η : $\frac{u_\tau y}{\nu}$
- Re_x : $\frac{U_0 x}{\nu}$
- Re_θ : $\frac{U_0 \theta}{\nu}$
- Re_δ : $\frac{U_0 \delta}{\nu}$
- $W(y/\delta)$: wake function

3. 実験装置および実験

本実験では、図1に示すような、3.7 KW 軸流送風機を用いた、絞り比 1/16 の吹出し型低乱風洞 (乱れ強さ 0.05% 以下) を使用している。試験部は断面 0.5 m × 0.5 m、長さ 2.5 m で上面は可撓壁となっている。測定用平板は厚さ 10.6 mm、幅 0.5 m、長さ 2.2 m で、表面は滑らかになるように塗装されており、16 個の静圧孔を設けてある。これを試験部中央に垂直に挿入し、平板に沿う静圧分布が一定となるように、可撓壁を調節して実験を行なった。設定した主流の平均風速は $U_0 \cong 20$ m/s であり、境界層の自然遷移点は先端から、 $X \cong 1.2$ m であった。流れの二次元性は良好であり、層流領域での境界層速度分布は図2に示すように、Blasius 解 (実線で記入してある) とほぼ一致することが確認された。なお、速度分布の測定には境界層ピトー管を用いており、測定結果に対しては、速度勾配の影響と壁面接近の効果についてのみ、それぞれ Young & Maas および Mac Millan⁴⁾による補正を行なってある。乱流境界層を人工的に厚くす

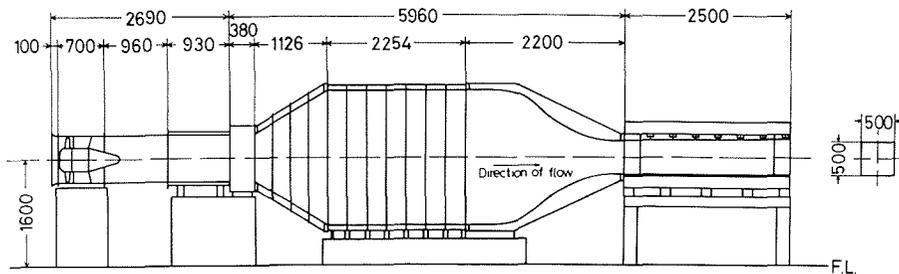


図1 風洞装置の概要

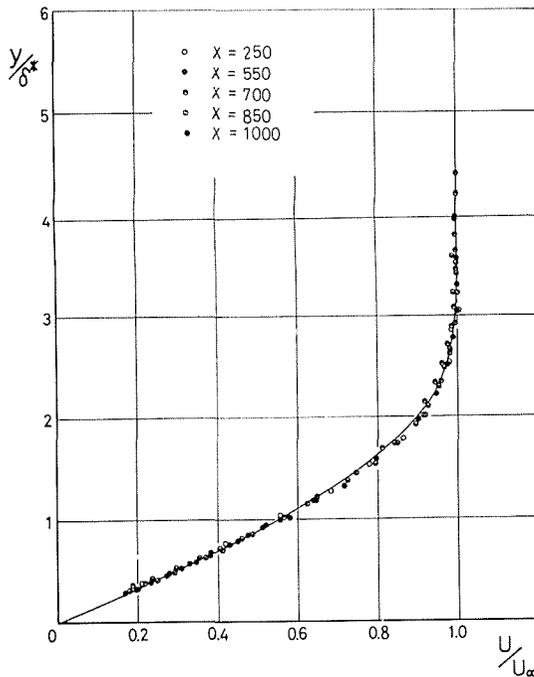


図2 粗さ要素取付前の層流境界層速度分布

るのに用いられる粗さ要素としては、丸棒、短形柱、サンドペーパー、コイル等があるが、ここでは最も簡単な丸棒を採用した。Fage & Preston¹⁾によれば、粗さ要素の直後から乱流境界層がはじまるのは、丸棒の直径を K 、これの設置位置における層流境界層の摩擦速度を U_τ とするとき、限界レイノルズ数は

$$Re_{crit} = \frac{U_\tau K_{crit}}{\nu} = 20 \quad (1)$$

であらわされることが知られている。したがって本実験では $K \geq K_{crit}$ となるように K を選定した。丸棒の取付位置は平板の前縁から $X=400$ mm であって、この位置における層流境界層の諸特性および使用した丸棒 (6種類) の K を表1にまとめて示す。表1から明らかなように、最小直径 $K=0.6$ mm がほぼ (1) 式の条件を満足していることがわかる。なお、これらの粗さ要素をとりつけて、測定した Re_θ の最大値は、4300 ($K=3.00$ mm, $X=1700$ mm) であって、これをこえたデータはすべて、Klebanoff & Diehl²⁾によっている。

