



Title	一様化パラメータ $\alpha = 0$ の場合の柱状ピンチプラズマの長波長近似による安定性解析
Author(s)	本間, 利久; Honma, Toshihisa; 鬼頭, 正史 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 69, 51-59
Issue Date	1973-11-15
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41171">https://hdl.handle.net/2115/41171</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	69_51-60.pdf



# 一様化パラメータ $\alpha_i=0$ の場合の柱状ピンチ プラズマの長波長近似による安定性解析

本 間 利 久 鬼 頭 正 史\* 加 地 郁 夫

(昭和48年4月28日受理)

## Stability Analysis of a Columnar Pinch Using the Long-Wave Limit in the Case of a Uniformalized Parameter $\alpha_i=0$

Toshihisa HONMA Masafumi KITO\* Ikuo KAJI

(Received April 28, 1973)

### Abstract

The dispersion relations of a case in which all currents are carried on the plasma surface and a case in which all the axial currents are uniformly distributed across the plasma have been treated separately. Thus, it is not sufficient to merely run a comparison of the growth rates of instabilities and the complete stability conditions in both cases.

In this paper, in order to compare both cases, both dispersion relations are unified using the uniformalized parameter  $\alpha_i$ . Furthermore, the above dispersion relation in the case of  $\alpha_i=0$  is solved using the long-wave limit. Thus, the growth rates and the complete stability conditions are analytically obtained.

The results obtained in this manner show a better agreement qualitatively and quantitatively with the numerical solutions for a short-wave. Thus, the applicability of usage of long-wave limit is recognized.

### 1. 緒 言

今までプラズ表面にのみ電流が流れている場合とプラズマ中に電流が一様に分布している場合との分散式は、別々に扱われてきた。そのため両者の安定条件の比較が不十分であった。そこで本論は、両者の不安定性の成長率や完全安定条件の比較を行うため、一様化パラメータ  $\alpha_i$  を用いて両者の分散式の統一を行った。

更に上述の分散式をもとにして、 $\alpha_i=0$  の場合について長波長近似を用いて分散式を解き、不安定性の成長率と完全安定条件を、解析的にもとめた。このようにして得られた結果は、短波長における数値計算の定性的、定量的な結果ともよく一致し、この近似の有効性が確かめられた。また、ここで得られた完全安定条件は、Newcomb により指摘された安定条件とも一致することがわかった。すなわち、導体壁のある場合、 $m=0$  と  $m=1$  とのモードが完全に安定化されると他の全てのモードも完全に安定化される。また、 $m=1$  のモードは、導体壁によってのみ安定化されることも示された。任意のモード  $m(>1)$  に対する導体壁の効果は、完全な安定領域を、導体壁のない時の  $m+1$  のモードの安定領域にまで拡張することがわかった。

## 2. 解析と結果

### 2.1 統一した分散式

ピンチプラズマの閉込めの安定性の解析を行うために、図1に示されるモデルを用いる。これは、軸方向に無限大の半径  $r_0$  の軸対称円柱プラズマで、半径  $R$  の導体壁に囲まれている。そして、プラズマ中と真空中での縦磁場  $b_i$ ,  $b_e$  は定数とし、プラズマの導電率が無限大の非圧縮性プラズマを考える。

今、プラズマ表面にのみ電流が流れている場合とプラズマ中に一様に電流が流れている場合との分散式を統一するために、つぎのような軸方向電流密度を仮定する。

$$j_z = \left\{ \alpha_i + \frac{r_0}{2}(1 - \alpha_i)\delta(r - r_0) \right\} j_{\max} \quad (1)$$

ただし

$$0 \leq \alpha_i \leq 1$$

ここで  $\alpha_i$  を一様化パラメータと定義する。このパラメータの物理的意味は、全プラズマ電流に対するプラズマ中の一様電流の割合を示しているし、または、図2に示されているように、プラズマ中での  $\theta$  方向の磁場の傾きにも相当している。

