混成木集合の一生成法

小川恭孝* 仙石正和** 松本 正**

(昭和48年4月28日受理)

A Method of Generation of Hybrid Trees

Yasutaka OGAWA, Masakazu SENGOKU, Tadashi MATSUMOTO

(Received April 28, 1973)

Abstract

It is known that network functions can be evaluated by finding all trees, cotrees or hybrid trees in a corresponding graph. Many methods are known for generating trees or cotrees.

However, no effective methods for computors have been given for hybrid trees.

In this paper, a method of generating all hybrid trees is proposed. This method consists of two processes, one of which is to reduce the given graph by repetition of open-circuiting of parallel edges and short-circuiting of edges, and the other is to expand the reduced graph to the original graph by using 1-vertex cut-sets.

These two processes can be readily carried out by computor.

Further, this method has some advantageous points when running a comparison with that of generating of trees or cotrees.

1. 緒言

与えられたグラフの，混成木と混成2木をことごとく求めることにより，回路網解析が可能である[1]。しかし，これ迄，混成木を全て求める有効な方法は発表されていない。これはグラフが複雑になるにつれて，混成木の数が急激に増加するため，電子計算機で処理させた場合でも，メモリーが不足したり，演算時間が長くなりすぎたりするためである。これは，グラフの木を全て求める場合と全く同様である。

なお，アドミタンスおよびインピーダンス次元，両方の素子を含むような回路網においては，木，補木を用いるよりも混成木集合を求めた方が有利となる。

ここでは，与えられたグラフの混成木集合を直接（木集合を求めることなしに）求める，一つの新しいアルゴリズムについて述べる。この方法では，まず与えられたグラフに，枝の短絡除去と開放除去を繰り返し，十分簡単なグラフにし，そのグラフの混成木集合から，元のグラフの混成木集合を導くのである。このアルゴリズムを用いて，電子計算機で処理させた場合，かなり短い演算時間で，混成木集合が求まると考えられる。

2. 記号及び用語の定義

本文で扱うグラフは連結，無向とする。

---

* 情報工学研究科 情報数理工学第一講座

** 電子工学科 電波伝送工学講座

g_i をグラフ G の部分グラフとし，A, B を G の部分グラフよりなる集合とする。e_i を G の1つの枝とするとき，演算×，＊，$\frac{\partial}{\partial e_i}$, $\frac{\partial}{\partial g_i}$, $\int de_i$, $\int dg_i$ を次のように定義する。

$$A \times B = \{g_i \cup g_j \mid g_i \in A,\ g_j \in B\}$$

$$A * B = \{g_i \oplus g_j \mid g_i \in A,\ g_j \in B\} \qquad (\oplus \text{ はリング　サム})$$

$$\frac{\partial}{\partial e_i} g_i = \begin{cases} g_i \oplus e_i & e_i \in g_i \text{ のとき} \\ \phi & e_i \notin g_i \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\int g_i de_i = \begin{cases} g_i \cup e_i & e_i \notin g_i \text{ のとき} \\ \phi & e_i \in g_i \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial e_i} A = \left\{ \frac{\partial}{\partial e_i} g_i \mid g_i \in A,\ e_i \in g_i \right\}$$

$$\int A de_i = \left\{ \int g_i de_i \mid g_i \in A,\ e_i \notin g_i \right\}$$

$g_i = e_1 e_2 \dots e_m$ とする。(簡単のために，部分グラフを枝の積の形で表わす。)

$$\frac{\partial}{\partial g_i} A = \frac{\partial}{\partial e_1} A \oplus \frac{\partial}{\partial e_2} A \oplus \dots \oplus \frac{\partial}{\partial e_m} A$$

$$\int A dg_i = \int A de_1 \oplus \int A de_2 \oplus \dots \oplus \int A de_m$$

A において，枝 e を含む部分グラフの集合を $A\binom{e}{1}$, e を含まない部分グラフの集合を $A\binom{e}{0}$ と書く。

1–節点カットセット及び，混成木を次のように定義する。

1–節点カットセット：

カットセットにおいて，一方の節点の部分集合の要素数が1，すなわち，その部分集合に1個の節点のみが含まれているようなカットセットを，1–節点カットセットと定義する。

