HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	短直角柱の3次元応力解析について
Author(s)	奥村, 勇
Citation	北海道大學工學部研究報告, 68(1), 11-24
Issue Date	1973-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41138
Type	departmental bulletin paper
File Information	68(1)_11-24.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

短直角柱の3次元応力解析について

奥　村　　勇*

(昭和48年3月23日受理)

On the Three Dimensional Stress Analysis of a Short Right Prism

Isamu OKUMURA

Abstract

This paper presents a three dimensional stress analysis of a short right prism by the series method. The solution of the governing equations of three dimensional stress problems was expressed in a generalized H. Neuber's solution[1] to which was added the third term 2 rot ϑ and which is equivalent to J. Boussinesq's solution.

The boundary conditions of the short right prism are free from external forces on the side surfaces of the prism and the uniformly distributed partial rectangular compressive load is accepted on the upper surface. The displacements of the lower surface of the prism are constrained, that is, $u=0$, $v=0$ and $w=0$.

The boundary conditions of this type are frequently found in the foundation structures of civil engineering.

Numerical calculations were done for the case of a cube under a square load distributed in symmetry.

The stress distributions were calculated for several ratios of the cross-sectional breadth of the prism to the loaded breadth from 6.0 to 10/9. These results are shown in Fig. 3～Fig. 8.

The numerical results presented here were obtained using 18 terms in the Fourier series. The simultaneous linear equations of high order in many unknown constants produced in such cases were solved successfuly by the iterative method using an accelerator.

The convergence of normal stress is satisfactory in the interior of the prism. Particularly, the convergence of the normal stress σ_z along the central axis of the prism is very rapid and satisfactory results are obtained by using only 8 terms in the Fourier series.

1. 緒　　言

3次元応力問題の理論解には種々あるが，それらが一応 J. Boussinesq の解に一致すること，また逆に，J. Boussinesq の解に等価な解が見かけ上，H. Neuber の解およびそれに等価な解に変形され得ることが秦教授により示されている[1]。

本論文では，H. Neuber の解に第3項2rot ϑ を附加した J. Boussinesq の解に等価な一般化されたあるいは拡張された H. Neuber の解を用い，Fig. 1 に示した短直角柱の3次元応力解析を

* 土木工学科　構造力学講座

級数解法によりおこなったものである。

Fig. 1 に示した短直角柱の境界条件は，側面が自由で，上面に x, y 軸に関して対称に分布した矩形部分圧縮荷重を受け，底面の変位が拘束された場合である。この種の境界条件は，土木構造物の基礎構造によく見られるものである。

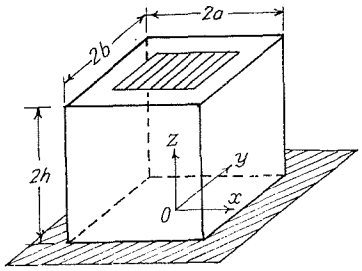

Fig. 1. Coordinate system of the right prism.

2. 基礎方程式とその解

変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ で表わした弾性体の釣合方程式は

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\ div}\,\boldsymbol{u}=0 \tag{1}$$

ここで，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

G: せん断弾性係数，ν: ポアソン比

となる。上式の解である，J. Boussinesq の解の一般化された表現は次のようである。

$$2G\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\varphi+2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}+\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda})-4(1-\nu)\boldsymbol{\lambda} \tag{2}$$

ただし

$$\nabla^2\varphi=\nabla^2\boldsymbol{\lambda}=\nabla^2\boldsymbol{\vartheta}=0$$
$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\quad \boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\quad \boldsymbol{\vartheta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$$

一方，H. Neuber の解は周知のように次のようなものである。

$$2G\boldsymbol{u}=-\,\mathrm{grad}\,F+4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi} \tag{3 a}$$

ただし

$$F=\Phi_0+\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Phi} \tag{3 b}$$
$$\nabla^2\Phi_0=\nabla^2\boldsymbol{\Phi}=0,\quad \boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$$

今，式 (2) において

$$\varphi=-\Phi_0,\quad \boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{\Phi},\quad F=\Phi_0+\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Phi}$$

とおくと次式が得られる。

$$2G\boldsymbol{u}=-\,\mathrm{grad}\,F+4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi}+2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} \tag{4}$$

式 (4) は右辺の第 3 項 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ を除けば式 (3 a) の H. Neuber の解に一致する。すなわち，H. Neuber の解に 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ を附加したものは J. Boussinesq の解ということができる。したがって，式 (4) を J. Boussinesv の解あるいは一般化された H. Neuber の解[1] と呼ぶことができる。本論文ではこれを用いることにする。

式 (4) に含まれる調和関数の選択には種々あると思われるが，次のようにしてこれを決定する。

式 (3 b) の両辺に grad を作用させると

$$\mathrm{grad}\,F=\mathrm{grad}\,\Phi_0+\boldsymbol{\Phi}+x\,\mathrm{grad}\,\Phi_1+y\,\mathrm{grad}\,\Phi_2+z\,\mathrm{grad}\,\Phi_3$$

さらに div を作用を作用させて

$$\nabla^2 F = \nabla^2 \Phi_0 + 2\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} + x\nabla^2\Phi_1 + y\nabla^2\Phi_2 + z\nabla^2\Phi_3$$

Φ_0, $\Phi_j (j=1,2,3)$ が3次元的調和関数であることを考慮し，上式に再び ∇^2 を作用させると

$$\nabla^2\nabla^2 F = 2\nabla^2\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi} = 2\,\mathrm{div}\,\nabla^2\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{5}$$

が得られる。したがって F は3次元的重調和関数となる。

$$F = e^{i\alpha_r x} e^{i\beta_s y} e^{i\gamma_k z} \tag{6}$$

を式(5)に代入すると次の特性方程式が得られる。

$$\alpha_r^4 + \beta_s^4 + \gamma_k^4 + 2(\alpha_r^2\beta_s^2 + \beta_s^2\gamma_k^2 + \alpha_r^2\gamma_k^2) = 0 \tag{7}$$

これを γ_k について解くと

$$\gamma_k = \pm i\sqrt{\alpha_r^2+\beta_s^2} = \pm i n_{rs} \qquad (\text{等根}) \tag{8}$$

ただし

$$n_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2+\beta_s^2} \tag{9}$$

式(8)を式(6)に代入し，x, y 軸に関する対称性を考慮すると次式を得る。

$$F_{r,s} = \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x \cos\beta_s y(-C^1_{rs}\cosh n_{rs}z - \bar{C}^1_{rs}\sinh n_{rs}z + C^2_{rs}z\sinh n_{rs}z + \bar{C}^2_{rs}z\cosh n_{rs}z) \tag{10 a}$$

同様に式(7)を α_r, β_s について解いて次式を得る。

$$F_{k,s} = \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y \cos\gamma_k z(-A^1_{ks}\cosh l_{ks}x + A^2_{ks}x\sinh l_{ks}x) \tag{10 b}$$

$$F_{k,r} = \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x \cos\gamma_k z(-B^1_{kr}\cosh m_{kr}y + B^2_{kr}y\sinh m_{kr}y) \tag{10 c}$$

