HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Reichardtの運動量輸送則を用いた二次元噴流の解析 ： 圧力項を無視しない場合
Author(s)	長谷川, 和義; 山岡, 勲
Citation	北海道大學工學部研究報告, 68(1), 173-180
Issue Date	1973-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41141
Type	departmental bulletin paper
File Information	68(1)_173-180.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Reichardtの運動量輸送則を用いた二次元噴流の解析

——圧力項を無視しない場合——

長谷川和義* 山岡 勲*

(昭和48年3月24日受理)

Two-dimensional Jet Analysis Using Reicharadt's Momentum Transfer Law

— In the Case of Holding Pressure Term —

Kazuyoshi HASEGAWA Isao YAMAOKA

Abstract

A detailed knowledge of the velocity distribution of a jet within a finite region is essential to many practical problems of jet diffusion.

However, it is difficult to treat such problems analytically because the fluid within such a jet as restrained by a finite boundary will undergo complicated interactions of lateral diffusion, forced deceleration and surrounding circulation due to limits of the zone, where the pressure distribution is non-static.

This paper describes the analytical solution of a jet in the infinite region where the pressure distribution is non-static, and by using the momentum transfer law of Reichardt instead of a hypothesis of shearing stress.

The solution presented herein is not so different as expected from the solution under conditions of static pressure distribution where an infinite region is assumed.

In order to obtain a solution under an actual finite region, it is necessary that the equation of the jet boundary layer within a finite region must contain the knowledge that the diffusion process is not similar in dynamics near the boundary and moreover that the pressure is non-static.

This paper refers to these considerations.

1. はじめに

無限流体中に拡がる自由噴流の，流速分布の問題に関しては，すでに，Tollmien[1]，Görtler[2]，Albertson[3] らによって，実用的には十分な精度をもつ，理論式あるいは実験式が提案されている。

しかし，自由噴流であっても，いわゆる壁面噴流にまではいたらない，有限の境界に拘束されるような噴流に関しては，境界近傍に Stagnation 領域が形成されるなど，未だ不明な問題を残しており，今後の課題となっている。

* 土木工学科 防災工学講座

著者ら[4]は，これまで，二つの垂直噴流が，相互に干渉するありさまを実験的に調べてきたが，この問題も，噴流の一方の境界が，他のもう一つの噴流であるような，特種な有限領域の問題として考えることができる。

有限領域における噴流拡散の特徴は，境界の存在のしかたによって一様には論じられないが，第一に，拡散域中の静水圧分布が保障されないこと，あるいは，噴流境界層中に圧力分布が存在すること。第二に，流速分布の相似性が保障されないこと。第三に，境界面に沿って，回流，あるいは放散流が発生すること，等々であり，いずれも，この種の問題の理論的なとりあつかいを困難にしている。

本報告は，上記のうちの第一の問題，すなわち非静水圧分布に着目し，圧力項を考慮した境界層方程式から導かれる流速分布について，考察を加えたものである。

2. 基礎方程式

圧力項を考慮に入れた噴流境界層の方程式は，圧力という未知数が一つ増えるために，主流方向に沿う運動方程式のみでは，式数に不足をきたし，主流に直角方向の運動方程式の援用が必要となる。一方，流速分布の非相似性を考慮すれば，通例おこなうような，相似軸の導入による，方程式の常微分化をあえて避けた解法が要求される。これらのことをふまえると，セン断力項の表現も，なるべく簡潔な形式をもったものに限定せざるを得ないであろう。

後述のように，本文では，セン断力を直接には考えずにすむ，Reichardt[5),6)]による運動量輸送則を用いているが，これによって表わされる運動方程式は，運動量に関して線形となる有利さをもっている。

さて，考察の対象を，垂直二次元噴流とし，垂直下向きに x 軸を，これと直角方向に，噴流孔の下面を通って y 軸をとり，粘性項を省略した運動方程式を記述すれば，x 方向に関して，

$$-g+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{uv})=0 \tag{1}$$

y 方向に関して

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{uv})+\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y}=0 \tag{2}$$