4. 乱流境界層の相似則

従来、乱流境界層が十分発達しているか否かの判定は速度分布の無次元座標 $y/\delta^* - u/U_\infty$ であらわしたものによって与えられている。図3に一例として $K=2.5$ mm の粗さ要素の下流に発達する乱流境界層の速度分布を示す。 X が大きくなると、速度分布は一本の曲線に集約され、これが十分発達した乱流境界層と考えられる。しかしこの図からでは、十分に発達した乱流境界層と相似であるか否かの明確な判定は困難であり、 $y/\delta^* - u/U_\infty$ の座標であらわしたものが一致しないときに、どの程度下流で十分発達した速度分布がえられるかを予測することはさらに困難である。

著者らは、速度分布を壁からの影響を強く受ける領域 “inner layer” と外側からの影響を強

表 1

K	0.6	1.0	1.2	2.0	2.5	3.0
$\frac{u_\tau K}{\delta}$	19.3	32.1	38.6	64.3	80.3	96.4
K/δ^*	0.66	1.09	1.31	2.18	2.73	3.28
測定要項						
$X=400$ mm				$U_0=20.72$ m/s		
$u_\tau=0.48$ m/s				$\nu=1.51 \times 10^{-5}$ m ² /s		
$\delta^*=0.916$ mm				$\theta=0.354$ mm		
$H=2.59$						

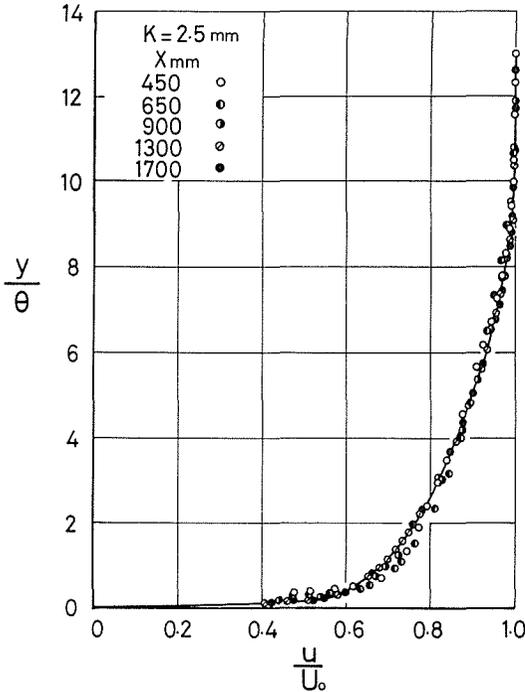


図3 粗さ要素から発達する乱流境界層の速度分布

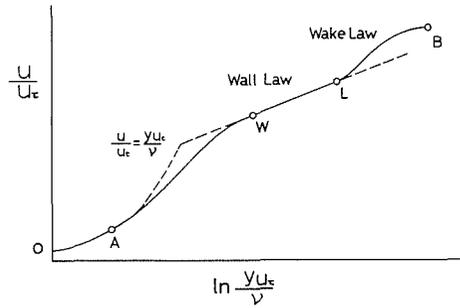


図4 乱流境界層の説明

く受ける領域 “outer layer” との2つの領域にわけて検討を加えた。inner layer ではいわゆる “wall law” が成立することが知られており、また outer layer では、“velocity defect law” あるいは Coles⁵⁾が提唱している “wake law” が成立する。図4のごとく速度分布を、 $u/u_\tau - \ln yu_\tau/\nu$ 座標で表わすと OL 間が wall law で記述される領域であり、LB 間が wake law であらわされる領域である。OL 間のうち OA 間は粘性底層と呼ばれ流れが流体の粘性だけに依存する領域であり、WL 間は直線的に変化する領域であって、いわゆる対数法則の成立する範囲である。