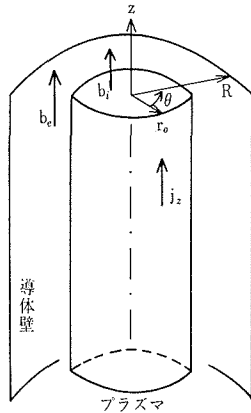


図1 解析モデル

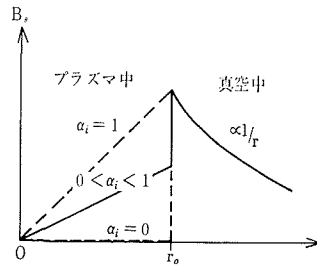


図2  $\theta$  方向の磁場の分布

さて、今、プラズマが圧力勾配とローレンツ力とが釣り合う平衡状態のまわりで、つぎに示される小さな摂動をうけるとする。

$$\text{const} \cdot \exp \{i(m\theta + kz - \omega t)\} \quad (2)$$

そして、固有振動法により、この摂動に対する運動方程式を解いて、平衡条件式から統一したつぎの分散式を得る。

$$\frac{\{Y_0^2 - (m\alpha_i - b_i X_0)^2\} \left\{ 1 - \frac{4\alpha_i^2 (m\alpha_i - b_i X_0)^2}{\{Y_0^2 - (m\alpha_i - b_i X_0)^2\}^2} \right\} I_m(X_0^*)}{X_0^* I_m(X_0^*) - \frac{2m\alpha_i (m\alpha_i - b_i X_0)}{Y_0^2 - (m\alpha_i - b_i X_0)^2} I_m(X_0^*)} + \alpha_i^2 = 1 + \frac{(m - b_e X_0)^2}{X_0} F_m(X_0, \Delta X_0) \quad (3)$$

ただし

$$X_0 = kr_0, \quad Y_0^2 = \frac{\mu_0 \theta \omega^2 r_0^2}{B_{0e}^2}, \quad \Delta = \frac{R}{r_0}$$

$$X_0^* = X_0 \left\{ 1 - \frac{4\alpha_i^2 (m\alpha_i - b_i X_0)^2}{\{Y_0^2 - (m\alpha_i - b_i X_0)^2\}^2} \right\}^{1/2}$$

$$F_m(X_0, AX_0) = \frac{K_m(X_0)I_m(AX_0) - I_m(X_0)K_m'(AX_0)}{K_m'(X_0)I_m(AX_0) - I_m(X_0)K_m'(AX_0)}$$

この分散式の各項の物理的意味は、エネルギー原理から、左辺がプラズマ中のエネルギー変化、右辺の第一項がプラズマ表面のエネルギー変化、第二項が真空中の磁場のエネルギー変化を示している。

この分散式から、 $\alpha_i=0$  の時は、プラズマ表面にのみ電流が流れている場合の分散式に対応し、Shafranov<sup>1)</sup>, Kadomtsev<sup>2)</sup>, Taylor<sup>3)</sup> の結果に一致し、 $\alpha_i=1$  の時は、プラズマ中にのみ一様電流が流れている場合の分散式に対応し、Taylor<sup>3)</sup>, Shafranov<sup>4)</sup>, Goedbloed<sup>5)</sup> の結果に一致することがわかる。その結果、このパラメータを媒介として、両者の成長率や安定条件の比較が可能となった。本論では、まず、 $\alpha_i=0$  の場合における安定条件と不安定性の成長率を、長波長近似を用いてもとめる。

## 2.2 不安定性の成長率 ( $\alpha_i=0$ )

(3) で与えられた分散式を長波長近似 ( $X_0 \ll 1$ ) で  $\alpha_i=0$  の場合を、付録に従って解析的に解くとつぎのとおりである。

$$\left. \begin{aligned} m=0 \quad -Y_0^2 &= -\left\{ b_i^2 - \frac{1}{2} + \frac{b_i^2}{2} \lambda_0 \right\} X_0^2 \\ m \geq 1 \quad -Y_0^2 &= -\{ (\lambda_m b_i^2 + b_i^2) X_0^2 - 2m\lambda_m b_e X_0 + (m\lambda_m - 1)m \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし

$$\lambda_0 = \frac{2}{A^2 - 1}, \quad \lambda_m = \frac{A^{2m} + 1}{A^{2m} - 1}$$