また，連続の条件から

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ただし，u, v をそれぞれ，x, y 方向の流速とし，その時間平均を $\bar{u}$, $\bar{v}$, 変動成分を u', v' としたとき，

$$u=\bar{u}+u'$$
$$v=\bar{v}+v'$$
$$\overline{uv}=\bar{u}\bar{v}+\overline{u'v'}$$

なる関係にある。また，$\bar{p}$ は圧力の時間平均，ρ は流体の密度，g は重力加速度である。乱流境界層問題では一般に $\rho\overline{u'v'}$ なる Reynolds 応力を，平均流速 $\bar{u}$ のなんらかの形に表わすことにより，$\bar{u}$ に関する方程式を解くのであるが，Reichardt[5),6)]は，運動量 $\bar{u}^2$ が，誤差分布に従うという実験事実から出発して，

$$\overline{uv}=-\Lambda(x)\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} \tag{4}$$

なる関係を見い出し，Reynolds 応力に何らの仮設を設けることなく，$\bar{u}^2$ に関する方程式を導いている。

(4) 式は，噴流主流速によって，y 方向に輸送される運動量の平均が，主流速の運動量の y に関するこう配に比例する関係を示しており，$A(x)$ は，(4) 式からも明かなとうり，x の一次関数と考えられる。

そこで，

$$A(x) = c_1 x \tag{5}$$

と仮定し，(4), (5) 式を，(1), (2) 式に代入した後，(1) 式を y により，(2) 式を x によって微分すれば，$\bar{p}$ の含まれる項は消去することができ，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{c_1 x\frac{\partial^2}{\partial x}+(1+2c_1)\frac{\partial}{\partial x}-c_1 x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\bar{u}^2-\frac{\partial\bar{v}^2}{\partial x}\right]=0$$

y で積分して

$$\left\{c_1 x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+2c_1)\frac{\partial}{\partial x}-c_1 x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\bar{u}^2-\frac{\partial\bar{v}^2}{\partial x}=0 \tag{8}$$

これが，求める基礎方程式となる。

一方，$\bar{p}$ が静水圧分布に従う場合は

$$\bar{p} = \rho g x$$

より，(1) 式の左辺の第一項と第二項は消えることになり，また，(5) 式のかわりに

$$A(x) = c_1' x \tag{5'}$$

を仮定すれば，(4), (5') 式を代入して

$$\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}-c_1'\frac{\partial^2\bar{u}^2}{\partial y^2}=0 \tag{1'}$$

なる，熱伝導型の方程式が得られる。

(8) 式は，(1') 式に，新しい拡散項，$c_1 x\cdot\partial^2\bar{u}^2/\partial x^2$ と，$-\partial\bar{v}^2/\partial x$ がつけ加わった形をしており，c_1 が小さければ，これらの項は，いずれも他の項に比して，低いオーダーにあると考えられる。

3. 無限小幅スリットから流入がある場合の解

無限流体中に，$f(y)$ なる運動量分布をもった噴流が入りこむ場合の，方程式 (8) あるいは (1') に対する境界条件は

$$x=0, \quad \text{において}, \quad \bar{u}^2=f(y) \tag{9}$$

にて与えられる。このとき，(1') の解は，比較的容易に，

$$\bar{u}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi c_1' x}}\,exp\left\{-\frac{1}{2c_1'}\left(\frac{y-\eta}{x}\right)^2\right\}f(\eta)\,d\eta \tag{1-a}$$

として得られる。x, y の原点に無限小幅スリットがあり，単位流速の噴流が流入する場合は，上式の $f(y)$ に，

$$f(y)=\delta(y)=\begin{cases}1 & (y=0)\\ 0 & (y\neq 0)\end{cases}$$

を代入することによって

$$\bar{u}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi c_1' x}}\,exp\left\{-\frac{1}{2c_1'}\left(\frac{y-\eta}{x}\right)^2\right\}\delta(\eta)\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{2\pi c_1' x}}\,exp\left\{-\frac{1}{2c_1'}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} \tag{1-b}$$