4.1 wall law

wall law の領域のうち粘性底層は

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{yu_\tau}{\nu} \tag{2}$$

によってあらわされ、対数速度分布領域は次式によってあらわされる。

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) + C \tag{3}$$

κ, C は一般に Re_θ の関数と考えられている。(3) 式において κ および C が与えられれば、実際の速度分布から u_τ を求めることができるが、これは原理的に異なる方法によって求めた u_τ と比較検討されなければならない。著者らは、十分発達したと思われる乱流境界層に、運動量積分方程式を適用してえた u_τ を考慮して、次のような κ および C を採用することにした。

$$Re_\theta \geq 6000; \kappa=0.4 \quad C=5.1 \tag{4}$$

$$1000 < Re_\theta < 6000; \kappa=0.4\left(\frac{Re_\theta}{6000}\right)^{-0.125}, \quad C=14.88-9.78\left(\frac{Re_\theta}{6000}\right)^{0.125} \tag{5}$$

(4) 式は Coles⁵⁾の与えた値に等しく、(5) 式のうち C は Simpson⁶⁾の値を若干修正したものに

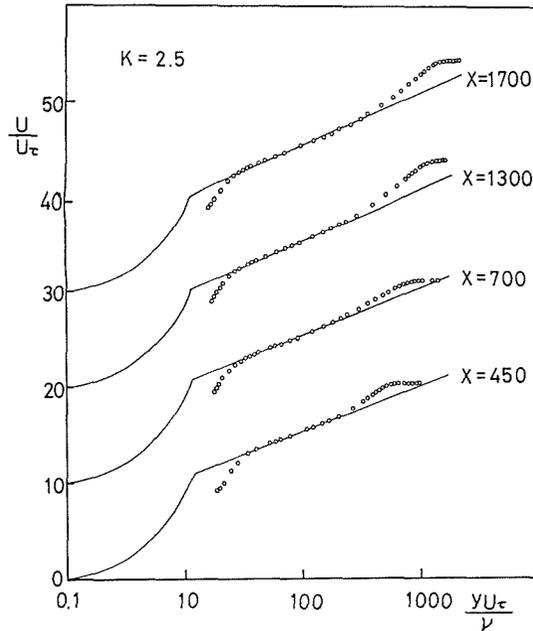


図5 Wall Law ($K=2.5$ mm)

なっている。

図5に一例として $K=2.5$ mm の場合の粗さ要素の下流に発達する wall law の速度分布を示す。直線部分が (3) 式であらわされる領域である。この図から、粗さ要素に近い位置でも直線領域をもっていることがわかる。

4.2 wake law

wake law の領域を記述する変数は Re_θ をパラメータとして、 y/δ であり、この部分は wake function $W(y/\delta)$ を導入することによって、次のようにあらわされる。

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + C + \frac{\Pi}{\kappa} \left\{ W\left(\frac{y}{\delta}\right) \right\} \quad (6)$$

ただし、 Π は一般に Re_θ の関数である。

十分に発達した乱流境界層に関する $W(y/\delta)$ は Coles⁵⁾ によってその標準値が数表で与えられている。粗さ要素から発達する乱流境界層が相似な速度分布をもつにいたる途中では、粗さ要素による影響が、主として wake law の領域にとどまるものと考えられるため、wake function の形を種々の X における速度分布について求め、これを比較することによって、発達の度合を判定できる可能性がある。任意の速度分布について (6) 式から $W(y/\delta)$ を求める手順は次のようである。

- i) $u(y)/U_0 \simeq 0.993$ 程度の境界層厚さ y を求めこれを δ と仮定する。
- ii) $u(\delta)=u_1$, $u(0.7\delta)=u_2$ を測定した速度分布から求める。
- iii) Coles の与えた wake function を参照して、 $W(1.0)=2.0$, $W(0.7)=1.6$ とおけば (6) 式から、

$$\delta = \exp \left\{ \kappa \frac{U_0}{u_\tau} \left(5 \frac{u_2}{U_0} - 4 \frac{u_1}{U_0} \right) + 1.7834 - \kappa C - \ln \frac{u_\tau}{\nu} \right\} \quad (7)$$

$$\Pi = \frac{\kappa}{0.4} \left\{ \frac{U_0}{u_\tau} \left(\frac{u_1}{U_0} - \frac{u_2}{U_0} \right) - \frac{0.3567}{\kappa} \right\} \quad (8)$$

