HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	任意サンプル数のデータによる二次元高速フーリェ変換法（第1報）：そのアルゴリズム
Author(s)	青木，由直
Citation	北海道大學工學部研究報告，67，73-82
Issue Date	1973-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41133
Type	departmental bulletin paper
File Information	67_73-82.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

任意サンプル数のデータによる二次元高速フーリェ変換法 (第1報)

——そのアルゴリズム——

青　木　由　直

(昭和47年11月30日受理)

Two-Dimensional Fast Fourier Transform with Data of Arbitrary Sampling Number (1)

—Its Algorithm—

Yoshinao AOKI

Department of Electronic Engineering

(Received November 30, 1972)

Abstract

An algorithm of a two-dimensional fast Fourier transform is discussed. The algorithm is applicable for the calculation of a two-dimensional discrete Fourier transform with data of different sampling numbers with respect to each dimension. The algorithm is derived by factoring the Fourier transform matrix when the sampling numbers can be factored. Even when the sampling numbers are primes, the algorithm is valid, resulting in an algorithm applicable to any numbers of sampled data. To estimate the time required in the tansform operation, the number of multiplications is discussed by running a comparison between the fast Fourier transform algorithm and a conventional one.

1. まえがき

Cooley と Tukey により開発された高速フーリェ変換法 (Fast Fourier Transform, 略して FFT と書く)[1,2]は, フーリェ変換を短時間で計算することを可能にしいろいろな分野で有効に使用されている。特にデータの数が多くなる程 FFT のアルゴリズムはその有効性を発揮するので, ホログラム情報処理[3]などのような二次元の情報を扱う場合には従来の計算方法に比べて格段に計算時間を短縮することができる。しかし Cooley と Tukey による FFT のアルゴリズムでは, データのサンプル数が $2n$ ($n=1, 2, ...$) のものであるため不便なことが多い。例えば二次元の場合, $64\times64=4096$ 個のサンプル点で不充分な場合次にとり得るサンプル数は $128\times128=16384$ 個となりデータの個数の選び方が非常に制限されてくる。そこで任意のサンプル数のデータによる FFT のアルゴリズムの開発が望まれることになるが, 一次元の場合についてはそのようなアルゴリズム[4]が発表されてきている。本報告ではこの一次元のアルゴリズムに沿って二次元 FFT のアルゴリズムについて論じている。二次元のアルゴリズムは一次元のアルゴリズムの拡張であるが, 二次元のため一次元のアルゴリズムでは考えなくてもよい問題があらわれてく

* 電子工学科

る。例えば各次元のサンプル数が異なる場合などがそれで，これらの点を考慮し二次元のアルゴリズムを考案している。

2. 二次元の離散的フーリェ変換

二変数 t, v の関数 $x(t, v)$ のフーリェ・スペクトル関数を $y(s, u)$ とする。ここで s, u はそれぞれ変数 t, v に対応するフーリェ・スペクトル座標である。関数 $x(t, v)$ と $y(s, u)$ は次式のフーリェ変換で結びつけられている。

$$y(s, u)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t, v)e^{-i2\pi(st+uv)}dtdv \tag{1}$$

ここで関数 $x(t, v)$ が t, v 座標に関してそれぞれ $\Delta t, \Delta v$ のサンプル間隔でサンプルされたとして，サンプルされた関数 $X(t, v)$ をつぎのようにあらわす。

$$X(t, v)=\sum_{m=0}^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}x(t, v)\delta\left(\frac{t}{\Delta t}-m\right)\delta\left(\frac{v}{\Delta v}-n\right) \tag{2}$$

ただし δ はデラックのデルタ関数で μ, ν は t, v 座標に関してのサンプル数である。式 (2) を式 (1) に代入して，離散的関数 $X(t, v)$ のフーリェ・スペクトル $Y(s, u)$ を求めるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}Y(s, u)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}x(t, v)\delta\left(\frac{t}{\Delta t}-m\right)\delta\left(\frac{v}{\Delta v}-n\right)e^{-i2\pi(st+uv)}dtdv\\&=\Delta t\Delta v\sum_{m=0}^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}x(m\Delta t, n\Delta v)e^{-i2\pi(sm\Delta t+un\Delta v)}\end{aligned} \tag{3}$$