混成木：

与えられたグラフ G の枝集合 E を E_y, E_z の部分集合に分ける。($E_y \cup E_z = E$, $E_y \cap E_z = \phi$) E_z をさらに部分集合 $\mathcal{E}_z$, $\overline{\mathcal{E}}_z$ に分け，$\mathcal{E}_z$, $\overline{\mathcal{E}}_z$ が，それぞれ G のカットセット及び，閉路を含まないようにする。($\mathcal{E}_z \cup \overline{\mathcal{E}}_z = E_z$, $\mathcal{E}_z \cap \overline{\mathcal{E}}_z = \phi$) $\mathcal{E}_z$ の枝を開放除去，$\overline{\mathcal{E}}_z$ の枝を短絡除去してできるグラフ G_y は，E_y の枝から成っている。G_y において，E_y の枝を $\mathcal{E}_y$ と $\overline{\mathcal{E}}_y$ に分け，$\mathcal{E}_y$ は閉路を含まず，$\overline{\mathcal{E}}_y$ はカットセットを含まないようにする。($\mathcal{E}_y \cup \overline{\mathcal{E}}_y = E_y$, $\mathcal{E}_y \cap \overline{\mathcal{E}}_y = \phi$) このとき，$\mathcal{E}_y \cup \mathcal{E}_z$ からなる部分グラフを，G の E_y に関する混成木という。

この混成木の定義において，$\mathcal{E}_y$, $\overline{\mathcal{E}}_y$ は，それぞれ G_y の閉路，カットセットを含まないように選んであるため，$\mathcal{E}_y$ は G_y の極大無閉路集合となっている。そのため，部分グラフ $\overline{\mathcal{E}}_z \cup \mathcal{E}_y$ は G の極大無閉路集合，すなわち G の1つの木となっている。つまり，混成木は

$$\mathcal{E}_y \cup \mathcal{E}_z = (\mathcal{E}_y \cup \overline{\mathcal{E}}_z) \oplus (\overline{\mathcal{E}}_z \cup \mathcal{E}_z) = t \oplus E_z$$

と表わされる。(t はグラフ G の木である)

このことから，G の木集合，混成木集合を，それぞれ T, HT とすると，$HT = T * E_z$ となることがわかる。

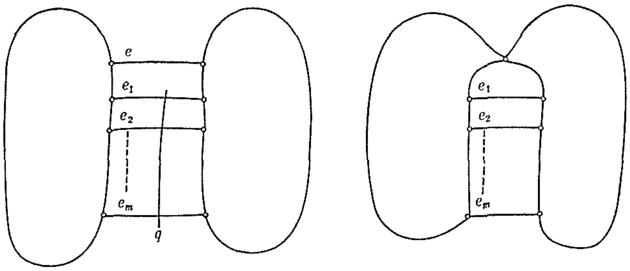
3.　混成木集合生成のための準備

[定理 1]　グラフ G^* の任意の枝 e を短絡除去して得られるグラフを G とする。(図1) G^*, G の木集合を，それぞれ T^*, T とする。枝 e を含む任意のカットセットから，e を除いたもの

を $q=\{e_1e_2\ldots e_m\}$ とすると，

$$T^*=\{e\}\times T\cup\int Tdq$$
$$=\{e\}\times T\cup\left\{\int Tde_1\oplus\int Tde_2\oplus\ldots\oplus\int Tde_m\right\}$$

が成立する。



(a)　グラフ G*　　(b)　グラフ G

図1　グラフ G* と G

（証明）　証明は2段階に分けて行なう。

第1段階

まず，第1段階では，$T^*\subset\{e\}\times T\cup\int Tdq$ であることを証明する。

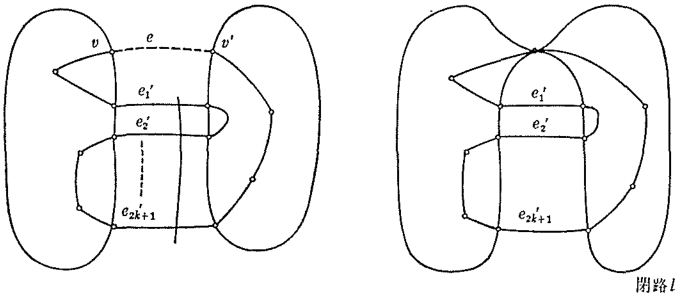
T の各要素は，G^* において，短絡除去した枝 e の両端の点 v, v' 間に道のない 2-木である。よって，$T^*\binom{e}{1}=\{e\}\times T$ が成立する。しかも，$\int Tde_1\oplus\int Tde_2\oplus\ldots\oplus\int Tde_m$ で得られるグラフには，e は含まれない。そのため，$\{e\}\times T\cap\left\{\int Tde_1\oplus\int Tde_2\oplus\ldots\oplus\int Tde_m\right\}=\phi$ となり，$T^*\binom{e}{1}\subset\{e\}\times T\cup\int Tdq$ が成立する。