がえられるので、(7) 式から δ を求め、さきに仮定した δ を修正して ii) へ戻る。この試算は 2, 3 回で完了し $u(\delta)/U_0=0.989\sim 0.995$ 程度の値を安定して与える。

iv) II の方は δ にくらべてばらつきが大きいので、これを

$$(1+\varepsilon) = \kappa \frac{\delta^* U_0}{\delta u_\tau} - II \tag{9}$$

とあらわす。(1+ ε) は比較的安定した値を与えるので、図 8 (d) に記入した値

$$(1+\varepsilon) = 1.48 - 0.041 \ln R_{e\theta} \tag{10}$$

を用いることにし、(9) 式から II を求めるのがよい。ただし δ^*/δ については後述する。

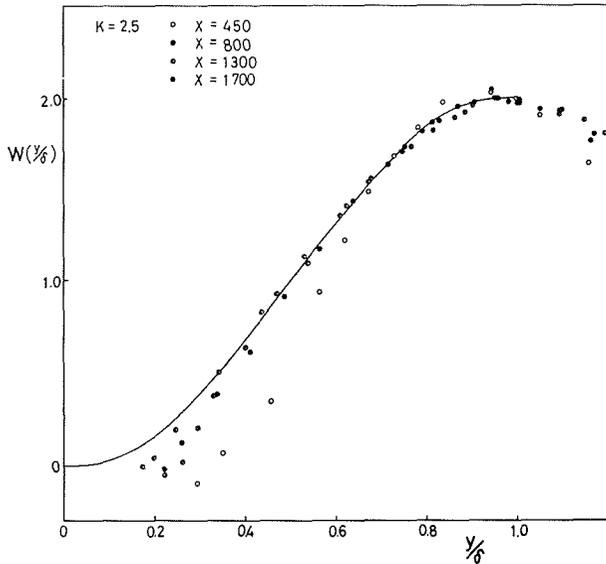


図 6 Wake Law (K=2.5 mm)

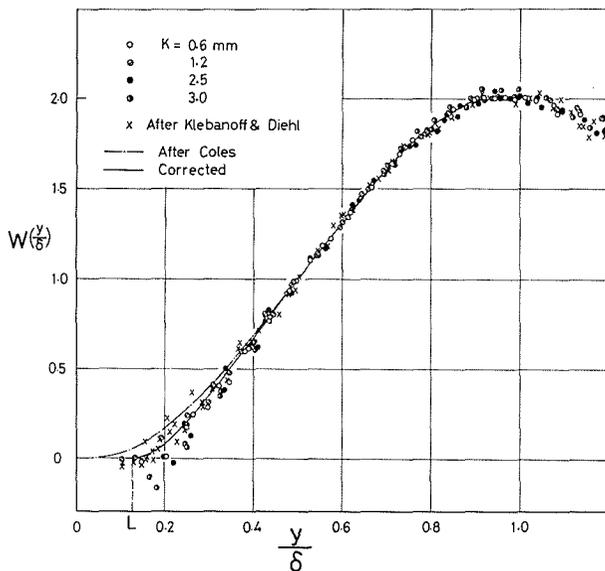


図 7 Wake Function

表 2

y/δ	$W(y/\delta)$	y/δ	$W(y/\delta)$
0.00	0.00	0.52	1.058
0.02	0.00	0.54	1.121
0.04	0.00	0.56	1.184
0.06	0.00	0.58	1.246
0.08	0.00	0.60	1.307
0.10	0.00	0.62	1.368
0.12	0.00	0.64	1.428
0.14	0.003	0.66	1.487
0.16	0.015	0.68	1.544
0.18	0.041	0.70	1.600
0.20	0.080	0.72	1.653
0.22	0.126	0.74	1.704
0.24	0.177	0.76	1.752
0.26	0.232	0.78	1.792
0.28	0.289	0.80	1.840
0.30	0.348	0.82	1.878
0.32	0.410	0.84	1.911
0.34	0.474	0.86	1.940
0.36	0.539	0.88	1.963
0.38	0.604	0.90	1.980
0.40	0.699	0.92	1.991
0.42	0.734	0.94	1.997
0.44	0.799	0.96	1.999
0.46	0.864	0.98	2.000
0.48	0.929	1.00	2.000
0.50	0.994		