ここでサンプル数 μ, ν が整数 α, β, M, N で $\mu=\alpha M, \nu=\beta N$ とあらわされるように選ぶ。つぎに式 (3) において s, u 座標に関して間隔 $1/M\Delta t$, $1/N\Delta v$ でサンプリングをおこなう。このサンプリングは，関数 $x(t, v)$ を

$$x(t, v)=x(t+M\Delta t, v)=x(t, v+N\Delta v)=x(t+M\Delta t, v+N\Delta v)=\cdots \tag{4}$$

のように $M\Delta t, N\Delta v$ を周期とする周期関数とした場合，そのフーリェ係数は $s-u$ 平面で，$1/M\Delta t$, $1/N\Delta v$ の間隔でならんでいることを意味している。この点については一次元の場合につき付録Ⅰで説明をくわえている。サンプルされたフーリェ・スペクトルはつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned}Y\left(\frac{m'}{M\Delta t}, \frac{n'}{N\Delta v}\right)&=\Delta t\Delta v\sum_{m=0}^{\alpha M-1}\sum_{n=0}^{\beta N-1}x(m\Delta t, n\Delta v)e^{-i2\pi(m'm/M+n'n/N)}\\&=\Delta t\Delta v\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{a=0}^{\alpha-1}\sum_{b=0}^{\beta-1}x((m+aM)\Delta t, (n+bN)\Delta v)\right)e^{-i2\pi(m'm/M+n'n/N)}\end{aligned} \tag{5}$$

ただし式 (5) の導出にあたっては，指数関数の周期性を利用して $\exp[-i2\pi m'(m+aM)/M]=\exp[-i2\pi m'm/M]$ としている。ここで式 (5) のなかの関数をつぎのように書き直す。

$$x'(m\Delta t, n\Delta v)=\sum_{a=0}^{\alpha-1}\sum_{b=0}^{\beta-1}x((m+aM)\Delta t, (n+bN)\Delta v) \tag{6}$$

式 (6) であらわされた関数は，元の関数を t 座標に関しては $M\Delta t, 2M\Delta t, \ldots$, v 座標に関しては $N\Delta v, 2N\Delta v, \ldots$のようにずらして重ね合わせた関数である。ここで元の関数を t 座標に関しては $-M\Delta t/2$ から $M\Delta t/2$ までしか値を持たず，v 座標に関しては $-N\Delta v/2$ から $N\Delta v/2$ までしか値を持たぬようにしてやれば，式 (6) の関数は t, v 座標に関してそれぞれ周期が $M\Delta t$, $N\Delta v$ の周期関数になっているのがわかる。この場合一周期についてのみ考慮すれば充分であるから式 (5) をつぎのように書き直す。

$$Y\left(\frac{m'}{M\Delta t}, \frac{n'}{N\Delta v}\right)=\Delta t\Delta v\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}x'(m\Delta t, n\Delta v)e^{-i2\pi(m'm/M+n'n/N)} \tag{7}$$

式 (7) は元の関数の一周期にわたる $M\times N$ 個のサンプル値の離散的フーリェ変換 (Discrete Fourier Transform, 略して DFT) をあらわしている。

つぎに式 (7) をみやすくするために, $m'=k'-1$, $n'=l'-1$, $m=k-1$, $n=l-1$ と置き換え, つぎのような置き換えをおこなう。

$$Y\left(\frac{k'-1}{M\Delta t}, \frac{l'-1}{N\Delta v}\right)=Y_{k'l'},\quad x'((k-1)\Delta t, (l-1)\Delta v)=X_{kl},\quad V=e^{-i2\pi/M},\quad W=e^{-i2\pi/N} \tag{8}$$

簡単のため $\Delta t=1/M$, $\Delta v=1/N$ とすると式 (8) を用いて式 (7) はつぎのようにあらわされる。

$$Y_{k'l'}=\frac{1}{MN}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}X_{kl}V^{(k'-1)(k-1)}W^{(l'-1)(l-1)} \tag{9}$$