(4) 式で与えられる成長率を、特に不安定性の大きい  $m=1$  のモードに対して、つぎの二つの場合について調べてみる。

(i)  $b_i = b_e = b$  の場合

$$\left. \begin{aligned} -G_1^2 &= -\frac{1}{b^2} \{ b^2(1 + \lambda_1) X_0^2 - 2\lambda_1 b X_0 + (\lambda_1 - 1) \} \\ -G_{1\max}^2 &= \frac{1}{b^2} \left\{ 1 - \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} \right\} = \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1^2} X_{0\max}^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b} X_{0\max} \\ X_{0\max} &= \frac{1}{b} \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}, \quad X_{0-} = \frac{1}{b} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}, \quad X_{0+} = \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし

$$G_1^2 = \frac{\mu_0 \rho \omega^2 r_0^2}{B_{iz}^2}$$

この場合は、長波長においては  $\beta$  比の比較的小さい場合に相当する。図3において、成長率  $G_1^2$  の縦磁場  $b$  による変化が示されている。この図より、縦磁場を大きくすることにより、比較的短い波長の領域が安定化され、成長率の最大値も小さくなる。これは、プラズマの変形にともない縦磁場のエネルギーが、急激に増加するためと考えられる。この図の負の傾きの破線は、 $b$  を固定して導体壁をプラズマ表面に近づけた時に生じる成長率の最大値の軌跡を示している。また、下に凸の放物線の破線は、導体壁の位置を固定して  $b$  を大きくした時の最大な成長率の軌跡を示している。これらのことは、図4、図5でも同様である。図4の実線は、 $b$  を固定して導体壁をプラズマ表面に近づけた時、長波長の領域が安定化され、最大値も小さくなることを示している。このことから、縦磁場は短波長に対し、導体壁は長波長に対して安定化効果があることが

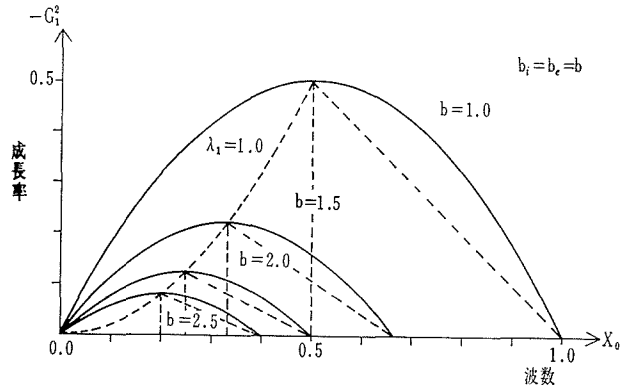


図3 縦磁場による成長率の変化

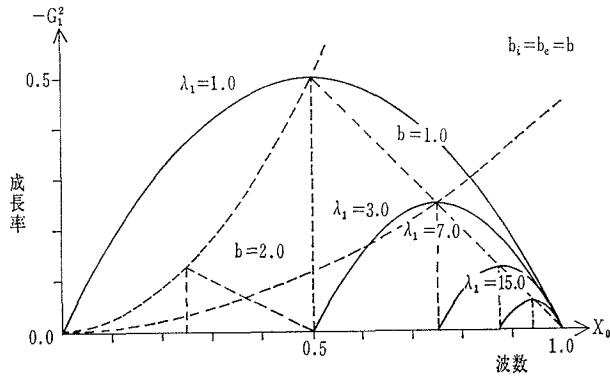


図4 導体壁による成長率の変化

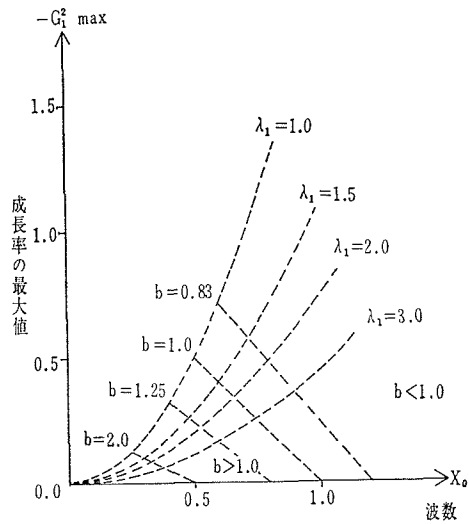


図5 導体壁の位置と縦磁場による成長率の最大値の変化

わかり、縦磁場の強さと導体壁の位置を適切に選択することにより、ピンチプラズマを安定に閉込めることができる。図5には、この両者の効果を、成長率の最大値の軌跡で示してある。