$^\forall t^*\in T^*\binom{e}{0}$ なる，t^* の枝からなる，v, v' 間の道 p には，q の要素として奇数個の枝 $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{2k+1}$ が含まれている。(図2 (a))（カットセットと閉路の共通枝の数は偶数である。）部分グラフ t^* の節点 v, v' を一致させてできる部分グラフを g とする。g には1個の閉路 l が存在する。(図2 (b))（l は G^* における道 p の枝からなっている。）

g から枝 e'_1 を開放除去した部分グラフを t_1 とする。

g から枝 e'_2 を開放除去した部分グラフを t_2 とする。

………………………………………………



(a)　グラフ G*　　(b)　グラフ G

図2　グラフ G* と G

g から枝 e'_{2k+1} を開放除去した部分グラフを t_{2k+1} とする。

$t_1, t_2, \ldots, t_{2k+1}$ は，G における木である。故に，$t^* = t_1 \cup e'_1 = t_2 \cup e'_2 = \ldots = t_{2k+1} \cup e'_{2k+1}$ が成立する。$(t^* \in T^*\binom{e_1}{0}, t_i \in T, e'_i \in q, e'_i \neq e)$ よって，$T^*\binom{e}{0}$ の全ての要素は，$\int T de_1, \ldots, \int T de_m$ の演算で奇数回生ずる。$\oplus$ の性質で明らかなように，$T^*\binom{e}{0}$ の要素は，$\int T de_1 \oplus \int T de_2 \oplus \ldots \oplus \int T de_m$ によって得られる。

よって，$T^* = T^*\binom{e}{1} \cup T^*\binom{e}{0} \subset \{e\} \times T \cup \int T dq$ が成立する。(明らかなように，$\oplus$ の性質から，G^* の木は重複して生ずることはない。)

G^*第 2 段階

ここでは，$T^* \supset \{e\} \times T \cup \int T dq$ が成り立つことを示す。

まず，$\{e\} \times T \cup \int T dq$ の演算で，閉路を含むグラフは得られないことを証明する。$\int T de_i$ の演算で閉路を含むグラフが生ずるのは，次のような場合である。$t \in T$ なる t には q の要素 e_i が含まれていなかったとする。しかるに，t には e_i の両端の節点 v_i, v'_i 間に道が存在するなら，$\int t de_i$ の演算で閉路 l が生ずる。閉路 l には，q の枝が当然，偶数個存在する。それらの枝を $e''_1, e''_2, \ldots, e''_{2k}$ とする。(この中に，e_i も含まれている。)(図 3)

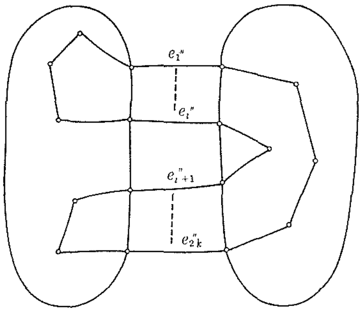


図 3　定理 1 証明のための説明図

$\int t de_i$ のグラフから，枝 e''_1 を開放除去したグラフを t'_1 とする。

$\int t de_i$ のグラフから，枝 e''_2 を開放除去したグラフを t'_2 とする。

……………………………………………

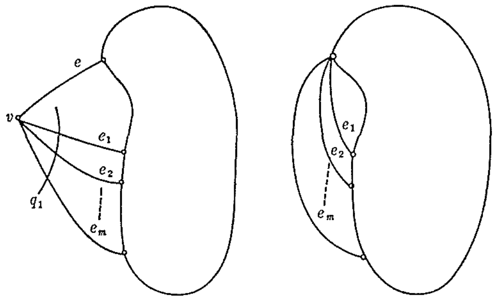
$\int t de_i$ のグラフから，枝 e''_{2k} を開放除去したグラフを t'_{2k} とする。