ただし

$$l_{ks} = \sqrt{\beta_s^2+\gamma_k^2}, \quad m_{kr} = \sqrt{\alpha_r^2+\gamma_k^2}$$

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{a}, \quad \beta_s = \frac{s\pi}{b}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{2h}$$

$$r, s, k = 0, 1, 2, \cdots$$

したがって

$$F = F_{k,s} + F_{k,r} + F_{r,s} \tag{11}$$

式(3 b)および式(10 a)から式(11)により Φ_0, Φ_j が決定され，それらを一括して示すと次のようである。

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{01(k,s)} &= -\sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y \cos\gamma_k z(A^1_{ks}\cosh l_{ks}x)\\
\Phi_{1(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\gamma_k z \cos\beta_s y(A^2_{ks}\sinh l_{ks}x)\\
\Phi_{02(k,r)} &= -\sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x \cos\gamma_k z(B^1_{kr}\cosh m_{kr}y)\\
\Phi_{2(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x \cos\gamma_k z(B^2_{kr}\sinh m_{kr}y)\\
\Phi_{03(r,s)} &= -\sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x \cos\beta_s y(C^1_{rs}\cosh n_{rs}z + \bar{C}^1_{rs}\sinh n_{rs}z)\\
\Phi_{3(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x \cos\beta_s y(C^2_{rs}\sinh n_{rs}z + \bar{C}^2_{rs}\cosh n_{rs}z)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Φ_0, Φ_j と独立な調和関数 $\theta_j(j=1, 2, 3)$ は自由に選べて，本問題に適した θ_j は次のようである。

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{1(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \sin\gamma_k z \sin\beta_s y (A^3_{ks}\cosh l_{ks}x)\\
\theta_{2(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \sin\gamma_k z \sin\alpha_r x (B^3_{kr}\cosh m_{kr}y)\\
\theta_{3(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \sin\alpha_r x \sin\beta_s y (C^3_{rs}\cosh n_{rs}z + \bar{C}^3_{rs}\sinh n_{rs}z)
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ただし，式(12)および式(13)において，$r=s=0$, $s=k=0$ および $r=k=0$ のような suffix が (00) となる項ははずすことにする。

3. 応力と変位の表現式

変位と応力の関係式により，例えば直応力 σ_x，せん断応力 τ_{xy} は次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) + 2\left(\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z}\right)\\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

他の応力についても式(14)に類似した式が得られる。

式(10 a)から式(13)および式(14)とそれに類似した式を用いることにより直応力およびせん断応力は次のように表わされる。

$$\sigma_x = \sigma_{x(k,s)} + \sigma_{x(k,r)} + \sigma_{x(r,s)} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{x(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y \cos\gamma_k z \,[(l^2_{ks}A^1_{ks} + 2(1-\nu)\,l_{ks}A^2_{ks})\cosh l_{ks}x -\\
&\quad - l^2_{ks}A^2_{ks}\,x\sinh l_{ks}x]\\
\sigma_{x(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x\cos\gamma_k z\,[(-\alpha_r^2 B^1_{kr} + 2\nu m_{kr}B^2_{kr} - 2\alpha_r\gamma_k B^3_{kr})\cosh m_{kr}y +\\
&\quad + \alpha_r^2 B^2_{kr}\,y\sinh m_{kr}y]\\
\sigma_{x(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\,[(2\nu n_{rs}C^2_{rs} + 2\alpha_r\beta_s C^3_{rs} - \alpha_r^2 C^1_{rs})\cosh n_{rs}z +\\
&\quad + (2\nu n_{rs}\bar{C}^2_{rs} + 2\alpha_r\beta_s\bar{C}^3_{rs} - \alpha_r^2\bar{C}^1_{rs})\sinh n_{rs}z + \alpha_r^2 C^2_{rs}\,z\sinh n_{rs}z +\\
&\quad + \alpha_r^2\bar{C}^2_{rs}\,z\cosh n_{rs}z]
\end{aligned}\right\} \quad (15\,a)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y(k,s)} + \sigma_{y(k,r)} + \sigma_{y(r,s)} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{y(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y\cos\gamma_k z\,[(2\nu l_{ks}A^2_{ks} - \beta_s^2 A^1_{ks} + 2\beta_s\gamma_k A^3_{ks})\cosh l_{ks}x +\\
&\quad + \beta_s^2 A^2_{ks}\,x\sinh l_{ks}x]\\
\sigma_{y(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x\cos\gamma_k z\,[\{m^2_{kr}B^1_{kr} + 2(1-\nu)\,m_{kr}B^2_{kr}\}\cosh m_{kr}y -\\
&\quad - m^2_{kr}B^2_{kr}\,y\sinh m_{kr}y]\\
\sigma_{y(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\,[(2\nu n_{rs}C^2_{rs} - 2\alpha_r\beta_s C^3_{rs} - \beta_s^2 C^1_{rs})\cosh n_{rs}z +\\
&\quad + (2\nu n_{rs}\bar{C}^2_{rs} - \beta_s^2\bar{C}^1_{rs} - 2\alpha_r\beta_s\bar{C}^3_{rs})\sinh n_{rs}z +\\
&\quad + \beta_s^2 C^2_{rs}\,z\sinh n_{rs}z + \beta_s^2\bar{C}^2_{rs}\,z\cosh n_{rs}z]
\end{aligned}\right\} \quad (16\,a)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z(k,s)} + \sigma_{z(k,r)} + \sigma_{z(r,s)} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{z(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y \cos\gamma_k z \,[(2\nu l_{ks} A^2_{ks} - \gamma_k^2 A^1_{ks} - 2\beta_s\gamma_k A^3_{ks}) \cosh l_{ks} x + \\
&\quad + \gamma_k^2 A^2_{ks} x \sinh l_{ks} x] \\
\sigma_{z(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x \cos\gamma_k z \,[(2\nu m_{kr} B^2_{kr} + 2\alpha_r\gamma_k B^3_{kr} - \gamma_k^2 B^1_{kr}) \cosh m_{kr} y + \\
&\quad + \gamma_k^2 B^2_{kr} y \sinh m_{kr} y] \\
\sigma_{z(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x \cos\beta_s y \,[\{n^2_{rs} C^1_{rs} + 2(1-\nu) n_{rs} C^2_{rs}\} \cosh n_{rs} z + \\
&\quad + \{n^2_{rs} \bar{C}^1_{rs} + 2(1-\nu) n_{rs} \bar{C}^2_{rs}\} \sinh n_{rs} z - n^2_{rs} C^2_{rs} z \sinh n_{rs} z - \\
&\quad - n^2_{rs} \bar{C}^2_{rs} z \cosh n_{rs} z]
\end{aligned}\right\} \tag{17 a}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy(k,s)} + \tau_{xy(k,r)} + \tau_{xy(r,s)} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\gamma_k z \sin\beta_s y \,[\{-\beta_s l_{ks} A^1_{ks} - (1-2\nu)\beta_s A^2_{ks} + \\
&\quad + \gamma_k l_{ks} A^3_{ks}\} \sinh l_{ks} x + \beta_s l_{ks} A^2_{ks} x \cosh l_{ks} x] \\
\tau_{xy(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \sin\alpha_r x \cos\gamma_k z \,[\{-\alpha_r m_{kr} B^1_{kr} - (1-2\nu)\alpha_r B^2_{kr} - \\
&\quad - \gamma_k m_{kr} B^3_{kr}\} \sinh m_{kr} y + \alpha_r m_{kr} B^2_{kr} y \cosh m_{kr} y] \\
\tau_{xy(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \sin\alpha_r x \sin\beta_s y \,[\{\alpha_r\beta_s C^1_{rs} + (\alpha_r^2 - \beta_s^2) C^3_{rs}\} \cosh n_{rs} z + \\
&\quad + \{\alpha_r\beta_s \bar{C}^1_{rs} + (\alpha_r^2 - \beta_s^2) \bar{C}^3_{rs}\} \sinh n_{rs} z - \alpha_r\beta_s C^2_{rs} z \sinh n_{rs} z - \\
&\quad - \alpha_r\beta_s \bar{C}^2_{rs} z \cosh n_{rs} z]
\end{aligned}\right\} \tag{18 a}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz(k,s)} + \tau_{xz(k,r)} + \tau_{xz(r,s)} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xz(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \cos\beta_s y \sin\gamma_k z \,[\{-\gamma_k l_{ks} A^1_{ks} - (1-2\nu)\gamma_k A^2_{ks} - \\
&\quad - \beta_s l_{ks} A^3_{ks}\} \sinh l_{ks} x + \gamma_k l_{ks} A^2_{ks} x \cosh l_{ks} x] \\
\tau_{xz(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \sin\alpha_r x \sin\gamma_k z \,[\{\alpha_r\gamma_k B^1_{kr} + \\
&\quad + (\gamma_k^2 - \alpha_r^2) B^3_{kr}\} \cosh m_{kr} y - \alpha_r\gamma_k B^2_{kr} y \sinh m_{kr} y] \\
\tau_{xz(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \sin\alpha_r x \cos\beta_s y \,[\{-\alpha_r n_{rs} C^1_{rs} - (1-2\nu)\alpha_r C^2_{rs} + \\
&\quad + \beta_s n_{rs} C^3_{rs}\} \sinh n_{rs} z + \{-\alpha_r n_{rs} \bar{C}^1_{rs} - (1-2\nu)\alpha_r \bar{C}^2_{rs} + \beta_s n_{rs} \bar{C}^3_{rs}\} \cosh n_{rs} z + \\
&\quad + \alpha_r n_{rs} C^2_{rs} z \cosh n_{rs} z + \alpha_r n_{rs} \bar{C}^2_{rs} z \sinh n_{rs} z]
\end{aligned}\right\} \tag{19 a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz(k,s)} + \tau_{yz(k,r)} + \tau_{yz(r,s)} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{yz(k,s)} &= \sum_k^\infty \sum_s^\infty \sin\beta_s y \sin\gamma_k z \,[\{\beta_s\gamma_k A^1_{ks} + (\beta_s^2 - \gamma_k^2) A^3_{ks}\} \cosh l_{ks} x - \\
&\quad - \beta_s\gamma_k A^2_{ks} x \sinh l_{ks} x] \\
\tau_{yz(k,r)} &= \sum_k^\infty \sum_r^\infty \cos\alpha_r x \sin\gamma_k z \,[\{-\gamma_k m_{kr} B^1_{kr} - (1-2\nu)\gamma_k B^2_{kr} + \\
&\quad + \alpha_r m_{kr} B^3_{kr}\} \sinh m_{kr} y + \gamma_k m_{kr} B^2_{kr} y \cosh m_{kr} y] \\
\tau_{yz(r,s)} &= \sum_r^\infty \sum_s^\infty \cos\alpha_r x \sin\beta_s y \,[\{-\beta_s n_{rs} C^1_{rs} - (1-2\nu)\beta_s C^2_{rs} - \\
&\quad - \alpha_r n_{rs} C^3_{rs}\} \sinh n_{rs} z + \{-\beta_s n_{rs} \bar{C}^1_{rs} - (1-2\nu)\beta_s \bar{C}^2_{rs} - \alpha_r n_{rs} \bar{C}^3_{rs}\} \cosh n_{rs} z + \\
&\quad + \beta_s n_{rs} C^2_{rs} z \cosh n_{rs} z + \beta_s n_{rs} \bar{C}^2_{rs} z \sinh n_{rs} z]
\end{aligned}\right\} \tag{20 a}$$

