



Title	一様せん断流の中におかれた円柱の乱流後流
Author(s)	田村, 尚敬; Tamura, Hisataka; 木谷, 勝 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 69, 11-17
Issue Date	1973-11-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41169
Type	departmental bulletin paper
File Information	69_11-18.pdf



一様せん断流の中におかれた円柱の乱流後流

田村尚敬* 木谷勝* 有江幹男*

(昭和48年4月28日受理)

A Study on Turbulent Wakes of Circular Cylinders in a Uniform Shear Flow

Hisataka TAMURA Masaru KIYA Mikio ARIE

(Received April 28, 1973)

Abstract

Described in this paper are the mean flow properties in turbulent wakes of circular cylinders mounted in a uniform shear flow. The mean velocity profiles in the far-wake are theoretically determined by means of an asymptotic analysis which treats the shear as a small perturbation on a uniform stream. Experimental measurements are also performed to examine the results obtained by the present theoretical analysis.

It was found from these investigations that the theoretical velocity profiles agree fairly well with the measurements at sections downstream of more than approximately 20 times of the diameter of the circular cylinder. The investigation also showed that the spreading of the wake is much larger on the low-velocity side than on the high-velocity side.

1. 緒 言

従来、後流の研究は物体への近寄り流れが一様な場合について行なわれているのが大部分である。しかしながら、現実には物体への近寄り流れが必ずしも一様でない場合が多く、固体壁表面に沿って発達する乱流境界層の中におかれた物体の後流などはその代表的な例である。

本報告はこのような一様でない流れの中におかれた物体の乱流後流の最も基本的な場合として、一様せん断流の中におかれた円柱の乱流後流をとりあげ、単独円柱および並列2円柱の場合について、後流内における流れ方向の速度に関する分布を理論ならびに実験によって検討したものである。

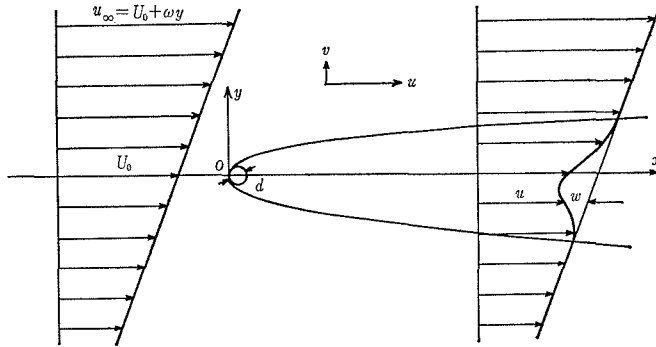
2. 理論解析

後流内部の流れは Reynolds 方程式に境界層近似をほどこすことによって良好な精度で取り扱えることが知られている。第1図に示すように流れ方向に x 軸、これに直角に y 軸をとり、対応する平均速度成分をそれぞれ u , v , 変動速度成分を u' , v' , 平均圧力を P とすれば、基礎方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

* 機械工学科, 流体力学第一講座



第1図

と表わされる。ここに τ_{xy} は Reynolds 応力であって $\tau_{xy} = -\overline{\rho u'v'}$ である。 τ_{xy} は未知量であるから、これと平均速度成分との間の関係が与えられなければ式 (1) および式 (2) を解くことはできない。そのため、ここでは、後流の解析に広く採用され成功をおさめてきた渦粘性係数の概念を採用し $\tau_{xy} = \rho \varepsilon \partial u / \partial y$ なる形に仮定する。ここに ε は渦粘性係数であって、後流の幅 b と最大速度と最小速度の差 Δu_{\max} との積に比例する。したがって、 k を比例定数とすると $\varepsilon = kb \Delta u_{\max}$ である。物体への近寄り流れを $u_\infty = U_0 + \omega y$, $v_\infty = 0$ なる一様せん断流とし式 (1) で $y \rightarrow +\infty$ なる極限を考え、 $u \rightarrow u_\infty$, $\partial u / \partial y \rightarrow \omega$, $\partial \tau / \partial y \rightarrow 0$ なることに注意すれば、 $\rho \omega v(x, +\infty) = -dP/dx$ が得られる。同様に、式 (1) で $y \rightarrow -\infty$ とおけば、 $\rho \omega v(x, -\infty) = -dP/dx$ となる。一般に $v(x, +\infty) \neq v(x, -\infty)$ であるから、これら二式は $y > 0$ および $y < 0$ の側で式 (1) の取り扱いを変えなければならないことを意味している。