$t'_1, t'_2, \ldots, t'_{2k}$ の枝からなるグラフは，G において，閉路を含まず木になっている。しかも，$\int t'_1 de''_1 = \int t'_2 de''_2 = \ldots = \int t'_{2k} de''_{2k}$ であるから，$\int T de_1, \int T de_2, \ldots, \int T de_m$ によって，閉路を含む要素は偶数個生ずる。そのため，$\oplus$ の演算で，閉路を含むグラフは除去されるために，$\{e\} \times T \cup \left\{\int T de_1 \oplus \int T de_2 \oplus \ldots \oplus \int T de_m\right\}$ によって，閉路を含むグラフは得られない。すなわち，$\{e\} \times T \cup \int T dq$ の任意の要素は閉路を含まず，枝数が G^* の階数と等しくなることから，$T^* \supset \{e\} \times T \cup \int$

Tdq となる。

故に，第1段階と第2段階から，$T^* = \{e\} \times T \cup \int Tdq$ が成立する。(証明終)

[定理 2] 定理1のカットセットとして，短絡除去される枝 e の端点 v と，G^* の v 以外の節点とに節点の集合を分けるような，1–節点カットセット $\{e \cup q_1\}$ をとると，$\{e\} \times T$, $\int Tde_1$, $\int Tde_2, \ldots, \int Tde_m$ の演算で G^* の木は1回のみ生ずる。(重複しない。)(図4)

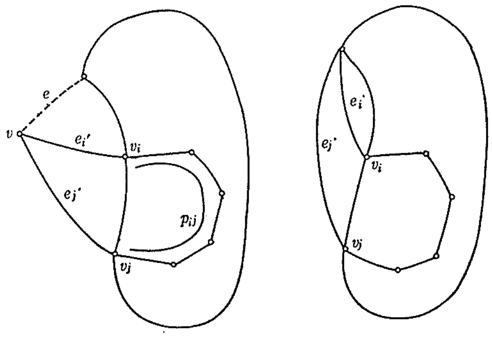


(a) グラフ G* (b) グラフ G

図4 定理2の説明のためのグラフ G* と G

(証明) G^*, G の木集合を，それぞれ T^*, T とする。e を含む木が重複しないことは，明らかであるので，$\int Tde_1, \int Tde_2, \ldots, \int Tde_m$ についてのみ考える。いま，$\int Tde_1, \int Tde_2, \ldots, \int Tde_m$ の演算で，G^* の木が2回以上生じたと仮定する。すなわち，t_i, t_j について $(t_i, t_j \in T)$ $t^* = \int t_i de_i' = \int t_j de_j'$ が G^* の木であったとする。$(e_i', e_j' \in q_1)$ この仮定より，$t_i = t' \cup e_j'$, $t_j = t' \cup e_i'$, $t^* = t' \cup e_i' \cup e_j'$ が成り立つ。$(t' \not\ni e_i', e_j')$

図5のように，e_i', e_j' の端点を，それぞれ，v_i, v_j とする。t_i, t_j は G における木であるから，t' には v_i, v_j 間に道 p_{ij} が存在する。そのため，$t^* = t' \cup e_i' \cup e_j' \supset p_{ij} \cup e_i' \cup e_j'$ となり，t^* は閉路 $(p_{ij} \cup e_i' \cup e_j')$ を含み，G^* において木でなくなる。これは，$\int Tde_1, \int Tde_2, \ldots, \int Tde_m$ で G^* の木が2個以上生じたと仮定したことによる。(証明終)



(a) グラフ G* (b) グラフ G

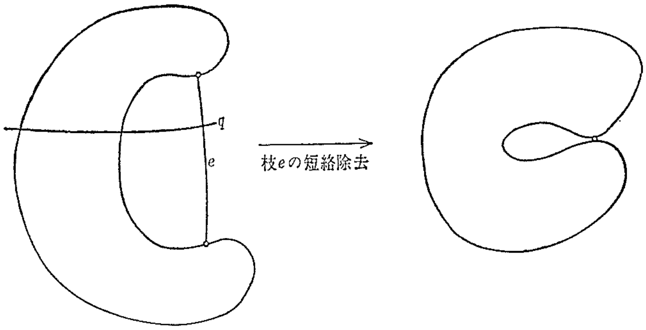
図5 定理2証明の説明図

[定理 3] 任意のグラフ G^* とし，G^* の枝集合を E とする。$E = E_y \cup E_z$, $E_y \cap E_z = \phi$ なる

ように，E が分割されているものとする。$e \in E_y$ なる枝 e を短絡除去して得られるグラフを G とする。(図 6) G^* において，e を含むカットセットから e を除いた枝を q とする。q の枝で E_y に属する枝を q_y, E_z に属する枝を q_z と表わす。($q=q_y \cup q_z$, $q_y \cap q_z=\phi$) G^*, G の混成木集合を，それぞれ，HT^*, HT とする。

$$HT^*=\{e\}\times HT \cup \left\{\int dq_y \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right\} HT$$