一方，(8) 式は，(3) 式と連立することによって，原理的に解くことができるが，$\partial\bar{v}^2/\partial x$ の項を残す限り，解析解を得ることは難しい。そこで，この項を無視し，(8) 式第一項のもつ影響に注目して，解を求めることにすれば，結局，

$$c_1 x\frac{\partial^2\bar{u}^2}{\partial x^2}+(1+2c_1)\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial x}-c_1 x\frac{\partial^2\bar{u}^2}{\partial y^2}=0 \tag{8'}$$

を解くことになる。

(8′) 式に対する特解は

$$\bar{u}^2 = x^{-\nu}\cdot J_\nu(x)\begin{matrix}\sin y\\ \cos y\end{matrix} \tag{8-a}$$

ただし，$J_\nu(x)$：ν 次ベッセル関数，$\nu=1/2\cdot(1+1/c_1)$

したがって，無限問題に対する一般解は，パラメーターを μ として，

$$\bar{u}^2=\int_0^\infty(\mu x)^{-\nu}J_\nu(\mu x)\left\{f_1\sin\mu y+f_2\cos\mu y\right\}d\mu \tag{8-b}$$

境界条件 (9) を考えるにあたり，x の原点附近で，

$$(\mu x)^{-\nu}J_\nu(\mu x)\simeq(\mu x)^{-\nu}\left\{\frac{(\mu x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right\}$$

が成立すると見られるので，

$x\to0$ において，$(\mu x)^{-\nu}J_\nu(\mu x)\to\dfrac{(1/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$

したがって，(8-b) 式から

$$\bar{u}^2(0,\ y)=\int_0^\infty\frac{(1/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left\{f_1\sin\mu y+f_2\cos\mu y\right\}d\mu=f(y) \tag{8-c}$$

一方，$f(y)$ をフーリエ積分であらわすと，

$$f(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\mu(y-\eta)d\eta$$

これを，(8-c) 式と比較すれば，未知定数 f_1, f_2 が次のように決まる。

$$f_1=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi(1/2)^\nu}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\sin\mu\eta\,d\eta$$

$$f_2=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi(1/2)^\nu}\int_{-\infty}^\infty f(\eta)\cos\mu\eta\,d\eta$$

これらを，(8-b) 式に代入し，整理すれば，

$$\bar{u}^2=\int_{-\infty}^\infty\frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi(1/2)^\nu}\left\{\int_0^\infty(\mu x)^{-\nu}J_\nu(\mu x)\cos\mu(y-\eta)\,d\mu\right\}f(\eta)\,d\eta \tag{8-d}$$

(8-d) 式中，中括弧の中の積分を I とすれば，これを求めるにあたり，

$$\mu x=z$$

なる変換をおこなうと，

$$I=\int_0^\infty z^{-\nu}J_\nu(z)\cos\left(\frac{y-\eta}{x}z\right)\frac{1}{x}\,dz$$

ところが，$\left|\dfrac{y-\eta}{x}\right|\leq1$ なる制限をおくことは，y と x を

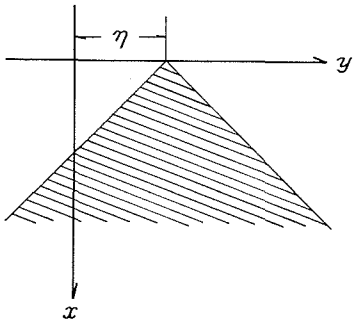

Fig. 1.

適当にとることによって可能であり，この場合，x と y のとり得る範囲は，図の斜線部分に相当する。

このとき，

$$\frac{y-\eta}{x} = \sin\varphi$$

なる変換をほどこすことができるので，上式は，

$$I = \int_0^\infty z^{-\nu} J_\nu(z) \cos(z\cdot\sin\varphi)\Big\} \frac{1}{x}\, dz$$

さらに，

$$\cos(z\cdot\sin\varphi) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \cdot J_{2n}(z)$$

なる Neumann 展開[7] を利用すれば，

$$I = \frac{1}{x}\int_0^\infty z^{-\nu} J_\nu(z)\Big\{J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \cdot J_{2n}(z)\Big\}\, dz$$