x, y および z 方向の変位をそれぞれ u, v および w で表わすと式(2)より，変位は次のように表わされる。

$$2Gu = 2G(u_{(k,s)}+u_{(k,r)}+u_{(r,s)}) \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}
2Gu_{(k,s)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \cos\gamma_k z \cos\beta_s y\ [\{l_{ks}A^1_{ks}+(3-4\nu)A^2_{ks}\}\sinh l_{ks}x- \\
&\quad -l_{ks}A^2_{ks}x\cosh l_{ks}x] \\
2Gu_{(k,r)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{r}^{\infty} \cos\gamma_k z \sin\alpha_r x\ [(-\alpha_r B^1_{kr}-2\gamma_k B^3_{kr})\cosh m_{kr}y+ \\
&\quad +\alpha_r B^2_{kr} y\sinh m_{kr}y] \\
2Gu_{(r,s)} &= \sum_{r}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \sin\alpha_r x\cos\beta_s y\ [(-\alpha_r C^1_{rs}+2\beta_s C^3_{rs})\cosh n_{rs}z+ \\
&\quad +(-\alpha_r \bar{C}^1_{rs}+2\beta_s \bar{C}^3_{rs})\sinh n_{rs}z+\alpha_r C^2_{rs}z\sinh n_{rs}z+\alpha_r \bar{C}^2_{rs}z\cosh n_{rs}z]
\end{aligned}\right\} \text{(21 a)}$$

$$2Gv = 2G(v_{(k,s)}+v_{(k,r)}+v_{(r,s)}) \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
2Gv_{(k,s)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \sin\beta_s y\cos\gamma_k z\ [(-\beta_s A^1_{ks}+2\gamma_k A^3_{ks})\cosh l_{ks}x+ \\
&\quad +\beta_s A^2_{ks}x\sinh l_{ks}x] \\
2Gv_{(k,r)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{r}^{\infty} \cos\alpha_r x\cos\gamma_k z\ [\{m_{kr}B^1_{kr}+(3-4\nu)B^2_{kr}\}\sinh m_{kr}y- \\
&\quad -m_{kr}B^2_{kr}y\cosh m_{kr}y] \\
2Gv_{(r,s)} &= \sum_{r}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \cos\alpha_r x\sin\beta_s y\ [-(\beta_s C^1_{rs}+2\alpha_r C^3_{rs})\cosh n_{rs}z- \\
&\quad -(\beta_s \bar{C}^1_{rs}+2\alpha_r \bar{C}^3_{rs})\sinh n_{rs}z+\beta_s C^2_{rs}z\sinh n_{rs}z+\beta_s \bar{C}^2_{rs}z\cosh n_{rs}z]
\end{aligned}\right\} \text{(22 a)}$$