式 (9) であらわされた二次元 DFT をいかに複素数の掛算回数を少なくして計算するかがつぎの問題となる。

3. 変換マトリックスの因数分解

式 (9) をマトリックスで表わすとつぎのようになる。

$$[Y]=[V][X][W] \tag{10}$$

ただし $[Y]$ は $Y_{k'l'}$ のマトリックス要素を持つ M 行 N 列のマトリックスで $[X]$ は X_{kl} のマトリックス要素を持つ M 行 N 列のマトリックスである。$[V]$, $[W]$ はフーリェ変換マトリックスとでもよばれるべきマトリックスでそれぞれ M 行 M 列, N 行 N 列のつぎのようなマトリックスである (付録 II 参照)。

$$[V]=\begin{pmatrix}1&\cdots\cdots&1&\cdots\cdots&1\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&V^{(k'-1)(k-1)}&\cdots&V^{(k'-1)(M-1)}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&V^{(M-1)(k-1)}&\cdots\cdots&V\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$[W]=\begin{pmatrix}1&\cdots\cdots&1&\cdots\cdots&1\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&W^{(l'-1)(l-1)}&\cdots&W^{(l'-1)(N-1)}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&W^{(N-1)(l-1)}&\cdots\cdots&W\end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで式 (11) および (12) のマトリックについてマトリックスの因数分解をおこなってゆく方法を考える。式を簡単にするためにつぎのような表記法を用いる。要素が a_m の M 行からなる列ベクトルを $[A|$ とし,

$$[A|=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\\ \vdots\\ a_M\end{pmatrix}=[a_m|_{m=1}^{M} \tag{13}$$

とあらわす。同様に M 列の行ベクトル $|A]$ については

$$|A]=[a_1\cdots a_m\cdots a_M]=\overset{M}{m=1}|a_m]=|a_m]_{m=1}^{M} \tag{14}$$

とあらわす。

式 (11) と (12) のマトリックスは同じ形をしているから式 (11) のマトリックスについて考えれば同じ議論が式 (12) のマトリックスについても成立つ。サンプル数 M が素数でなく $M=p\times M'$ のように因数に分解できたとする。この場合式 (11) のマトリックスの k' 番目の行ベクトルを取り出して書いてみるとつぎのようになる。

$$|v_{k'k}]_{k=1}^{M}=[v_{k'1}\quad v_{k'2}\cdots\quad v_{k'p}\ v_{k'1}V^{p(k'-1)}\quad v_{k'2}V^{p(k'-1)}\ \cdots v_{k'p}V^{p(k'-1)}$$
$$v_{k'1}V^{2p(k'-1)}\quad v_{k'2}V^{2p(k'-1)}\ \cdots\ v_{k'p}V^{2p(k'-1)}$$
$$v_{k'1}V^{(M'-1)p(k'-1)}\quad v_{k'2}V^{(M'-1)p(k'-1)}\quad v_{k'p}V^{(M'-1)p(k'-1)}] \tag{15}$$

ただし式 (15) において小文字の $v_{k'k}$ は式 (11) のマトリックス要素をあらわしており $v_{k'k}=V^{(k'-1)(k-1)}$ である。ここで

$$|v_{k'k}]_{k=1}^{p}=[v_{k'1}\ v_{k'2}\ \cdots\ v_{k'p}] \tag{16}$$

を用いて式 (15) を書き直すとつぎのようになる。

$$|v_{k'k}]_{k=1}^{M}=[|v_{k'k}]_{k=1}^{p}\ |v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{p(k'-1)}\ \cdots\ |v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{(M'-1)p(k'-1)}]=\|v_{k'k}]_{k-1}^{p}V^{(q-1)p(k'-1)}]_{q=1}^{M'} \tag{17}$$

ここで

$$V^{p(k'-1)}=e^{-(i2\pi/M)p(k'-1)}=e^{-i2\pi\{p(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M}} \tag{18}$$

である。ただし $\{\ \}_{\mathrm{MOD}\,M}$ は M で割った余りを示す。

$$\{p(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M}=\{p(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,p\times M'}=p\{(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M'} \tag{19}$$

であるので,

$$|v_{k'k}]_{k=1}^{M}=\begin{cases}\|v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{0(q-1)}]_{q=1}^{M'}, & \{(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M'}=0\\ \|v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{p(q-1)}]_{q=1}^{M'}, & \{(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M'}=1\\ \|v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{2p(q-1)}]_{q=1}^{M'}, & \{(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M'}=2\\ \vdots & \vdots\\ \|v_{k'k}]_{k=1}^{p}V^{(M'-1)p(q-1)}]_{q=1}^{M'}, & \{(k'-1)\}_{\mathrm{MOD}\,M'}=M'-1\end{cases} \tag{20}$$

となる。さらに式を簡単にするために,

$$\left.\begin{aligned}&|v_{1k}]_{k=1}^{p}=\alpha_1,\ |v_{2k}]_{k=1}^{p}=\alpha_2,\ \cdots,\ |v_{M'k}]_{k=1}^{p}=\alpha_{M'}\\ &\phi_p=|0]_{k=1}^{p}=[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\\ &U_p=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 1\\ \vdots & \ddots\\ 0 & \cdots\cdots 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