v) 以上より、(6) 式における未知量 δ および Π が決定できるので、 $W(y/\delta)$ が求められる。一例として $K=2.5\text{ mm}$ に対する $W(y/\delta)$ の値を種々の X について図6に示す。これから明らかかなように、粗さ要素に近づくにつれて、Coles の与えた標準値 (実線) から大きくずれてくることがわかる。また、 X の十分大きくなった位置でも、 $y/\delta=0.4$ より壁に近いところで、実線から下へずれてきて、 $y/\delta=0.12$ 付近で $W(y/\delta)=0$ となっている (図7)。wall law の成立する範囲を図4における L 点までとすると、 $\eta_L = \frac{y_L u_\tau}{\nu} = \frac{y_L}{\delta} R_{e\delta} \frac{u_\tau}{U_0} \propto \frac{y_L}{\delta}$ となるから、wake law の成立する $\eta > \eta_L$ なる領域は、 $y/\delta > y_L/\delta > 0$ である。多くの相似な速度分布について、 y_L/δ を調べたところ、 $y_L/\delta \approx 0.12$ なる結果をえた (図7)。このことから (4) 式における $W(y/\delta)$ は $y/\delta \gtrsim 0.12$ に関してのみ値をもつべきであって、Coles が提唱している $W(y/\delta)$ の値を y/δ の小さな領域で幾分修正するのが、妥当と思われる。修正した新しい標準値を表2に示す。図7には、Coles の与えている標準値を鎖線で、また新しい標準値を実線で示し、 $R_{e\theta}$ の大きな場合の $W(y/\delta)$ として、Klebanoff & Dichl のデータからえた結果もあわせて記入してある。

5. 粗さ要素から発達する乱流境界層に関する考察

5.1 十分発達した乱流境界層の相似速度分布

種々の K に対して、十分発達したと思われる乱流境界層からえた諸特性を図8に示す。図8 (a) は $R_{e\delta}$ と $R_{e\theta}$ との関係を示しており、実線は次式によって記入してある。

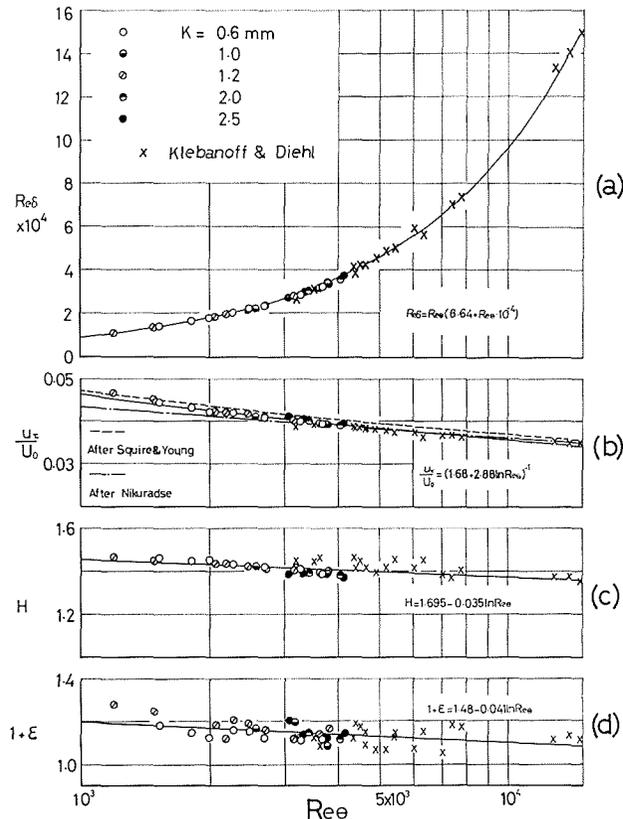


図8 十分発達した乱流境界層の諸特性

$$R_{cs} = R_{e\theta}(8.64 + R_{e\theta} \times 10^{-4}) \quad (11)$$

図8(b)は、(4)式および(5)式のように設定した κ , C を用いて、(3)式から対数速度分布領域における平均的な u_τ の値を求めて図示したものである。なおこの値は、運動量積分方程式から決定される u_τ ときわめて良好な一致をみていることが検証してある。この結果を Squire & Young⁷⁾の与える式(破線)

$$\frac{u_\tau}{U_0} = \{5.89 \log_{10}(4.075 R_{e\theta})\}^{-1} \quad (12)$$

および、Nikuradseの与える式¹⁾(一点鎖線)

$$\frac{u_\tau}{U_0} = 0.04331 \left(\frac{R_{e\theta}}{1000} \right)^{-0.98072} \quad (13)$$