項別積分が可能であると考えて

$$= \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty z^{-\nu} J_\nu(z)\, J_0(z)\, dz + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \int_0^\infty z^{-\nu} J_\nu(z)\, J_{2n}(z)\, dz\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\nu)}{2^\nu x} \frac{1}{\left\{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\right\}^2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \cdot \prod_{r=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{2\nu-1}{2} - r\right)}{\left(\frac{2\nu+1}{2} + r\right)}\right]$$

これを，(8-d) 式に代入し，整理して

$$\bar{u}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{\pi}\left\{\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)}\right\}^2 \frac{1}{x}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \cdot \prod_{r=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{2\nu-1}{2} - r\right)}{\left(\frac{2\nu+1}{2} + r\right)}\right] \cdot f(\eta)\, d\eta$$

今，あらたに，

$$1/2c_1 = \kappa$$

とおくと，

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{c_1}\right) = \frac{1}{2} + \kappa$$

より，

$$\bar{u}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2\kappa}+1\right)}{\pi x}\left\{\frac{\Gamma\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\kappa)}\right\}^2 \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varphi \cdot \prod_{r=0}^{n-1}\left(\frac{\kappa-r}{\kappa+1+r}\right)\right] f(\eta)\, d\eta \quad (8\text{-e})$$

これが，流入運動量が $f(y)$ にて与えられるときの，(8′) 式の解である。

無限小幅スリットから，単位流速の流入がある場合は，前記と同様に，$\delta(y)$ を用いることによって，

$$\bar{u}^2 = \frac{\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2\kappa}+1\right)}{\pi x}\left\{\frac{\Gamma\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\kappa)}\right\}^2 \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left\{2n\left(\sin^{-1}\frac{y}{x}\right)\right\} \prod_{r=0}^{n-1} \frac{\kappa-r}{\kappa+1+r}\right] \quad (8\text{-f})$$

ここで，κ は実験によって決定されるべき定数である。

Albertson ら[3] は，空気を用いた実験から，二次元の噴流の中心流速に関して，

$$\frac{u_c}{U_0} = \frac{2.28}{\sqrt{x/B}} \tag{10}$$

を得ている。ただし

u_c: 噴流中心流速，U_0: 流入流速，x: 噴流孔からの距離，B: 噴流孔の幅

U_0 および B を単位量にとれば，(10) 式は，

$$u_c = \frac{2.28}{\sqrt{x}} \tag{10'}$$

と表わしてよいことになる。

一方，(8-f) 式において，$y=0$ とおき，(10)′ 式と比較すれば，

$$u_c^2 x = \frac{\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2\kappa}+1\right)}{\pi}\left\{\frac{\Gamma\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\kappa)}\right\}^2\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\prod_{r=0}^{n-1}\frac{\kappa-r}{\kappa+1+r}\right\}\right] = 2.28^2 \tag{8-g}$$

これを満足する κ の値を求めると，

$$\kappa \fallingdotseq 84 \tag{8-h}$$

κ の厳密な値は，整数とはならないが，整数値に近似すると，(8-e) あるいは，(8-f) 式中の無限級数は，$n=\kappa+1$ 以上の項において，全て 0 となり，計算がきわめて簡単になる。以上によって，圧力項を考慮した二次元噴流の無限領域での流速分布が

$$\bar{u}^2 = \frac{\frac{1}{84}\cdot\frac{169}{168}}{\pi x}\left\{\frac{\Gamma(84.5)}{\Gamma(84)}\right\}^2\left[1+2\sum_{n=1}^{84}\cos\left(2n\cdot\sin^{-1}\frac{y}{x}\right)\cdot\prod_{r=0}^{n-1}\frac{84-r}{85+r}\right] \tag{8-i}$$

のように得られることになる。

この解は，非静水圧分布がほとんど問題とならない無限領域におけるものであるので，静水圧分布を仮定した場合の解 (1-b) 式と，それほど異ったものではないものと予想される。