とおく。ただし ϕ_p, U_p はそれぞれ p 個の 0 を要素として持つ行ベクトルと p 行 p 列の単位マトリックスである。式 (20) と (21) を用いて式 (11) のマトリックスを因数分解した形で書くとつぎのようになる。

$$[V]=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \phi_p & \phi_p & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \alpha_2 & \phi_p & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \phi_k & \alpha_3 & & \vdots\\ \phi_p & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{M'}\\ \alpha_{M'+1} & \phi_p & \cdots & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \alpha_{M'+2} & \cdots & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2M'}\\ \alpha_{2M'+1} & \phi_p & \cdots & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \alpha_{2M'+2} & \cdots & \cdots & \phi_p\\ \alpha_{(p-1)M'+1} & \phi_p & \cdots & \cdots & \phi_p\\ \phi_p & \alpha_{(p-1)M'+2} & & & \vdots\\ \phi_p & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{pM'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_p & U_p & U_p & \cdots & U_p\\ U_p & V^pU_p & V^{2p}U_p & \cdots & V^{(M'-1)p}U_p\\ U_p & V^{2p}U_p & V^{4p}U_p & \cdots & V^{(M'-2)p}U_p\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ U_p & V^{(M'-1)p}U_p & V^{(M'-2)p}U_p & \cdots & V^pU_p\end{pmatrix} \tag{22}$$

式 (22) の因数分解されたマトリックスのうち第2番目のものは元のマトリックス $[V]$ と似た形をしている。つまり式 (11) のマトリックスにおいて要素1のかわりに単位マトリックス U_p, V のかわりに V^p とおき M を M' と考えれば式 (22) の第2番目のマトリックスとなる。したがって M' が素数でなくさらに因数分解できれば，今まで述べて来たと同じ方法で式 (22) の第2番目のマトリックスも因数分解できる。式 (22) の第1番目のマトリックスを $[V_1]$ とし，第2番目のマトリックスを因数分解して得られる最初のマトリックスを $[V_2]$ と順次名づけてゆけば，M の因数が m 個の場合マトリックス $[V]$はつぎのようにあらわされる。

$$[V]=[V_1][V_2]\ldots[V_m] \tag{23}$$

式 (12) のマトリックスに関しても同様の議論が成立する。ここで式 (22) の第1番目のマトリックスからも明らかなように $[V_1]$, $[V_2]$, ... のマトリックスはその要素の大部分が0となっている。このことが $[V]$ をまともに計算するよりも式 (23) のように0を多く含むマトリックスに分解して計算をおこなった方が計算回数が少なくてすむことの理由になっている。次節では実例を示し，計算回数に関して考察をおこなってみる。

4. 因数分解法の例と計算回数

簡単な場合につき3節で述べたフーリェと変換マトリックスの因数分解法の例を示しておく。データが 8×6 個の場合，$M=8$, $N=6$ として M については因数2を取り出し，N については因数3を取り出して計算してみる。つまりマトリックス $[V]$ に関しては $p=2$, $M'=4$, マトリックス $[W]$ に関しては $p=3$, $M'=2$ として式 (22) にしたがって因数分解する。

$$[Y]=[V_1][V_1'][X][W_1][W_2] \tag{24}$$

$$[V_1]=\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & V^1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^3\\
\hdashline
1 & V^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & V^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^6 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V^7
\end{array}\right) \tag{25}$$

$$[V_1']=\left(\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
\hdashline
1 & 0 & V^2 & 0 & V^4 & 0 & V^6 & 0\\
0 & 1 & 0 & V^2 & 0 & V^4 & 0 & V^6\\
\hdashline
1 & 0 & V^4 & 0 & V^0 & 0 & V^4 & 0\\
0 & 1 & 0 & V^4 & 0 & V^0 & 0 & V^4\\
\hdashline
1 & 0 & V^6 & 0 & V^4 & 0 & V^2 & 0\\
0 & 1 & 0 & V^6 & 0 & V^4 & 0 & V^2
\end{array}\right) \tag{26}$$

$$[W_1]=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W^1 & W^2 \\ 1 & W^2 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & W^3 & W^0 \\ 1 & W^4 & W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W^5 & W^4 \end{array}\right) \tag{27}$$

$$[W_2]=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & W^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^3 \end{array}\right) \tag{28}$$