本報告では

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + K \bar{v}(\bar{x}, \pm \infty) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4)$$

なるものとして取り扱う。ここで座標および速度成分は円柱の直径 d および U_0 を用いて無次元化されており、 $\pm \infty$ はそれぞれ $\bar{y} > 0$, $\bar{y} < 0$ の側に対応する。また、 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / U_0 d$, $K = \omega d / U_0$ であって、それぞれ無次元渦粘性係数および主流の無次元速度勾配（以下主流渦度と呼ぶ）を意味する。式 (3) および式 (4) の解析はすでに発表した層流の場合¹⁾と同様にして行なうことができるが、乱流の場合には $\bar{\varepsilon}$ が \bar{x} の関数となるために、層流とは異なる速度分布が現われる。いま後流の中における速度欠損を \bar{w} として $\bar{u} = 1 + K \bar{y} - \bar{w}$ とおく。さらに、實際上問題となる多くのせん断流では K が 1 に比較して遙かに小さいので、 $\bar{w} = \bar{w}_1 + K \bar{w}_2$, $\bar{v} = \bar{v}_1 + K \bar{v}_2$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + K \bar{\varepsilon}_2$ とおき、これらを式 (3) および式 (4) に代入して K の同一オーダーの項を両辺で比較すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{y}^2} = \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{y}} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}} - \bar{\varepsilon}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \bar{y}^2} = \bar{v}_1 - \bar{y} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{v}_1(\bar{x}, \pm \infty) + \bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \bar{y}^2} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{w}_2 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{y}} - \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{y}} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (6b)$$

したがって問題はこれらの方程式を

$$\bar{y} \rightarrow \pm \infty; \bar{w}_1 \rightarrow 0, \bar{w}_2 \rightarrow 0$$

$$\bar{y} = 0; \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{y}} = 0$$

なる境界条件のもとで解くことに帰着される。いま k_1, k_2, m_1, m_2 等を定数として、渦粘性係数を

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= k_1 + k_2 \bar{x}^{-1/2} + k_3 \bar{x}^{-1} \\ \bar{\varepsilon}_2 &= m_1 \bar{x}^{1/2} + m_2 + m_{23} \bar{x}^{-1/2} \log(k_1 \bar{x}) \end{aligned}$$

とおけば、 \bar{w}_1, \bar{w}_2 の解は以下のように決定される。

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_1^{(1)} + \bar{w}_1^{(2)} + \bar{w}_1^{(3)} + \dots$$

$$\bar{w}_1^{(1)} = B(k_1 \bar{x})^{-1/2} e^{-(1/2)\eta^2}$$

$$\bar{w}_1^{(2)} = B^2(k_1 \bar{x})^{-1} \left[\frac{1}{2} \left\{ e^{-\eta^2} + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \eta e^{-(1/2)\eta^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right\} + k_2^*(\eta^2 - 1) e^{-(1/2)\eta^2} \right]$$

$$\bar{w}_1^{(3)} = B^3(k_1 \bar{x})^{-3/2} \left(-\frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{9}{32\sqrt{2}} k_2^* + \frac{1}{2} k_3^* \right) \log(k_1 \bar{x}) (\eta^2 - 1) e^{-(1/2)\eta^2}$$

但し

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\bar{y}}{\sqrt{2k_1 \bar{x}}}, \quad \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt, \quad k_2^* = \frac{k_2}{B\sqrt{k_1}} \\ k_3^* &= \frac{k_3}{B^2}, \quad B = \frac{C_D}{4\sqrt{\pi}}, \quad C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U_0^2 d} \end{aligned}$$