(ii)  $b_i < b_e$  の場合

$$\left. \begin{aligned} -G_i^2 &= -\frac{1}{b_i^2} \{ \lambda_1 b_e^2 X_0^2 - 2\lambda_1 b_e X_0 + (\lambda_1 - 1) \}, & -G_{i\max}^2 &= \frac{1}{b_i^2} \\ X_{0\max} &= \frac{1}{b_e}, & X_{0-} &= \frac{1}{b_e} \left( 1 - \sqrt{\lambda_1} \right), & X_{0+} &= \frac{1}{b_e} \left( 1 + \sqrt{\lambda_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この場合は、比較的  $\beta$  比の大きいプラズマにおいて生じると考えられる。そして、(i) の  $\beta$  比の小さい場合にくらべて、安定化されにくいことがわかる。図6には、導体壁の位置による成長率の変化が示されている。これによると、導体壁のプラズマ表面への接近にともない、長波長および比較的短い波長の領域が安定化されるが、特定の波長の不安定性が強調され、成長率も小さくならない。このことは、図7の  $b_e$  による成長率の変化においても同じことがいえる。この場合は、比較的波長の短い領域が安定化され、やはり、特定の波長の成長率は変化せず不安定な波長が強調されることになる。

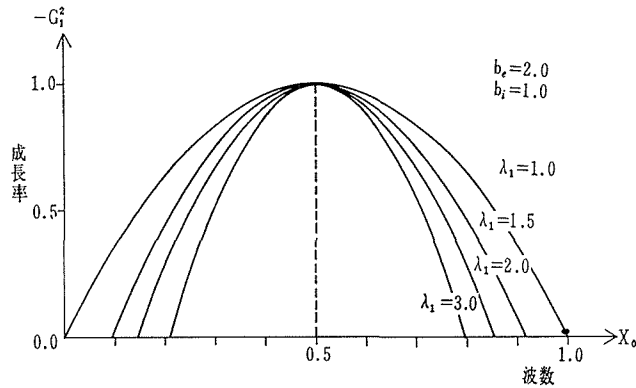


図6 導体壁による成長率の変化

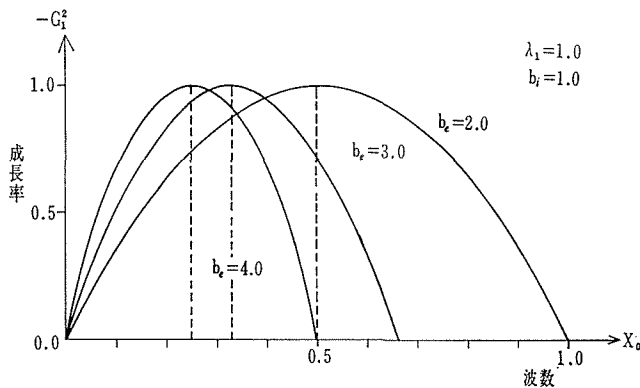


図7 真空中の縦磁場による成長率の変化

### 2.3 完全安定条件 ( $\alpha_i=0$ )

(4) 式からプラズマが常に安定であるための完全安定条件が、波数  $X_0$  に関して成長率が常に負という条件より、つぎのように解析的にもとめられる。

	導体壁なし	導体壁あり	
$m=0$	$b_i^2 > \frac{1}{2}$	$\frac{b_i^2}{(\sqrt{1/2})^2} + \frac{b_e^2}{(\sqrt{1/\lambda_0})^2} > 1$	}
$m=1$	不安定	$b_i^2 > \frac{b_e^2}{1-(1/\lambda_1)}$	
$m \geq 2$	$b_i^2 > \frac{b_e^2}{m-1}$	$b_i^2 > \frac{b_e^2}{m-(1/\lambda_m)}$	