ここで式 (26) の $[V_1']$ は再び因数分解可能である。つまり $M'=4=2\times 2$ として因数 2 を取り出して式 (22) にしたがって式 (26) のマトリックスを $[V_1']=[V_2][V_3]$ と分解するとつぎのようになる。

$$[V_2]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & V^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & V^2 \\ 1 & 0 & V^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & V^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & V^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & V^6 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$[V_3]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & V^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & V^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & V^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & V^4 \end{pmatrix} \tag{30}$$

よってフーリェ係数 $[Y]$ はつぎのようにして計算されることになる。

$$[Y]=[[W_2]^T[W_1]^T[[V_1][V_2][V_3][X]]^T]^T \tag{31}$$

ここで添字 T はマトリックスの転置をおこなうことを意味している。

つぎに式 (31) のようにあらわされたマトリックスの積の計算において 0 でない掛算の回数について考えてみる。まず一次元 FFT の場合を考え，M の因数を $p_1, p_2, \ldots, p_m$ とすれば，

$$M=\prod_{i=1}^{m} p_i \tag{32}$$

となる。M 行 M 列のマトリックスの掛算において 0 でない掛算の回数を $F(M)$ であらわすと式 (22) のようにマトリックスを一回因数分解をした後では掛算の回数はつぎのようになる。

$$F(M)=Mp_1+p_1F\left(\frac{M}{p_1}\right) \tag{33}$$

式 (22) においては，α_1, α_2, ... 等は p_1 個の行ベクトルで，その行ベクトルが全部で M 個あるから式 (33) の右辺の第1項が出てくる。式 (22) の第2番目のマトリックスは，p_1 行 p_1 列の単位マトリックスと M/p_1 行 M/p_1 列のマトリックスの積であるので掛算の回数は $p_1F(M/p_1)$ となる。式 (33) の $F(M/p_1)$ に式 (33) の関係を繰返し用いると

$$F(M)=M\sum_{i=1}^{m-1}p_i+p_1p_2\ldots p_{m-1}F(p_m) \tag{34}$$

となる。ここで p_m は素数であるので $F(p_m)=p_m^2$ とすれば結局 $F(M)$ は次式のように求まる。

$$F(M)=M\sum_{i=1}^{m}p_i \tag{35}$$

一次元の場合はデータが1列の列ベクトルであったものが，二次元では N 列に増えるわけであるので式 (35) を N 倍すれば $[V]$ のマトリックスの掛算回数については数えつくしたことになる。したがって $[W]$ のマトリックスの計算にあらわれてくる掛算の回数を同様に計算して加えれば全体の掛算の回数 $F(M, N)$ が得られる。$N=q_1q_2\ldots q_n$ と因数分解できるとすれば，$F(M, N)$ はつぎのように書ける。

$$F(M, N)=MN\left(\sum_{i=1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{n}q_i\right) \tag{36}$$

特に $M=p^m$, $N=q^n$ の場合はつぎのようになる。

$$F(M, N)=MN(p\log_p^M+q\log_q^N) \tag{37}$$

式 (7) であらわされている DFT をまともに計算するとその掛算回数 $F'(M, N)$ は，スペクトル面の一点を計算するのに $M\times N$ 回の計算が必要なことを考えればつぎのように求まる。

$$F'(M, N)=M^2N^2 \tag{38}$$

式 (37) であらわされる回数は式 (38) であらわされる回数より少なく，M, N が大きくなるとその差はきわめて大きくなる。例えば $M=N$, $p=q=2$ とすれば，

$$F(N, N)=4N^2\log_2^N \tag{39}$$

$$F'(N, N)=N^4 \tag{40}$$

となるから N が大きくなると $F(N, N)$ は $F'(N, N)$ に比べてきわめて小さくなることがわかる。したがって二次元のサンプル数の多い DFT の計算法として FFT のアルゴリズムがきわめて有効な方法であることがわかる。

5. あ と が き

任意サンプル数のデータの二次元 FFT のアルゴリズムについて考察した。このアルゴリズムはフーリェ変換マトリックスを因数分解してゆく方法なので，サンプル数が素数であれば FFT の意味がないが，サンプル数がすこしでも因数分解できれば，それだけ計算回数を減らしてゆくことができる。このアルゴリズムのように任意サンプル数のデータに FFT が適用できると，データ数の選び方を FFT のアルゴリズムに合わせる必要がなくなり，FFT を使用することが格段に便利になる。