であり、

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_2^{(1)} + \bar{w}_2^{(2)} + \bar{w}_2^{(3)} + \dots$$

$$\bar{w}_2^{(1)} = B \left\{ -\frac{1}{\sqrt{8}} (\eta^3 + 3\eta) e^{-\eta^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} m_1^* (\eta^2 - 1) e^{-(1/2)\eta^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2^{(2)} &= B^2(k_1 \bar{x})^{-1/2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{4} (\eta^3 + 3\eta) e^{-\eta^2} + \sqrt{\pi} (1 - e^{-(1/2)\eta^2}) \operatorname{sgn} \eta - \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \eta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\eta^4 + 2\eta^2 - 5) e^{-(1/2)\eta^2} \operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right\} - \frac{k_2^*}{\sqrt{8}} \left(\frac{5}{6} \eta^5 + \frac{4}{3} \eta^3 + 5\eta \right) e^{-(1/2)\eta^2} + \frac{m_1^*}{3\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ -\eta^2 e^{-(1/2)\eta^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} (3\eta - \eta^2) e^{-(1/2)\eta^2} \operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right\} - \frac{m_2^*}{\sqrt{2}} \eta^2 e^{-(1/2)\eta^2} - \frac{2}{\sqrt{18}} m_1^* k_2^* (6\eta^2 - \eta^4) e^{-(1/2)\eta^2} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{w}_2^{(3)} = B^3(k_1 \bar{x})^{-1} \log(k_1 \bar{x}) \sqrt{2} \left\{ \frac{\alpha}{4} \eta^5 e^{-(1/2)\eta^2} + \frac{\alpha}{3} m_1^* (\eta^4 - 6\eta^2 + 3) e^{-(1/2)\eta^2} + m_{23}^* \eta \log|\eta| e^{-(1/2)\eta^2} + C \eta e^{-(1/2)\eta^2} \right\}$$

但し、

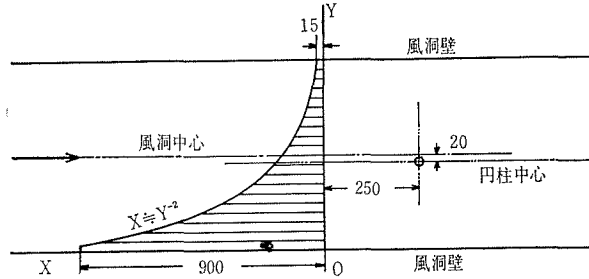
$$m_1^* = \frac{m_1 k^{-3/2}}{\sqrt{2}}, \quad m_2^* = \frac{m_2}{\sqrt{2} B k_1}, \quad m_{23}^* = \frac{m_{23}}{B^2 \sqrt{2} k_1}$$

$$\alpha = -\frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{9}{32\sqrt{2}} k_2^* + \frac{1}{2} k_3^*, \quad C; \text{未定定数}$$

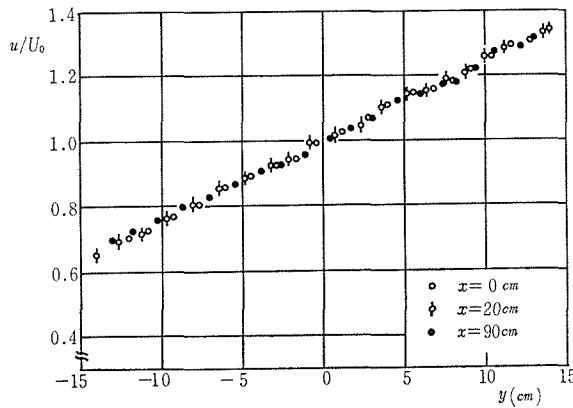
である。 \bar{w}_1 は一様流の中におかれた円柱の後流を示し、 \bar{w}_2 は主流渦度による効果を意味する。