$$2Gw = 2G(w_{(k,s)}+w_{(k,r)}+w_{(r,s)}) \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}
2Gw_{(k,s)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \cos\beta_s y\sin\gamma_k z\ [-(\gamma_k A^1_{ks}+2\beta_s A^3_{ks})\cosh l_{ks}x+ \\
&\quad +\gamma_k A^2_{ks}x\sinh l_{ks}x] \\
2Gw_{(k,r)} &= \sum_{k}^{\infty}\sum_{r}^{\infty} \cos\alpha_r x\sin\gamma_k z\ [(-\gamma_k B^1_{kr}+2\alpha_r B^3_{kr})\cosh m_{kr}y+ \\
&\quad +\gamma_k B^2_{kr}y\sinh m_{kr}y] \\
2Gw_{(r,s)} &= \sum_{r}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\ [\{n_{rs}C^1_{rs}+(3-4\nu)C^2_{rs}\}\sinh n_{rs}z+ \\
&\quad +\{n_{rs}\bar{C}^1_{rs}+(3-4\nu)\bar{C}^2_{rs}\}\cosh n_{rs}z-n_{rs}C^2_{rs}z\cosh n_{rs}z-n_{rs}\bar{C}^2_{rs}z\sinh n_{rs}z]
\end{aligned}\right\} \text{(23 a)}$$

Fig. 2 の斜線で示した短直角柱の上面に作用する矩形分布の部分荷重の重フーリエ級数展開は q_0 を荷重強度とすると次式となる。

$$p(x,y) = \frac{q_0 cd}{ab}+\frac{2dq_0}{b\pi}\sum_{r=1,2}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\alpha_r c\cos\alpha_r x+\frac{2cq_0}{a\pi}\sum_{s=1,2}^{\infty}\frac{1}{s}\sin\beta_s d\cos\beta_s y$$
$$+\frac{4q_0}{\pi^2}\sum_{r=1,2}^{\infty}\sum_{s=1,2}^{\infty}\frac{1}{rs}\sin\alpha_r c\sin\beta_s d\cos\alpha_r x\cos\beta_s y \tag{24}$$

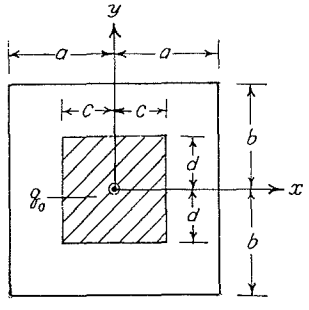

Fig. 2. Right prism with the central loading.

式(24)の級数展開に表われる定数項に対応した簡単な解が必要となる。それをJ. Boussinesqの第3基本解

$$2G u_3 = \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}) - 4(1-\nu)\boldsymbol{\lambda} \tag{25}$$

より求めて,

$$\lambda_1 = A_{00}x\,, \quad \lambda_2 = B_{00}y\,, \quad \lambda_3 = C_{00}z \tag{26}$$

を得る。この解による応力および変位は次のようである。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{x0} &= -2(1-\nu)A_{00} - 2\nu B_{00} - 2\nu C_{00}\\
\sigma_{y0} &= -2(1-\nu)B_{00} - 2\nu A_{00} - 2\nu C_{00}\\
\sigma_{z0} &= -2(1-\nu)C_{00} - 2\nu A_{00} - 2\nu B_{00}\\
2G u_0 &= -2(1-2\nu)A_{00}x\\
2G v_0 &= -2(1-2\nu)B_{00}y\\
2G w_0 &= -2(1-\nu)C_{00}z
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

4. 境界条件と未知定数の関係式

Fig. 1に示した短直角柱の境界条件は,側面が自由で,上面に x, y 軸に関して対称に分布した矩形部分圧縮荷重を受け,底面の変位が拘束された場合である。この条件を式で表わすと次のようである。

$$x = \pm a: \quad \tau_{xz} = 0\,, \quad \tau_{xy} = 0\,, \quad \sigma_x = 0 \tag{28a, b, c}$$

$$y = \pm b: \quad \tau_{xy} = 0\,, \quad \tau_{yz} = 0\,, \quad \sigma_y = 0 \tag{29a, b, c}$$

$$z = 0: \quad u = 0\,, \quad v = 0\,, \quad w = 0 \tag{30a, b, c}$$

$$z = 2h: \quad \tau_{xz} = 0\,, \quad \tau_{yz} = 0\,, \quad \sigma_z = -p(x, y) \tag{31a, b, c}$$

式(28a)と式(28b)とにより

$$A^3_{ks} = 0\,, \quad A^1_{ks} = \frac{A^2_{ks}}{l_{ks}}(2\nu - 1 + l_{ks}a\coth l_{ks}a) \tag{32}$$

式(29a)と式(29b)とにより

$$B^3_{kr} = 0, \quad B^1_{kr} = \frac{B^2_{kr}}{m_{kr}}(2\nu - 1 + m_{kr}b\coth m_{kr}b) \tag{33}$$

また,式(30c),式(31a)および式(31b)とにより

$$\bar{C}^1_{rs} = \frac{\bar{C}^2_{rs}}{n_{rs}}(4\nu - 3)\,, \quad C^3_{rs} = -\bar{C}^3_{rs}\coth 2hn_{rs} \tag{34}$$

$$C^1_{rs} = \frac{1}{n_{rs}}\left[C^2_{rs}(2hn_{rs}\coth 2hn_{rs} + 2\nu - 1) + \bar{C}^2_{rs}\left\{2(1-\nu)\coth 2hn_{rs} + 2hn_{rs}\right\}\right] \tag{35}$$

を得る。また,式(26)に含まれている未知定数 A_{00}, B_{00} および C_{00} は式(28c),式(29c)および式(31c)より求められ,次のようになる。

$$\begin{aligned}
A_{00} &= B_{00} = -\nu C_{00}\\
C_{00} &= \frac{q_0 cd}{ab}\cdot\frac{1}{2(1-\nu-2\nu^2)}
\end{aligned} \tag{36}$$

したがって,応力および変位の表現式中に含まれている12群の未知定数が式(32)から式(35)の関係式により5群の未知定数 A^2_{ks}, B^2_{kr}, C^2_{rs}, $\bar{C}^2_{rs}$ および $\bar{C}^3_{rs}$ に減少したことになる。この5群の未知定数で応力および変位の式を書きかえれば,例えば,σ_x, $2Gu$ ついては次のようになる。

$$\sigma_x=\sigma_{x(k,s)}+\sigma_{x(k,r)}+\sigma_{x(r,s)}$$

$$\sigma_{x(k,s)}=\sum_k^\infty\sum_s^\infty \cos\beta_s y\cos\gamma_k z(l_{ks}A^2_{ks})\Big[(1+l_{ks}a\coth l_{ks}a)\cosh l_{ks}x-l_{ks}x\sinh l_{ks}x\Big]$$

$$\sigma_{x(k,r)}=\sum_k^\infty\sum_r^\infty \cos\alpha_r x\cos\gamma_k z(B^2_{kr})\Big[\frac{1}{m_{kr}}(2\nu\gamma_k^2+\alpha_r^2-\alpha_r^2 m_{kr}b\coth m_{kr}b)\cosh m_{kr}y+$$
$$+\alpha_r^2 y\sinh m_{kr}y\Big]$$