Fig. 2 は，(8-i) 式，および (1-b) 式を Förthmann[8] の実験値とともに載せたものである。図

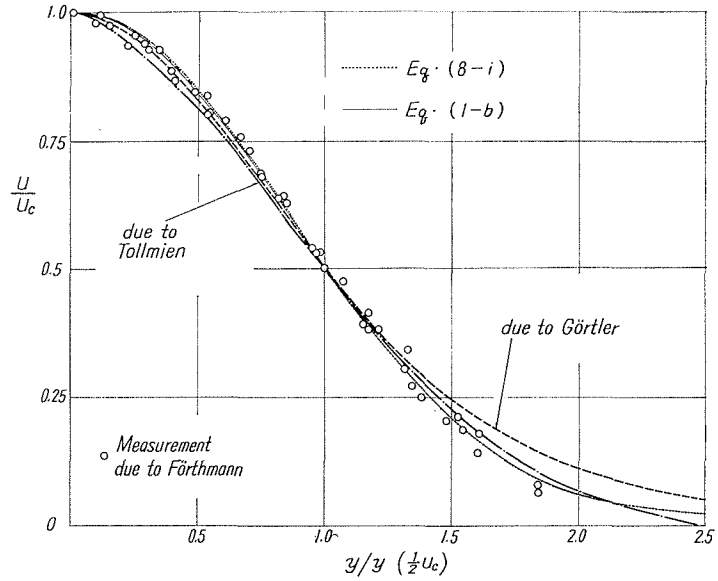

Fig. 2.

中には，Tollmien[1]，Görtler[2] の式についても比較のために描いてある。

図によれば，(8-i) 式と (1-b) 式は，ほとんど重なりあい，違いを認めることができない。

4. 考　　察

(8-i) 式，(1-b) 式の間には，ほとんど大きな違いを見い出すことができないが，(1-b) 式は，y 軸の無限遠方で 0 となり，$\bar{u}$ の存在に条件がないのに対し，(8-i) 式は，$y=\pm x$ の線上で 0 となり，$|y/x|>1$ の範囲において，$\bar{u}$ が存在しない。したがって，中心軸から離れた，裾の部分で，両者のくい違いが著しいとみなし得るが，ただ，(8-i) 式は，物理現象から考えた場合，$|y/x|>1$ の範囲で，噴流に対する接近流速も存在しなくなることになり，やや，不合理の感をまぬがれない。

一方，実験定数 c_1, c_1' に関しては，次のような比較をおこなうことができる。

Albertson[3] は，前述の空気噴流に対する実験から，(1-b) 式とまったく同様な形式の流速分布式，

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, C_1 x} exp\left\{-\frac{1}{C_1^2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} \tag{11}$$

を提案し，(10′) 式との関係から，

$$u_c^2 x = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, C_1} = 2.28^2 \qquad \therefore \quad C_1 = 0.109 \tag{12}$$

を得たが，今，(11) 式と (1-b) 式を比較すれば，

$$2c_1' = C_1^2 \tag{1-c}$$

$$\therefore \quad c_1' = 1/2 \cdot C_1^2 = 0.00594 \tag{1-d}$$

となることがわかる。

ところが，同じ (10′) 式を用いて得られた (8-g) 式からは，

$$c_1 = 1/2\kappa = 1/168 = 0.00595 \tag{8-j}$$

が得られ，両者はほとんど一致している。

Fig. 2 によれば，(8-i) あるいは (1-b) 式の，実験値に対する適合性は，中心部でも，裾部でもかなりよく，Tollmien 式が中心部で，Görtler 式が裾部で，わずかに実験値から離れるところを補っている。

この適合性のよさは，まったく，流速の誤差分布近似の妥当性をものがたっているのにすぎないのであるが，(8-i) 式が，十分な適合性をもった解であることの意味は，必ずしも小さくはないであろう。

というのは，c_1 が極く小さな値であるために，前述のように，(8′) 式の左辺第一項，$c_1 x\, \partial^2\bar{u}^2/\partial x^2$ は，他の項に比して無視し得るオーダーにあり，(8′) 式と (1′) 式の間には，オーダー上の大きな違いはないのであるが，(1′) 式が放物型である故に，x に関する境界条件が，ただ一つに限られるのに対して，(8′) 式は，双曲型をなしていて，x に関する二つの境界を与えることが可能であること——すなわち，有限領域における条件を満たす形式的な保障を備えていることから，結局，(8-i) 式は，噴流孔とあい対する側の境界が，無限遠方に遠のいたときの解，有限領域の問題からすれば，その特殊な場合の解と見ることができるからである。