3. 実験装置および実験方法

本実験に使用した風洞は、 $0.5 \times 0.5 \times 5.0$ m の試験断面を有する貫流型風洞である。一様せん断流を得る一方法としてハニカムのブロックに適当な形状を与え、各流線の通過するハニカムの抵抗部分を調整する Kotansky²⁾ の方法を採用した。本実験ではセルサイズ 4 mm の塩化ビニル製ハニカムを使用し、第 2 図に示す通り流れと直角方向を Y 軸として、 $X \doteq Y^{-2}$ の形状を規準とした場合の適当箇所をとり、これに修正を加えて整形することにより風洞試験断面全体にわた



第2図 ハニカムブロック形状



第3図 一様せん断流 ($U_0 \approx 12$ m/sec)

ってほぼ一様せん断流と見なすことのできる2次元流を実現することができた。第3図にその一例を示してある。実験に用いた円柱は真鍮製である。単独円柱として用いた円柱の直径は10 mmであり、並列2円柱の場合には、直径6 mm、円柱間の中心間隔は12 mmである。測定時における円柱の震動防止のために円柱に張力を加えた状態で風洞上下壁に固定する方法を採用してある。後流内における速度分布 u の測定は外径1.2 mm、内径1.0 mmのステンレス製全圧管および同外径をもつ静圧管を使用して行ない、風洞のベルエントランス部における差圧を監視することによって主流の平均速度の時間的変動を極力小さくするよう留意した。

単独円柱および並列2円柱の実験条件を第1表に示してある。

第1表

	d (mm)	U_0 (m/sec)	K	Re
単独円柱	10	12.1	0.0235	8540
並列2円柱	6	12.6	0.0474	4750

4. 実験結果および考察

単独円柱の場合には、2章において示した解のうち $\bar{w}^{(1)}$ および $\bar{w}^{(2)}$ のみを考察すれば十分であるものと考えられ、簡単のため $m_1^* = 0$ と仮定すれば後流内における速度欠損は

$$\bar{w} = B(k_1 \bar{x})^{-1/2} e^{-(1/2)\eta^2} - \frac{KB}{\sqrt{8}} (\eta^3 + 3\eta) e^{-(1/2)\eta^2} \quad (7)$$

となる。また、並列2円柱の場合は第2近似までを含む解で十分なものと考えられ、単独円柱と

同様に $m_1^* = 0$, $m_2^* = 0$ と仮定すると速度分布は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{w} = & B(k_1 \bar{x})^{-1/2} e^{-(1/2)\eta^2} - \frac{KB}{\sqrt{8}} (\eta^3 + 3\eta) e^{-(1/2)\eta^2} \\ & + B^2(k_1 \bar{x})^{-1} \left[\frac{1}{2} \left\{ e^{-\eta^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \eta e^{-(1/2)\eta^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right\} + k_2^* (\eta^2 - 1) e^{-(1/2)\eta^2} \right] \\ & + KB^2(k_1 \bar{x})^{-1/2} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{4} (\eta^3 + 3\eta) e^{-\eta^2} + \sqrt{\pi} (1 - e^{-(1/2)\eta^2}) \operatorname{sgn} \eta - \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \eta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\eta^4 + 2\eta - 5) e^{-(1/2)\eta^2} \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right\} - \frac{k_2^*}{\sqrt{8}} \left(\frac{6}{5} \eta^5 + \frac{4}{3} \eta^3 + 5\eta \right) e^{-(1/2)\eta^2} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

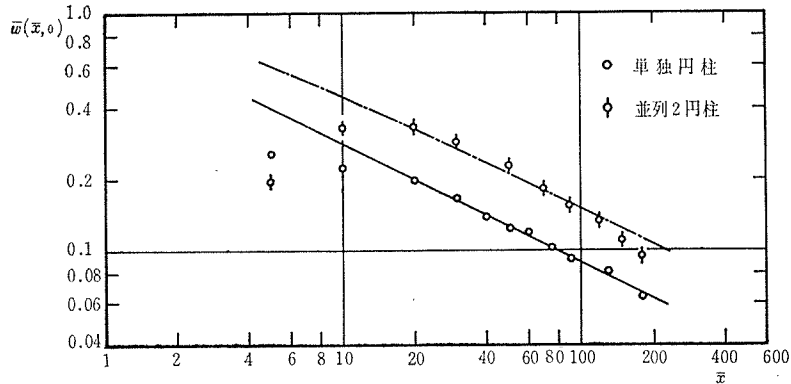
ここで B は円柱の抗力係数を含む定数である。後流の内部における速度分布の実測値を用いて円柱の抗力係数を運動量の式によって算定すると、単独円柱の場合 $C_D = 1.12$ 、並列2円柱の場合 $C_D = 2.0$ が得られ B の値はそれぞれ $B = 0.158$, $B = 0.282$ となる。第4図は $\bar{y} = 0$ なる点の速度欠損 $\bar{w}(\bar{x}, 0)$ と \bar{x} との関係を示したものである。 $\bar{w}(\bar{x}, 0)$ は式 (7), (8) において $\eta = 0$ として求めることができ、単独円柱の場合は式 (7) より