$$\sigma_{x(r,s)}=\sum_r^\infty\sum_s^\infty \cos\alpha_r x\cos\beta_s y\Big[\frac{C^2_{rs}}{n_{rs}}\Big\{(2\nu\beta_s^2+\alpha_r^2-2\alpha_r^2 h n_{rs}\coth 2hn_{rs})\cosh n_{rs}z+$$
$$+\alpha_r^2 n_{rs}z\sinh n_{rs}z\Big\}+\frac{\bar{C}^2_{rs}}{n_{rs}}\Big\{-\alpha_r^2(2\sqrt{1-\nu}\coth 2hn_{rs}+2hn_{rs})\cosh n_{rs}z+$$
$$+(2\nu\sqrt{\beta_s^2-\alpha_r^2}+3\alpha_r^2)\sinh n_{rs}z+\alpha_r^2 n_{rs}z\cosh n_{rs}z\Big\}-$$
$$-\bar{C}^3_{rs}(2\alpha_r\beta_s)\Big\{\coth 2hn_{rs}\cosh n_{rs}z+\sinh n_{rs}z\Big\}\Big]$$

$$2Gu=2G(u_{(k,s)}+u_{(k,r)}+u_{(r,s)})$$

$$2Gu_{(k,s)}=\sum_k^\infty\sum_s^\infty \cos\gamma_k z\cos\beta_s y(A^2_{ks})\Big[\Big\{2(1-\nu)+l_{ks}a\coth l_{ks}a\Big\}\sinh l_{ks}x-l_{ks}x\cosh l_{ks}x\Big]$$

$$2Gu_{(k,r)}=\sum_k^\infty\sum_r^\infty \cos\gamma_k z\sin\alpha_r x\Big(\frac{B^2_{kr}}{m_{kr}}\Big)\Big[-\alpha_r^2\Big\{2\nu-1+m_{kr}b\coth m_{kr}b\Big\}\cosh m_{kr}y+$$
$$+\alpha_r m_{kr}\sinh m_{kr}y\Big]$$

$$2Gu_{(r,s)}=\sum_r^\infty\sum_s^\infty \sin\alpha_r x\cos\beta_s y\Big[\frac{\alpha_r C^2_{rs}}{n_{rs}}\Big\{-(2hn_{rs}\coth 2hn_{rs}-1+2\nu)\cosh n_{rs}z+$$
$$+n_{rs}z\sinh n_{rs}z\Big\}+\frac{\alpha_r\bar{C}^2_{rs}}{n_{rs}}\Big\{-(2\sqrt{1-\nu}\coth 2hn_{rs}+2hn_{rs})\cosh n_{rs}z+$$
$$+(3-4\nu)\sinh n_{rs}z+n_{rs}z\cosh n_{rs}z\Big\}+\bar{C}^3_{rs}(2\beta_s)\Big\{\sinh n_{rs}z-\coth 2hn_{rs}\cosh n_{rs}z\Big\}\Big]$$

5. 未知定数の連立方程式

5群の未知定数を決定するためには，残りの5個の境界条件すなわち，式(28c), (39c), (30a), (30b)および式(31c)を用いる。これらの境界条件を満足させるためには直応力および変位をフーリエ級数に展開することが必要となる。結果のみを示すことにし，次の5群連立方程式を得る。

式(30a)より

$$\sum_{k=0}^\infty({}_kI^1_{rs}A^2_{ks}+{}_kJ^1_{sr}B^2_{kr})+K^1_{rs}C^2_{rs}+\bar{K}^1_{rs}\bar{C}^2_{rs}-L^1_{rs}\bar{C}^3_{rs}=M^1_{rs}\qquad(37)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&{}_kI^1_{rs}=\frac{4\pi\sinh l_{ks}a}{a^2}\cdot\frac{r(-1)^{r+1}}{(l_{ks}^2+\alpha_r^2)^2}\Big\{l_{ks}^2+(1-\nu)(l_{ks}^2+\alpha_r^2)\Big\}\\
&{}_kJ^1_{sr}=\frac{4\pi\sinh m_{kr}b}{ab}\cdot\frac{r\varepsilon_s(-1)^s}{(m_{kr}^2+\beta_s^2)^2}\Big\{\beta_s^2-\nu(m_{kr}^2+\beta_s^2)\Big\}\\
&K^1{}_s=-\frac{\alpha_r}{n_{rs}}\Big\{2hn_{rs}\coth 2hn_{rs}-1+2\nu\Big\}\\
&\bar{K}^1_{rs}=-\frac{\alpha_r}{n_{rs}}\Big\{2(1-\nu)\coth 2hn_{rs}+2hn_{rs}\Big\}\\
&L^1{}_s=2\beta_s\coth 2hn_{rs}\\
&M^1_{rs}=\frac{4\delta_s\delta_r(-1)^r}{\pi r}\nu(1-2\nu)aC_{00}
\end{aligned}\right\}\qquad(37\,a)$$

$$\varepsilon_s=\begin{cases}1\ (s\geq 1)\\ \dfrac{1}{2}\ (s=0),\end{cases}\qquad \delta_s=\begin{cases}1\ (s=0)\\ 0\ (s\neq 0),\end{cases}\qquad \bar{\delta}_r=\begin{cases}0\ (r=0)\\ 1\ (r\neq 0)\end{cases}\tag{37 b}$$

式(30b)より

$$\sum_{k=0}^{\infty}({}_kJ^2_{rs}A^2_{ks}+{}_kI^2_{sr}B^2_{kr})+K^2_{rs}C^2_{rs}+\bar{K}^2_{rs}\bar{C}^2_{rs}+L^2_{rs}\bar{C}^3_{rs}=M^2_{rs}\tag{38}$$

ここで，${}_kI^2_{sr}$，${}_kJ^2_{rs}$ などは，式(37a)中の ${}_kI^1_{rs}$，${}_kJ^1_{sr}$ において，それぞれ，$a\rightleftarrows b$，$r\rightleftarrows s$，$\alpha_r\rightleftarrows\beta_s$，$l_{ks}\rightleftarrows m_{kr}$ と置き換えたものである。

式(28c)より

$$\sum_{r=0}^{\infty}({}_rJ^3_{sk}B^2_{kr}+{}_rK^1_{ks}C^2_{rs}+{}_r\bar{K}^1_{ks}\bar{C}^2_{rs}-{}_rL^1_{ks}\bar{C}^3_{rs})+I^1_{ks}A^2_{ks}=0\tag{39}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
I^1_{ks}&=\frac{l_{ks}}{\sinh l_{ks}a}\{l_{ks}a+\cosh l_{ks}a\sinh l_{ks}a\}\\
{}_rJ^3_{sk}&=\frac{4\sinh m_{kr}b}{b}\cdot\frac{(-1)^{r+s}\varepsilon_s}{(m^2_{kr}+\beta^2_s)^2}\left\{\alpha^2_r\beta^2_s+\nu\gamma^2_k(m^2_{kr}+\beta^2_s)\right\}\\
{}_rK^1_{ks}&=\frac{2\sinh 2hn_{rs}}{h}\cdot\frac{(-1)^{r+k}\varepsilon_k}{(n^2_{rs}+\gamma^2_k)^2}\left\{\alpha^2_r\gamma^2_k+\nu\beta^2_s(n^2_{rs}+\gamma^2_k)\right\}\\
{}_r\bar{K}^1_{ks}&=\frac{2\cosh 2hn_{rs}}{h}\cdot\frac{(-1)^{r+k}\varepsilon_k}{(n^2_{rs}+\gamma^2_k)^2}\left\{\nu\beta^2_s(n^2_{rs}+\gamma^2_k)+\alpha^2_r\gamma^2_k\right\}-\\
&\quad-\frac{2\varepsilon_k(-1)^r}{h(n^2_{rs}+\gamma^2_k)^2}\left\{\alpha^2_r(n^2_{rs}+2\gamma^2_k)+\nu(\beta^2_s-\alpha^2_r)(n^2_{rs}+\gamma^2_k)\right\}\\
{}_rL^1_{ks}&=\frac{2\alpha_r\beta_sn_{rs}}{h(n^2_{rs}+\gamma^2_k)}(-1)^r\varepsilon_k
\end{aligned}\right\}\tag{39 a}$$