この完全安定条件をもとにして、 $b_i$  と  $b_e$  について完全安定領域を図示したのが、図8～図10である。図8は、導体壁のない場合で、 $m=0$  と  $m=2$  のモードが完全に安定化されると、 $m=1$  をのぞく他の全てのモードも完全に安定化されることを示したものである。図9においては、 $m=0$  と  $m=1$  のモードが、導体壁のプラズマ表面への接近で完全安定領域が拡張されていくのが示され、特に、 $m=1$  のモードが、導体壁によってのみ安定化されることがわかる。図10では、プラズマ表面に導体壁がある場合の安定領域を示したもので、これより、 $m=0$  と  $m=1$  の

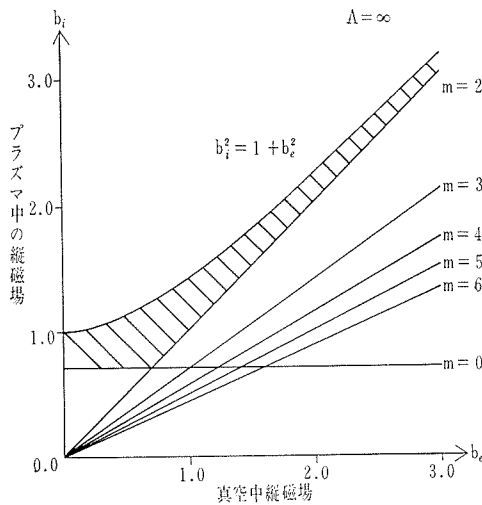


図8 導体壁のない時の安定領域

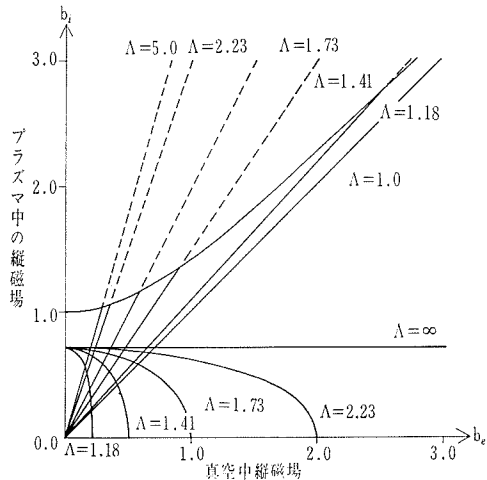


図9  $m=0$  と  $m=1$  の導体壁による安定領域の変化

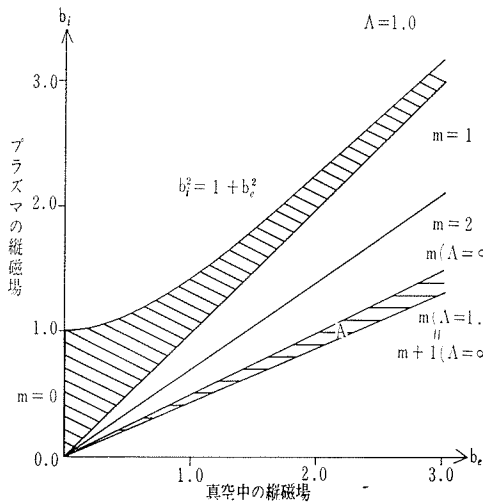


図10 導体壁がプラズマ表面にある時の安定領域

モードが安定化されると他の全てのモードも安定化されることがわかる。これは、Newcomb<sup>6)</sup>により摘された安定条件に対応するものと考えられる。更に、図10において、任意のモード  $m (>1)$  に対する導体壁の効果は、安定領域を、導体壁のない時の  $m+1$  のモードの安定領域まで拡張することが、図の A の部分によって示される。

図8～図10より、完全に安定化される領域は、 $\beta$  比の比較的小さい部分に相当しており、 $\beta$  比の大きい部分 ( $b_i < b_e$ ) は、安定化されにくいことを示している。このことは、2.2の(ii)で述べたことに対応している。