$$\bar{w}(\bar{x}, 0) = B(k_1 \bar{x})^{-1/2} \quad (9)$$

となり、並列2円柱の場合は式 (8) より

$$\bar{w}(\bar{x}, 0) = B(k_1 \bar{x})^{-1/2} + B^2(k_1 \bar{x})^{-1} \left(\frac{1}{2} - k_2^* \right) \quad (10)$$

である。第4図に示す実測値と対比することにより、単独円柱の場合には $k_1 = 0.032$ 、並列2円柱の場合には $k_1 = 0.033$, $k_2^* = 0.725$ と決定することができる。一様流の中における円柱後流に関する Schlichting の測定³⁾では単独円柱の場合 $k_1 = 0.026$ であるから本実験の場合のような一様せん断流においては k_1 の値が24%程度増加していることになる。これらの値を第2表にまとめて示してある。



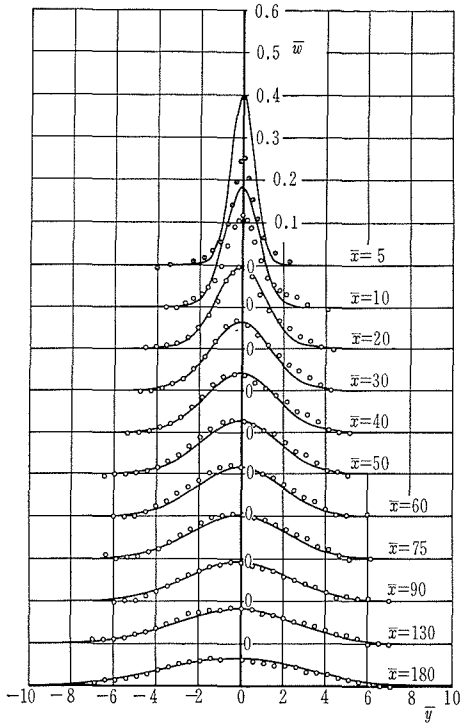
第4図 $\bar{y} = 0$ における速度欠損 $\bar{w}(\bar{x}, 0)$

—, 式 (9) による ($B = 0.158$, $k_1 = 0.032$)

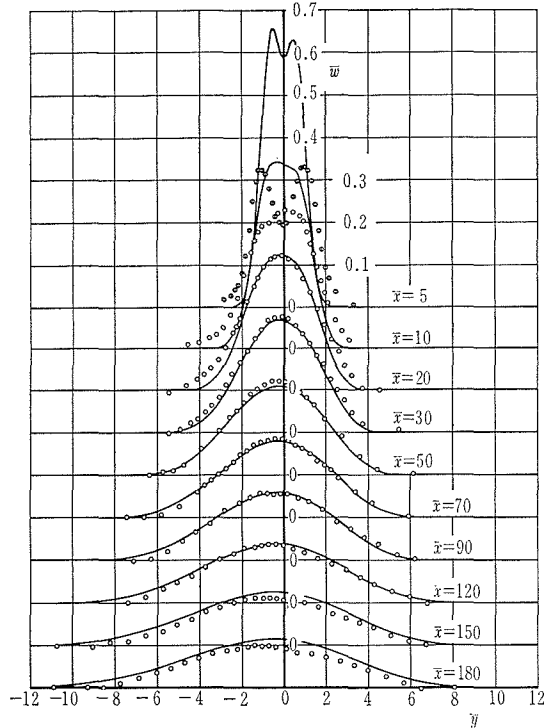
- - -, 式 (10) による ($B = 0.282$, $k_1 = 0.033$, $k_2^* = 0.725$)