と比較するとき、妥当な値をえているものと思われる。この図に記入してある実線は、

$$\frac{u_\tau}{U_0} = (1.68 + 2.88 \ln R_{e\theta})^{-1} \quad (14)$$

で表わされる。図8(c)は形状係数 $H = \delta^*/\theta$ と $R_{e\theta}$ との関係を示してあり、実線は次式によって与えられる。

$$H = 1.695 - 0.035 \ln R_{e\theta} \quad (15)$$

以上の結果を利用すれば、任意の U_0 および $R_{e\theta}$ に対応する十分発達した乱流境界層に相似な速度分布がえられることになる。すなわち対数速度分布領域に関しては、(14)式から u_τ/U_0 を求めただけで、(3)、(4)、(5)式から算定でき、この速度分布が y 方向に適用できる範囲は $y/\delta \leq 0.12$ であるから、(11)式より R_{cs} を求めておけばよいことになる。つぎに wake law の領域に対しては、(9)式が、 $\delta^*/\delta = H\theta/\delta = HR_{e\theta}/R_{cs}$ であることから、

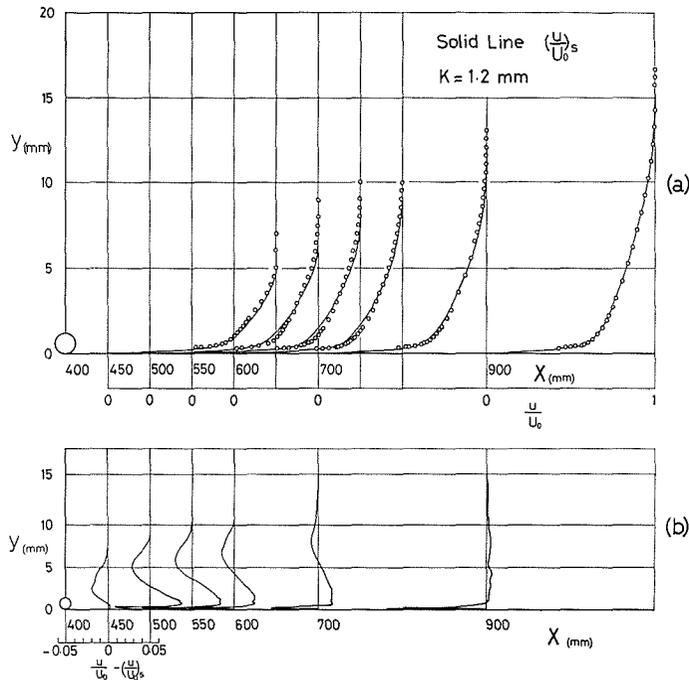


図9 乱流境界層の発達状況

$$\Pi = \kappa H \frac{Re_\theta}{Re_\delta} \frac{U_0}{u_\tau} - (1 + \varepsilon) \quad (16)$$

のように書けるので、(10) 式および (15) 式を (16) 式に代入して、 Π を求め、これと表 2 に示してある wake function $W(y/\delta)$ とから、(6) 式によって、相似な速度分布が算定できることになる。

粗さ要素から発達した乱流境界層が十分発達した、あるいは相似な速度分布になっているかどうかの判定は、上記の手順により計算した速度分布と、実際のそれとを比較すればよく、また、単に、相似かどうかの判定だけであれば、(16) 式による Π を使用して、実際の速度分布を (6) 式に代入し、これから直接 $W(y/\delta)$ を求めて、表 2 に示した wake function と比較する方が簡単である。

$X=400$ mm の位置にとりつけた粗さ要素から発達する乱流境界層の速度分布を一例として、 $K=1.2$ mm の丸棒について図 9(a) に示す、実線は上記の方法によって算定した相似な速度分布であるが、十分下流ではよく一致しており、粗さ要素に近い位置では、実線から大きく逸脱していることがわかる。