2.3で述べたことは、波長の短い領域での数値計算の結果<sup>3)</sup>とも、定性的におよび定量的にも一致が認められ、長波長近似の有効性が確かめられる。

#### 2.4 完全安定条件の適用範囲

完全安定条件をもとめるために、長波長近似を用いて分散式を解いた。そのため、成長率を与える波数の占める範囲も  $0 < X_0 < 1$  の範囲である。そこで、完全安定条件の適用される範囲を、最大の成長率を与える波数  $X_{0max}$  が  $0 < X_{0max} < 1$  の範囲にあることよりもとめると、つぎのとおりである。

$$\frac{(b_e - m/2)^2}{a^2} + \frac{b_i^2}{b^2} > 1$$

ただし

$$a^2 = \frac{m^2}{4}, \quad b^2 = \frac{m^2}{4} \lambda_m$$

(8) 式の楕円の方程式にもとづいて図示したのが、図11である。適用領域は、この図の曲線の外側である。しかし、これはあくまで目安を与えるもので、実際には、数値計算の結果との比較から定める必要がある。

この図より適用範囲を調べると、 $m$  のモードが大きい程、導体壁がプラズマ表面に接近する程、曲線のより外側の領域が適用範囲となることがわかる。

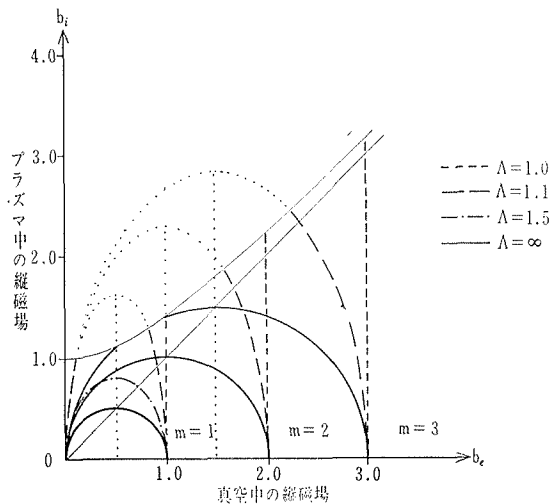


図11 完全安定条件の適用範囲

### 3. 結 言

本論では、今まで、表面にのみ電流が流れている場合とプラズマ中に一様に流れている場合と

の分散式が、別々に扱われてきたものを一様化パラメータを用いて一つの分散式で表わすことができた。そして、一様電流分布の場合と表面に電流が集中している場合との不安定性の成長率や完全安定条件の比較が可能になった。

本論においては、特に、 $\alpha_i=0$  の場合の成長率や安定条件を長波長近似によって分散式を解き、解析的にもとめた。そして、その結果の示すところは、短波長における数値計算の結果と定性的に、定量的に一致することが認められ、長波長近似による分散式の特徴の抽出の有効性が確かめられた。すなわち

- (i) 導体壁は長波長に対し、縦磁場は短波長に対して安定化効果がある。
- (ii) 導体壁のある場合、 $m=0$  と  $m=1$  のモードが安定化されると他の全てのモードも安定化される。これは、Newcomb の指摘した安定条件に対応する。
- (iii)  $m=1$  のモードは、導体壁によってのみ安定化される。
- (iv) 任意のモード  $m(>1)$  に対する導体壁の効果は、安定領域を、導体壁のない時の  $m+1$  の安定領域まで拡張することである。

したがって、 $\alpha_i \neq 0$  の成長率や完全安定条件をもとめるにも長波長近似の有効性があると思われる。

### 参 考 文 献

- 1) Shafranov, V. D.: J. Nuclear Energy, 2 (1957) 86.
- 2) Kadomtsev, B. B.: Reviews of Plasma Physics, vol. 2, ed. by M. A. Leontovich, Consultants Bureau (New York, 1966) 153.
- 3) Taylor, R. J.: Proc. Phys. Soc. B70 (1957) 1049.
- 4) Shafranov, V. D.: Soviet Physics-Technical Physics 15 (1970) 175.
- 5) Goedbloed, J. P.: Physica 53 (1971) 535.
- 6) Newcomb, W. A.: Ann. Phys. 10 (1960) 232.