第2表

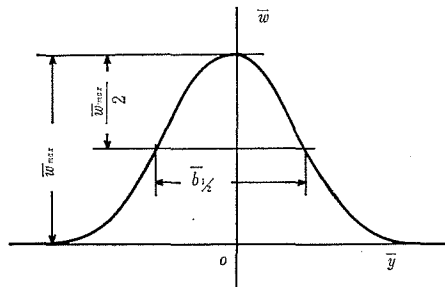
	d (mm)	C_D	B	k_1	k_2^*	m_1^*	m_2^*
単 独 円 柱	10	1.12	0.158	0.032	-	0	-
並 列 2 円 柱	6	2.0	0.282	0.033	0.725	0	0
単独円柱 (一様流) ³⁾	4.8	1.08	0.152	0.026	-	-	-



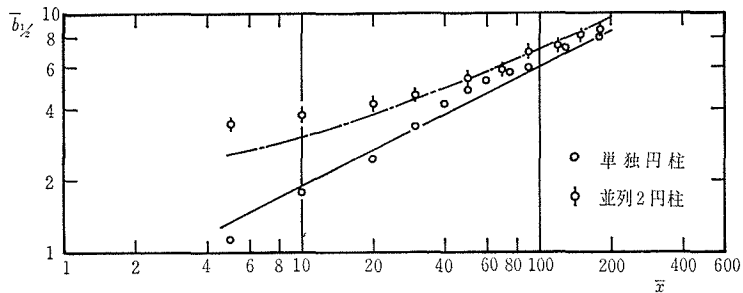
第5図 速度欠損分布 (単独円柱, $d=10$ mm)
 —, 式(7)による理論曲線($B=0.158$
 $K=0.0235$ $k_1=0.032$)



第6図 速度欠損分布 (並列2円柱, $d=6$ mm)
 —, 式(8)による理論曲線($B=0.282$
 $K=0.0474$ $k_1=0.033$ $k_2^*=0.725$)



第7図



第8図 後流幅の分布
 —, 式(7), - - -, 式(8)による

第1表および第2表に示される諸数値を式(7)、(8)に代入することによって決定される速度欠損の理論値 \bar{w} と実測結果とを \bar{x} の位置における下流部の断面ごとと比較して示したのが第5図、第6図である。これらの図より後流の内部における速度欠損は $\bar{x}=20$ より下流の断面において、単独円柱および並列2円柱の場合とも理論値と比較的良好な一致を示していることがわかる。また、一様せん断流の中における後流の拡大は高速側よりも低速側に著しいことが認められる。第7図のようにして定義される無次元後流幅 $\bar{b}_{1/2}$ に関する理論結果と実測値とを比較した結果が第8図である。

5. 結 論

一様せん断流の中におかれた円柱の乱流後流の内部における平均速度分布について、理論解析ならびに実験的検討を行なった。その結果を要約すれば次の通りである。

(1) 主流渦度の効果を一様流に対する摂動として取り扱うことによって得られた後流の内部における理論速度分布は円柱直径の20倍程度以上の下流領域において実測値と比較的良好な一致を示す。

(2) 後流の拡大は一様せん断流の高速側よりも低速側に著しい。

(3) 後流の拡大を示すパラメータ k_1 の値は、本実験で用いた一様せん断流では一様流の場合と比較して約24%程度大きい結果となった。

なお、実験装置の製作について御援助をいただいた山崎輝夫技官、山保敏幸技官に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 木谷 勝, 有江幹男: 日本機械学会論文集, 39-317 (昭和48年), p. 192.
- 2) Kotansky, D. R.: A. I. A. A. Journal, 4-8 (1966), p. 1490.
- 3) Schlichting, H.: Ing. -Arch., 1(1930), p. 533.