アルゴリズムができるとつぎの問題はこのアルゴリズムを利用しての計算機プログラミングである。プログラミングも作り方によっては，FFT のアルゴリズムを利用しているのに理論通り演算時間が短縮されない場合がある。このようなプログラミングの問題については，このテーマの第2報で論ずる予定である。

文　　献

1) Cooley, J. W. and J. W. Tukey: Math. of Comput., vol. 19(1965), pp. 297-301.
2) Cooley, J. W., P. A. W. Lewis and P. D. Welch: IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. AU-15 (1967), 2, pp. 79-84.
3) 青木由直: 工学部研究報告, 64 (昭47), pp. 37-45.
4) Glassman, J. A.: IEEE Trans. on Computers, vol. C-19 (1970), 2, pp. 105-116.
5) Bracewell, B.: The Fourier transform and its applications. (McGraw-Hill Book Co., 1965), p. 214.

付　　録

I　DFT に関する二，三の考察

簡単のため一次元で DFT に関する二，三の考察をおこなってみる。図 1-a のような δ 関数をずらして重ねていったサンプリング関数 comb$(t/\Delta t)$ を考える。

$$\mathrm{comb}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{\Delta t}-n\right) \tag{A-1}$$

ただし Δt はサンプリング間隔である。$\mathscr{F}$ をフーリェ変換オペレータとすれば式 (A-1) のフー

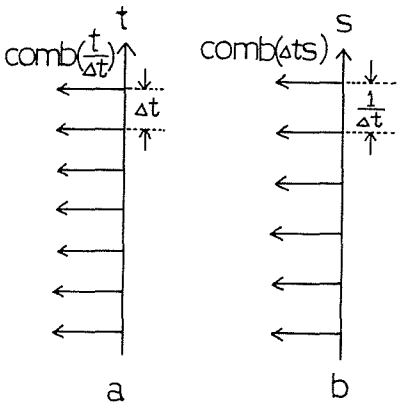

図 1

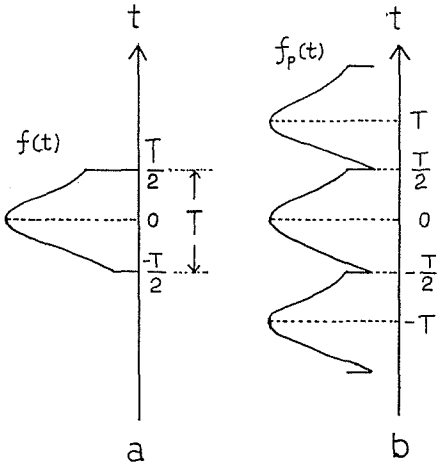

図 2

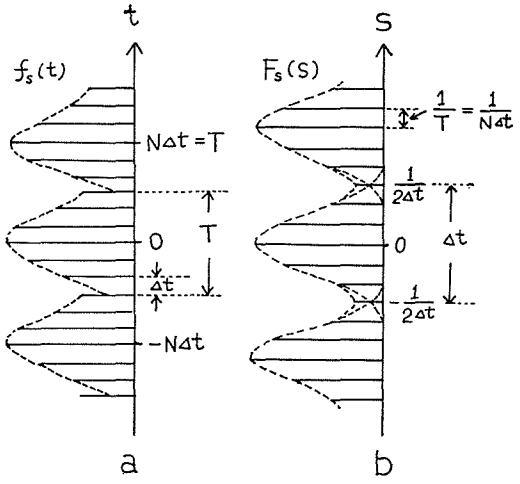

図 3

リェ変換はつぎのように求まる[5]。

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{comb}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right]=\Delta t\,\mathrm{comb}\,(\Delta t s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(s-\frac{n}{\Delta t}\right) \tag{A-2}$$

式 (A-2) であらわされる関数を図 1-b に示しておく。つぎに図 2-a に示すように $-T/2\leqslant t\leqslant T/2$ の範囲で値をもち，その他の範囲では 0 となっている関数を $f(t)$ とし，そのフーリェ変換を $F(s)$ とする。

$$\mathscr{F}\,[f(t)]=F(s) \tag{A-3}$$

図 2-a の関数を T づつずらせて重ねてつくった図 2-*b* に示すような周期 T の周期関数 $f_p(t)$ はつぎのようにあらわされる。

$$f_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t'-nT)f(t-t')dt'=\frac{1}{T}\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T}\right)*f(t) \tag{A-4}$$