式(29c)より

$$\sum_{s=0}^{\infty}({}_sJ^4_{rk}A^2_{ks}+{}_sK^2_{kr}C^2_{rs}+{}_s\bar{K}^2_{kr}\bar{C}^2_{rs}+{}_sL^2_{kr}\bar{C}^3_{rs})+I^2_{kr}B^2_{kr}=0\tag{40}$$

ここで，I^2_{kr}，${}_sJ^4_{rk}$ および ${}_sK^2_{kr}$ などは，それぞれ式(39a)の I^1_{ks}，${}_rJ^3_{sk}$ および ${}_rK^1_{ks}$ などにおいて，$a\rightleftarrows b$，$r\rightleftarrows s$，$\alpha_r\rightleftarrows\beta_s$，$l_{ks}\rightleftarrows m_{kr}$ とそれぞれ置き換えたものである。

最後に式(31c)より

$$\sum_{k=0}^{\infty}({}_kI^3_{rs}A^2_{ks}+{}_kI^4_{sr}B^2_{kr})+K^3_{rs}C^2_{rs}+\bar{K}^3_{rs}\bar{C}^2_{rs}=-p_{rs}\tag{41}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
{}_kI^3_{rs}&=\frac{4\sinh l_{ks}a}{a}\cdot\frac{(-1)^{r+k}\varepsilon_r}{(l^2_{ks}+\alpha^2_r)^2}\left\{\gamma^2_k\alpha^2_r+\nu\beta^2_s(l^2_{ks}+\alpha^2_r)\right\}\\
{}_kI^4_{sr}&=\frac{4\sinh m_{kr}b}{b}\cdot\frac{(-1)^{s+k}\varepsilon_s}{(m^2_{kr}+\beta^2_s)^2}\left\{\gamma^2_k\beta^2_s+\nu\alpha^2_r(m^2_{kr}+\beta^2_s)\right\}\\
K^3_{rs}&=\frac{n_{rs}}{\sinh 2hn_{rs}}\left\{2hn_{rs}+\cosh 2hn_{rs}\sinh 2hn_{rs}\right\}\\
\bar{K}^3_{rs}&=\frac{n_{rs}}{\sinh 2hn_{rs}}\left\{2(1-\nu)+\sinh^2 2hn_{rs}\right\}\\
p_{rs}&=\frac{2dq_0}{b\pi}\frac{\bar{\delta}_r\delta_s}{r}\sin\alpha_rc+\frac{2cq_0}{a\pi}\frac{\bar{\delta}_s\delta_r}{s}\sin\beta_sd\\
&\quad+\frac{4q_0}{\pi^2}\cdot\frac{\bar{\delta}_r\bar{\delta}_s}{r_s}\sin\alpha_rc\sin\beta_sd
\end{aligned}\right\}\tag{41 a}$$

6. Cube の問題に対する解

$a=b=h$ の Cube の場合で，載荷幅が $c=d$ の正方形分布の場合を取り扱う。この場合には，式(37)から式(41)までの5群連立方程式は対称性により4群連立方程式になる。

未知定数を次のように置いて式の無次元化を行なう。

$$\frac{A_{ks}^2}{aq_0}=A_{ks}\,,\quad \frac{B_{kr}^2}{aq_0}=B_{kr}=A_{kr}\,,$$
$$\frac{\bar{C}_{rs}^3}{a^2q_0}=D_{rs}\,,\quad \frac{C_{00}}{q_0}=C_{00}$$

また，

$$l_{ks}=\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2+4s^2}\,,\quad m_{kr}=\frac{\pi}{2}\sqrt{k^2+4r^2}$$
$$n_{rs}=\pi\sqrt{r^2+s^2}\,,\quad E=k^2+4s^2+4r^2$$

とおく。式(37), (38), (39)または(40)と式(41)の4群連立方程式を反復法 (iteration method) で解くのではあるが，C_{rs}^2 と $\bar{C}^2{}_s$ は $r>5$, $s>5$ の範囲では符号が異なるだけでその絶対値は大約等しく，計算機を用いて解く場合に桁落の影響が強く表われる。この弊害を除去するために，ここで新しい未知定数を導入し，次のように置き換える。

$$C_{rs}=\frac{1}{2aq_0}(C_{rs}^2+\bar{C}_{rs}^2)\,,\quad \bar{C}_{rs}=\frac{1}{2aq_0}(C_{rs}^2-\bar{C}_{rs}^2)$$

これらの諸量を用いて式(37), (38), (39)および式(41)の4群連立方程式を反復法で解くのに適した形に整頓すると次のようになる。

式(37)と式(38)より D_{rs} を消去して

$$n_{rs}\bar{N}_{rs}\bar{C}_{rs}=-n_{rs}N_{rs}C_{rs}+\sum_{k=0}^{\infty}({}_kI_{rs}^1A_{ks}+{}_kI_{sr}^1A_{kr})-M_{rs}\qquad(42)$$

ここで

$$N_{rs}=2(n_{rs}+1-\nu)\coth 2n_{rs}+2\nu-1+2n_{rs}$$
$$\bar{N}_{rs}=2(n_{rs}-1+\nu)\coth 2n_{rs}+2\nu-1-2n_{rs}$$
$$M_{rs}=4\nu(1-2\nu)C_{00}\left(\delta_s\delta_r(-1)^r+\delta_r\delta_s(-1)^s\right)$$
$${}_kI_{rs}^1=\frac{16(-1)^{r+1}}{E^2}\sinh l_{ks}\left[r^2\left\{k^2+4s^2+(1-\nu)E\right\}-\varepsilon_r s^2(4r^2-\nu E)\right]$$

式(42)と式(41)より $\bar{C}_{rs}$ を消去して

$$H_{rs}C_{rs}=-\bar{N}_{rs}\sum_{k=0}^{\infty}({}_kI_{rs}^2A_{ks}+{}_kI_{sr}^2A_{kr})$$
$$-K_{rs}\sum_{k=0}^{\infty}({}_kI_{rs}^1A_{ks}+{}_kI_{sr}^1A_{kr})$$
$$+K_{rs}M_{rs}-\bar{N}_{rs}p_{rs}\qquad(43)$$