しかし，以上の考察をふまえた上で，なお (8′) 式に，有限境界を直接もちこむことはできない。実際の有限領域をあつかうには，さらに次のことが問題にされねばないからである。すな

わち，

[1] (8′) 式は，基礎式 (8) において，$\partial\bar{v}^2/\partial x$ の項を省略している。しかしこの項は，$c_1 x\,\partial^2\bar{u}^2/\partial x^2$ と同じオーダーにあると見なされるので，有限境界の存在によって，$c_1 x\,\partial^2\bar{u}^2/\partial x^2$ が無視し得なくなるところでは，$\partial\bar{v}^2/\partial x$ の項も無視し得なくなる可能性をもっている。

このことは，噴流孔に相対する側に境界をもつような噴流は，これに衝突後，放散流あるいは回流となって押し広げられ，$\bar{u}$ よりも $\bar{v}$ が卓越する領域を形成するという，物理現象から考えても，当然考慮されなければならない。

[2] より根本的な疑問として，(4) 式の採用に関する問題がある。とくに，$A(x)$ についての，x の一次関数の仮定は，噴流幅の直線変化の仮定，すなわち，流速分布の相似の仮定と同義と考えられるので，問題にしている有限領域の解析にとっては，きつすぎる仮定であって，現象とも一致しない。

このうち [1] は，**1.** において述べた，回流の発生の問題に関連し，[2] は，相似条件の不成立の問題に関連している。

したがって，有限域における噴流拡散の問題は，圧力項を残すことのみによっては，解決されず，[1], [2] についても，あわせて考慮することが要求されるといえよう。

逆に，圧力項が問題にされねばならないような，顕著な非静水圧分布の存在する拡散場は，流速分布の非相似性の回流の発生に，あいともなわれているのであり，どれか一つのみをとり出すことによっては，現象は説明されないということになろう。

5. おわりに

有限の境界に拘束される噴流の解析において同時に考慮されるべき三つの事柄——非静水圧分布，流速分布の非相似，回流の発生——のうちの，ただ一つの事柄，非静水圧分布に着目した方程式は，x に関する二つの境界条件の存在を形式的に保障しながらも，実際の有限境界のもとでの解の存在を保障せず，結局，無限領域においてはじめて有意な解を与えるにいたっているが，この場合には，すでに，圧力項が問題にならず，静水圧分布のもとで導かれる方程式の解に，ほとんど一致してしまうこと——このことが，今回明かになった内容であるとともに，今後の研究に生かされるべき留意事項である。

本研究をすすめるにあたり，岸教授に有益な御討議をいただいたことを感謝する。なお学生の鈴木邦夫君に，計算プログラム作成の努力を願った。附記し謝意を表す。

参考文献

1) Tollmien, W.: "Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge", ZAMM, 6 (1968), p. 468-478.
2) Görtler, von H.: "Berechnung von Aufgabe der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes", ZAMM, 22 (1942), p. 224-254.
3) Albertson, M. L. etc.: "Diffusion of Submerged Jets", Trans. ASCE, 115 (1950), p. 639-697.
4) 長谷川，盛，山岡：「静水池中における垂直噴流の相互干渉について」．土木学会第 26 回年次学術講演会講演集第 2 部 (昭 46), p. 241-244.
5) Reichardt, H.: "Über eine neue Theorie der freien Turbulenz", ZAMM, 21, 257 (1941).
6) Schlichting, H.: "Boundarylayer Theory 6th, ed (1968), p. 702-703, Mc-Grawhill.
7) 例えば，森口，宇田川，一松：「数学公式 III」，岩波全書 244 (1965), p. 210-213, 岩波書店.
8) Förthmann, E.: "Über turbulente Strahlausbreitung", Ing. Arch., 5 (1934), p. 42-54.