5.2 相似な速度分布のはじまる位置の予測

図 9(a) に示した実線は、発達途中の乱流境界層のもつ Re_θ に対応した相似な速度分布を示すものであるから、実際の速度分布の逸脱量を、次のように定義して図示すれば、図 9(b) のようになる。

$$\Delta \frac{u}{U_0} = \frac{u}{U_0} - \left(\frac{u}{U_0} \right)_s \quad (17)$$

ただし、 $(u/U_0)_s$ は計算によって求めた相似な速度分布である。

この $\Delta u/U_0$ が速度分布の y 軸の全領域にわたって測定精度の誤差範囲内になると、その位置 x_s (仮想原点からの距離) が相似な速度分布の開始点を与えることになる。 x_s の位置を明確にするには、 $\Delta u/U_0$ の絶対値を y 方向に積分した量を次のように定義して用いるとよい。

$$S\left(\frac{y}{\theta}\right) = \int_0^\infty \left| \Delta \frac{u}{U_0} \right| d\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad (18)$$

この量 $S(y/\theta)$ を $\ln Re_{ex}$ に対して図示したのが図 10 である。これより種々の粗さに関して、ほぼ同一の勾配をもつ直線が、 $S \simeq 0.04$ なる一定値の付近で、折れ曲るように変化することがわかる。この折れ曲る位置が求める x_s であって、ここで一定値が 0 とならないのは、測定誤差が蓄積されているためと思われる。また図 10 右上にみられるように、 x_s を $\ln Re_{exs}$ であらわす

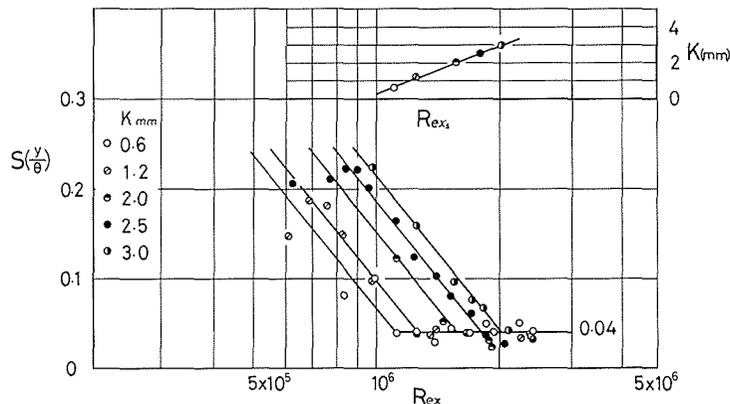


図 10 相似な速度分布のえられる位置

と、 K に関して直線的に変化することが認められた。

6. 結 言

平板の先端付近に設けた粗さ要素から発達する乱流境界層の平均流に関する諸特性を、レイノルズ数範囲 $10^3 < Re_\theta < 1.5 \times 10^4$ にわたって検討し、つぎの結果をえた。

- 1) 十分に発達した速度分布に相似な速度分布は、(5), (6), (10), (11), (14), (16) の諸式と、表 2 を用いて、(3) 式および (6) 式から計算することができる。
- 2) 測定した速度分布が相似な形状であるか否かの判定は、(6) 式から求められる $W(y/\delta)$ の形状を表 2 と比較することによって、容易に行なうことができる。
- 3) 相似な速度分布のえられる位置は、

$$S\left(\frac{y}{\theta}\right) = \int_0^\infty \left| \frac{u}{U_0} - \left(\frac{u}{U_0}\right)_s \right| d\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

の値を、 $\ln Re_m$ について図 10 のように表わすとき、直線が折れ曲る位置 x_s として明確に求めることができる。

文 献

- 1) Schlichtin, H.: Boundary Layer Theory, McGRAW-HILL, 6th. ed., 1968.
- 2) Klebanoff, P. & Diehl, Z.: NACA Report No. 1110, 1951.
- 3) Klebanoff, P. & Diehl, Z.: NACA Report No. 1247, 1954.
- 4) Rosenhead, L.: Laminar Boundary Layer, Oxford Univ. Press, 1963.
- 5) Coles, D.: J. Fluid Mech. 1, 191, 1956.
- 6) Simpson, R. L.: J. Fluid Mech. 42, 769, 1970.
- 7) Shnbauer, G. B. & Tchen, C. M.: Turbulent Elow, Princeton Univ. Press, 1961.