ただし * はコンヴォリューション積分をあらわす。ここで式 (A-4) の関係を式 (A-1) の関数で示されるようなサンプリングをおこなって得られる関数を $f_S(t)$ とする。$f_S(t)$ は式 (A-4) と式 (A-1) の積よりつぎのように書ける。

$$f_S(t)=\left[\frac{1}{T}\,\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T}\right)*f(t)\right]\mathrm{comb}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \tag{A-5}$$

式 (A-5) の関数を図 3-a に示しておく。つぎにこの $f_S(t)$ のフーリェ変換をおこなってみる。二つの関数の積のフーリェ変換は各々の関数のフーリェ変換のコリレーションに，二つの関数のコンヴォリューションのフーリェ変換は各々の関数のフーリェ変換の積になることに留意すれば，$f_S(t)$ のフーリェ変換はつぎのように求まる。

$$F_S(s)=\mathscr{F}\,[f_S(t)]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{T}\,\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T}\right)*f(t)\right]*\mathscr{F}\left[\mathrm{comb}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right]=[\mathrm{comb}\,(Ts)F(s)]*\Delta t\,\mathrm{comb}(\Delta t s) \tag{A-6}$$

ただし * 印はコリレーション積分をあらわしている。comb 関数とのコリレーションは，コンヴォリューションと同じものになるから式 (A-6) はコンヴォーリューション積分と考えてもよい。すると関数 $F_S(s)$ は，図 2-b の関数 $f(t)$ のフーリェ変換 $F(s)$ を s 座標上で $1/T$ 間隔でサンプルしたものを，$1/\Delta t$ づつずらして重ね合せた周期関数となっている。図 3-b は $F_S(s)$ を示している。このことからフーリェ・スペクトル座標上では DFT の値は $(1/T)=(1/N\Delta t)$ $(N=T/\Delta t)$ の間隔でならんでいることになる。$f(t)$ のフーリェ変換 $F(s)$ が s 座標上で $1/\Delta t$ 以上にひろがっていると $\mathrm{comb}\,(Ts)F(s)$ を $1/\Delta t$ づつずらして重ねていった場合 $F(s)$ の形が保存されぬ部分がでてくる。これに反して $F(s)$ が $1/\Delta t$ 以内にあれば，つまり元の関数 $f(t)$ が $1/2\Delta t$ 以上の周波数成分を含まねば，$\mathrm{comb}\,(Ts)F(s)$ を $1/\Delta t$ づつずらして重ねていっても重なり合う部分がないから，DFT で得られるフーリェ・スペクトルは正確に $f(t)$ のフーリェ・スペクトルとなっている。

II　DFT のマトリックス表示

式 (9) の DFT をマトリックスで表わすとつぎのようになる。

$$\begin{pmatrix} Y_{11}\cdots Y_{1l'}\cdots Y_{1N}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ Y_{k'1}\cdots Y_{k'l'}\cdots Y_{k'N}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ Y_{M1}\cdots Y_{Ml'}\cdots Y_{MN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdots 1\cdots\cdots 1\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ 1\cdots V^{(k'-1)(k-1)}\cdots V^{(k'-1)(M-1)}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ 1\cdots V^{(M-1)(k-1)}\cdots V\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{N} X_{1l}W^{0(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{1l}W^{(l'-1)(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{1l}W^{(N-1)(l-1)} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{N} X_{kl}W^{0(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{kl}W^{(l'-1)(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{kl}W^{(N-1)(l-1)} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{N} X_{Ml}W^{0(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{Ml}W^{(l'-1)(l-1)} \cdots \sum_{l=1}^{N} X_{Ml}W^{(N-1)(l-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \cdots\cdots\cdots 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 \cdots V^{(k'-1)(k-1)} \cdots V^{(k'-1)(M-1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 \cdots V^{(M-1)(k-1)} \cdots V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \cdots X_{1l'} \cdots X_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ X_{k1} \cdots X_{kl} \cdots X_{kN} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ X_{M1} \cdots X_{Ml} \cdots X_{MN} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 \cdots\cdots\cdots 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 \cdots W^{(l'-1)(l-1)} \cdots W^{(l'-1)(N-1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ 1 \cdots W^{(N-1)(l-1)} \cdots W \end{pmatrix} \qquad \text{(A-7)}$$