### 付 録

(3) 式から (4) 式を導びく。 $\alpha_i=0$  より (3) 式は、つぎのよう変形される。

$X_0^* = X_0$  となるから

$$-\{Y_0^2 - b_i^2 X_0^2\} \frac{I_m(X_0)}{X_0 I_m'(X_0)} = 1 + \frac{(m - b_e X_0)^2}{X_0} F_m(X_0, AX_0)$$

上式に  $X_0 \ll 1$  の長波長近似を適用する。

$m=0$  の場合

$$\frac{I_0'(X_0)}{I_0(X_0)} \rightarrow \frac{X_0}{2}, \quad \frac{I_0'(AX_0)}{I_0(X_0)} \rightarrow \frac{AX_0}{2}, \quad \frac{K_0'(X_0)}{K_0(X_0)} \rightarrow -\frac{1}{X_0}, \quad \frac{K_0'(AX_0)}{K_0(X_0)} \rightarrow -\frac{1}{AX_0}$$

$$\begin{aligned} F_m(X_0, AX_0) &= \frac{K_m(X_0)I_m'(AX_0) - I_m(X_0)K_m'(AX_0)}{K_m'(X_0)I_m(AX_0) - I_m(X_0)K_m'(AX_0)} \\ &= \frac{I_m'(AX_0)/I_m(X_0) - K_m'(AX_0)/K_m(X_0)}{K_m'(X_0)/K_m(X_0)I_m(AX_0)/I_m(X_0) - I_m(X_0)/I_m(X_0)K_m'(AX_0)/K_m(X_0)} \\ &\xrightarrow{X_0 \ll 1} \frac{AX_0/2 + 1/AX_0}{(-1/X_0)(AX_0/2) + (X_0/2)(1/AX_0)} \sim -\frac{1}{X_0} \frac{2}{A^2 - 1} \end{aligned}$$

分散式はつぎのようになる。

$$-\{Y_0^2 - b_i^2 X_0^2\} = \frac{X_0^2}{2} + \frac{X_0^2}{2} \frac{b_e^2 X_0^2}{X_0} (-) \frac{1}{X_0} \frac{2}{A^2 - 1}$$

$$\therefore -Y_0^2 = -\left\{b_i^2 - \frac{1}{2} + \frac{b_e^2}{2}\lambda_0\right\} X_0^2 \lambda_0 = \frac{2}{A^2 - 1}$$

$m \geq 1$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{I'_m(X_0)}{I_m(X_0)} &\rightarrow \frac{m}{X_0} & \frac{I'_m(\Lambda X_0)}{I_m(\Lambda X_0)} &\rightarrow \frac{m}{\Lambda X_0} \Lambda^m \\ \frac{K'_m(X_0)}{K_m(X_0)} &\rightarrow -\frac{m}{X_0} & \frac{K'_m(\Lambda X_0)}{K_m(\Lambda X_0)} &\rightarrow -\frac{m}{\Lambda X_0} \frac{1}{\Lambda^m} \\ F_m(X_0, \Lambda X_0) &\xrightarrow{x_0 < 1} \frac{\Lambda^m \frac{m}{\Lambda X_0} + \frac{1}{\Lambda^m} \frac{m}{\Lambda X_0}}{-\frac{m}{X_0} \Lambda^m \frac{m}{\Lambda X_0} + \frac{m}{X_0} \frac{1}{\Lambda^m} \frac{m}{\Lambda X_0}} = -\frac{X_0}{m} \frac{\Lambda^{2m} + 1}{\Lambda^{2m} - 1} \end{aligned}$$

分散式はつぎのようになる。

$$-\{Y_0^2 - b_i^2 X_0^2\} \frac{1}{m} = 1 - \frac{(m - b_e X_0)^2}{X_0} \frac{X_0}{m} \lambda_m$$

$$\therefore -Y_0^2 = -\{(\lambda_m b_e^2 + b_i^2) X_0^2 - 2m \lambda_m b_e X_0 + (m \lambda_m - 1)m\} \lambda_m = \frac{\Lambda^{2m} + 1}{\Lambda^{2m} - 1}$$

このようにして (3) 式から (4) 式が導びかれる。