ここで

$$H_{rs}=n_{rs}\left[\frac{-4}{\sinh 2n_{rs}}\left\{2n_{rs}^2+(1-\nu)(1-2\nu)\right\}\right.$$
$$\left.+e^{2n_{rs}}\left\{2\nu-1-2(1-\nu)\coth 2n_{rs}\right\}-e^{-2n_{rs}}\left\{2\nu-1+2(1-\nu)\coth 2n_{rs}\right\}\right]$$

$$K_{rs}=\frac{2}{\sinh 2n_{rs}}(n_{rs}-1+\nu)+e^{-2n_{rs}}$$

$${}_kI^2_{rs}=\frac{16(-1)^{k+r}\varepsilon_r}{E^2}\sinh l_{ks}(k^2r^2+\nu s^2E)$$

式(39)より

$$I_{ks}A_{ks}=-\sum_{r=0}^{\infty}({}_rJ_{sk}A_{kr}+{}_rK_{ks}C_{rs}+{}_r\bar{K}_{ks}\bar{C}_{rs}-{}_rL_{ks}D_{rs}) \tag{44}$$

ここで

$$I_{ks}=\frac{l_{ks}}{\sinh l_{ks}}(l_{ks}+\cosh l_{ks}\sinh l_{ks})$$

$${}_rJ_{sk}=\frac{8(-1)^{s+r}\varepsilon_s}{E^2}\sinh m_{kr}(16r^2s^2+\nu k^2E)$$

$${}_rK_{ks}=\frac{8(-1)^{r+k}\varepsilon_k}{E^2}e^{2n_{rs}}(k^2r^2+\nu s^2E)-$$

$$-\frac{8(-1)^r\varepsilon_k}{E^2}\left\{r^2(k^2+E)+\nu(s^2-r^2)E\right\}$$

$${}_r\bar{K}_{ks}=-\frac{8(-1)^{r+k}\varepsilon_k}{E^2}e^{-2n_{rs}}(k^2r^2+\nu s^2E)+$$

$$+\frac{8(-1)^r\varepsilon_k}{E^2}\left\{r^2(k^2+E)+\nu(s^2-r^2)E\right\}$$

$${}_rL_{ks}=\frac{8(-1)^r\varepsilon_k}{E}rsn_{rs}$$

最後に式(37)と式(38)より C_{rs}, $\bar{C}_{rs}$ を消去して

$$L_{rs}D_{rs}=\sum_{k=0}^{\infty}({}_kI^3_{rs}A_{ks}-{}_kI^3_{sr}A_{kr}) \tag{45}$$

ここで

$$L_{rs}=\frac{2n^2_{rs}}{rs}\coth 2n_{rs}$$

$${}_kI^3_{rs}=\frac{32(-1)^{r+1}}{E}(1-\nu)\sinh l_{ks}$$

反復法によれば，先ず式(43)において右辺の A_{ks} を零として C_{rs} を求め，次にこれを式(42)の右辺に代入して $\bar{C}_{rs}$ を求める。この C_{rs} と $\bar{C}_{rs}$ を式(44)の右辺に代入し A_{ks} てを求め，最後に式(45)にこれを代入して D_{rs} を求める。このようにして得られた値を第1近似値とし，これを各式の右辺に代入し，同じ手順を繰返すことにより，第2，第3の近似値を得る。これを必要な精度に至るまで繰返すのであるが，その場合，加速係数を用いると収束が非常に早くなる。

問題の対称性により

$$C_{rs}=C_{sr},\quad \bar{C}_{rs}=\bar{C}_{sr},\quad D_{rs}=-D_{sr},\quad D_{rr}=0$$

の関係がある。

7. 数値計算例

$a=b=h$ の Cube の場合で，載荷幅が $c=d$ の正方形分布の場合を取り扱った。Cube の辺長と載荷幅との比 a/c が 10/9, 2.0 および 6.0 の三つの場合に対し，Poisson 比はすべて $\nu=0.20$ として応力を求め Fig. 3～Fig. 8 までに図示した。

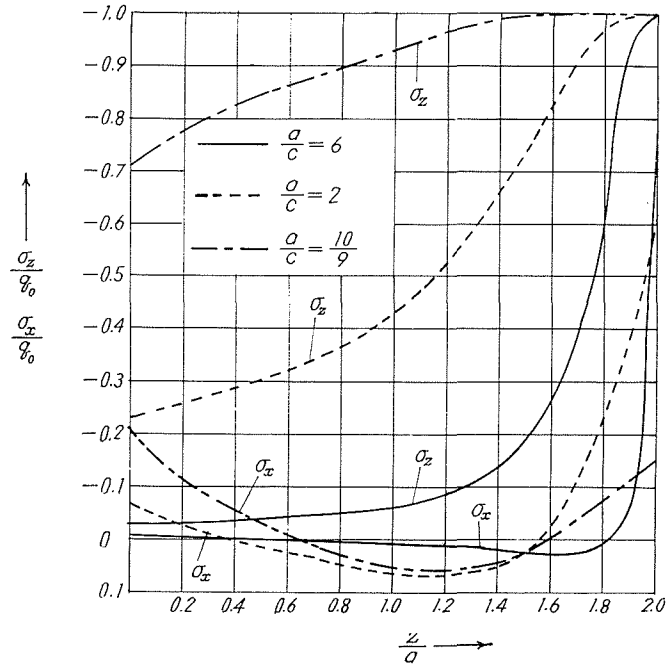

Fig. 3. Distribution of normal stress σ_x, σ_z along z-axis for different a/c ratios.

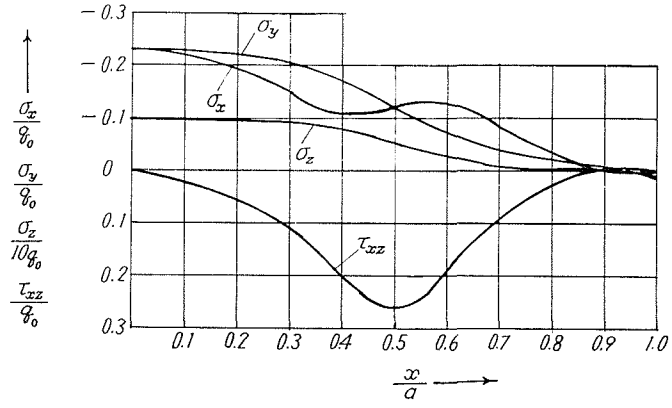

Fig. 4. Distribution of normal stress σ_x, σ_y, σ_z and shearing stress τ_{xz} along x-axis.
($a/c=2.0$, $z=1.8\,a$, $y=0$)

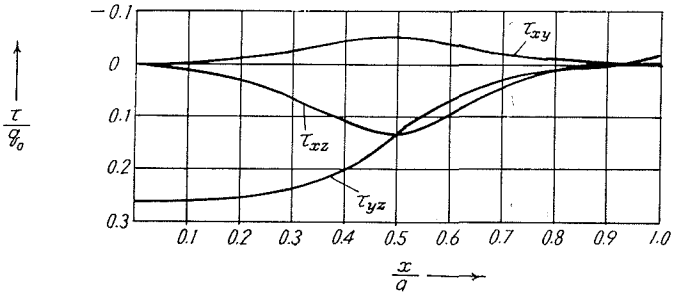

Fig. 5. Distribution of shearing stress τ_{xy}, τ_{xz} and τ_{yz} on the line parallel to x-axis.
($a/c=2.0$, $z=1.8\,a$, $y=0.5\,a$)

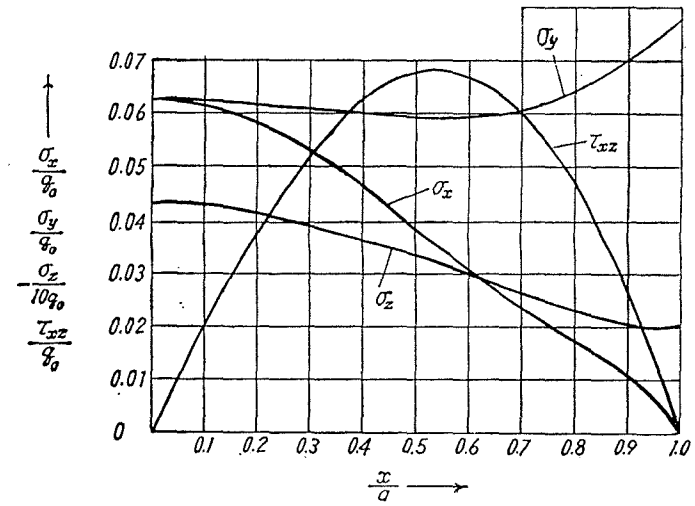

Fig. 6. Distribution of normal stress σ_x, σ_y, σ_z and shearing stress τ_{xz} along x-axis.
($a/c=2.0$, $z=1.0\,a$, $y=0$)

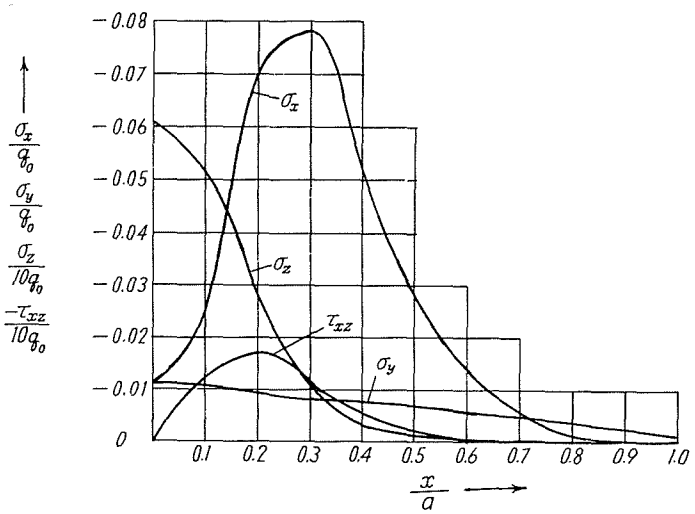

Fig. 7. Distribution of normal stress σ_x, σ_y, σ_z and shearing stress τ_{xz} along x-axis.
($a/c=6.0$, $z=1.8\,a$, $y=0$)

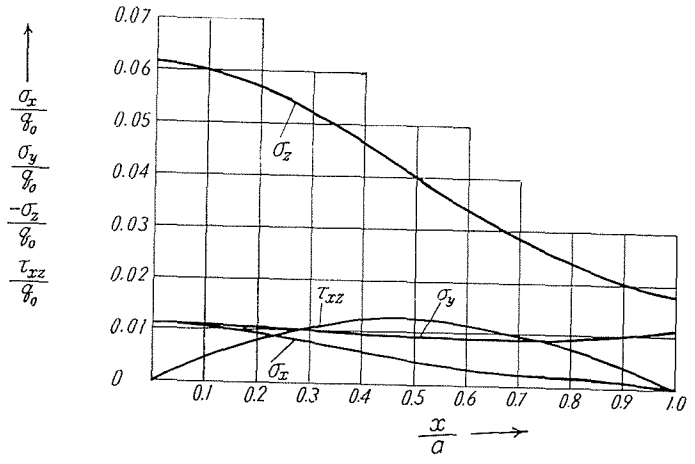

Fig. 8. Distribution of normal stress σ_x, σ_y, σ_z and shearing stress τ_{xz} along x-axis
($a/c=6.0$, $z=1.0\,a$, $y=0$)

級数の項数は18項まで取って計算を行なったが，12項まで取った場合と比較すると応力値は，短直角柱の内部ではほとんど変らず，表面附近でわずかに異なるだけであった。特に，直応力 σ_z の収束性が良く，z 軸に沿ったそれは8項位でも十分正確な値が得られた。

問題の対称性により，級数の項数を18項まで取った場合には，800元程度の多元連立一次方程式を解くことが必要になり，電子計算機により行なったが，電子計算機によると言えども，800元程にもなれば，直接法で解くことは計算機の容量また解の精度の面などで種々の困難さを含んでいる。その点，反復法によれば，零要素を記憶させる必要がないので，容量の面，解の精度の面などで非常に有利である。

反復法による場合，加速係数を用いると収束が早くなり，799元連立一次方程式が60回前後の反復で有効数字8桁までの精度で解かれた。

8. 結　　語

H. Neuber の解に第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ を附加した J. Boussinesq の解に等価な一般化された H. Nuber の解を用いて，側面が自由で，上面に矩形分布の部分圧縮荷重を受け，底面の変位が拘束された短直角柱の3次元応力解析を級数解法により行なった。

底面の変位の拘束であるが，筆者は先に，うかつにも，底面の変位が“完全”に拘束されていると述べたが[2]，計算の結果，底面の内部では確かに $u=0$, $v=0$ の条件を満たしているが，底面の周辺ではわずかに，変位 u, v が残り，“完全”には拘束されていないことがわかった。このことは，変位 u, v を Fourier 級数に展開する際，周辺では零とならない関数を周辺で零になる Fourier 級数に展開した矛盾から生じたものと思われる。しかし，このことは底面から少し離れた位置での応力分布には，さほど影響を及ぼさないと考えられる。

数値計算は $a=b=h$ の Cube の場合で，載荷幅が $c=d$ の正方形分布で，Cube の辺長と載荷幅との比 a/c が10/9, 2.0, 6.0 の3つの場合に対して行なった。

級数の項数は18項までとって行なったが，その際生ずる未知定数の多元連立一次方程式の解法には，加速係数を併用した反復法により行なった。その際 C_{rs}^2 および $\bar{C}_{rs}^2$ を新しく C_{rs}, $\bar{C}_{rs}$ に置きかえたことは大切な事であり，これによって計算機の桁落の影響を少なくすることができた。

応力の収束性は短直角柱の内部では良く，表面附近ではあまり良くなかった。特に，直応力 σ_z の収束は良く，中心軸に沿ったそれは項数が8項までの場合でも十分正確な値が得られた。

終りに，数値計算にあたって，有益な御助言を賜わった北大工学部土木学科の芳村　仁教授並びに機械工学第二学科の秦　謹一教授及び大学院博士課程在学中の小林道明君に深謝の意を表する次第です。

参 考 文 献

1) 秦　謹一：北海道大学工学部研究報告，第13号，pp. 13-44 (昭和30年12月).
2) 奥村　勇：土木学会第27回年次学術講演概要集，第1部，pp. 131-132 (昭和47年10月).