が成立する。



(a) グラフ G*　　(b) グラフ G

図 6 E_y の枝 e の短絡除去

(証明) G の枝集合を E' とし，G^* において E_y, E_z に含まれていた枝の集合を，それぞれ，E'_y, E'_z と表わす。明らかに，$E'_y=E_y-e$, $E'_z=E_z$ である。

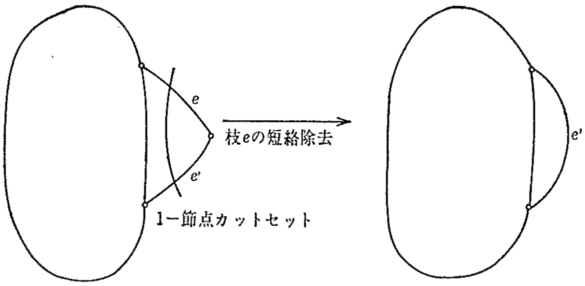
G^*, G の木集合を，それぞれ，T^*, T とする。

$$\begin{aligned}
HT^* &= T^* \ast E_z \\
&= \{T^*\tbinom{e}{1} \cup T^*\tbinom{e}{0}\} \ast E_z \\
&= \left[\{e\}\times T \cup \int T dq\right] \ast E_z \qquad (\because \text{ 定理 1 より}) \\
&= [(\{e\}\times T) \ast E_z] \cup \left[\int T dq \ast E_z\right] \\
&= [(\{e\}\times T) \ast E'_z] \cup \left[\left\{\int T dq_y \ast E'_z\right\} \oplus \left\{\int T dq_z \ast E'_z\right\}\right] \qquad (\because \ E_z=E'_z) \\
&= \{e\}\times HT \cup \left\{\int dq_y \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right\} HT \qquad \text{(証明終)}
\end{aligned}$$

定理 3 において，短絡除去する枝 e が直列枝であった場合，カットセットとして，1–節点カットセット (図 7) を考えると，$q=q_y \cup q_z=e'$ となり，HT からHT^* を求めるのに，$\oplus$ の演算を行なう必要はない。

短絡除去する枝 e が直列枝でなかった時，次の系 1 で示される演算により，$\oplus$ を除くことが可能である。

[系 1] 定理 3 における，q_y, q_z が，それぞれ，n 本の枝 $\{e_{y_1}e_{y_2}\ldots e_{yn}\}$, 及び，$m$ 本の枝 $\{e_{z_1}e_{z_2}\ldots e_{zm}\}$ からなる 1–節点カットセットであるとする。$e_{y_i}(1\leq i\leq n)$, (または，$e_{z_i}(1\leq i\leq m)$) の両端の点を v_i, v'_i とする。v_i, v'_i 間の道を $p_{ii'}$ と表わす。また，1 個の混成木 ht において，E_y, E_z の枝からなる部分グラフを，それぞれ，ht_y, ht_z と表わす。その他の記号は，全て定理 3 に一致させる。



(a)　グラフ G*　　　　　(b)　グラフ G

図 7　直列枝の短絡除去

$$\begin{aligned}HT^* = & [\{e\} \times HT] \\ & \cup [\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \{ht \cup e_{y_i} \mid ht \in HT,\ e_{y_i} \notin ht,\ e_{y_i} \in q_y,\ p_{ii'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z - ht_z)\}\}] \\ & \cup [\textstyle\bigcup_{j=1}^{m} \{ht \oplus e_{z_j} \mid ht \in HT,\ e_{z_j} \in ht,\ e_{z_j} \in q_z,\ p_{jj'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z - ht_z)\}\}]\end{aligned}$$

が成立する。

(証明)　t を G の木であるとする。$t \cup e_x$ (e_x は e_{y_i}，または，e_{z_j} を表わす。) が G^* において木であるなら，$(t \cup e_x) \oplus E_z$ は G^* において混成木となる。また，定理 2 で述べたように，$(e \cup q)$ が 1−節点カットセットであるとき，$\int Tde_{y_1}, \int Tde_{y_2}, \ldots, \int Tde_{ym}, \int Tde_{z_1}, \int Tde_{z_2}, \ldots, \int Tde_{zn}$，つまり，$\{t \cup e_x \mid t \in T,\ e_x \notin t\}$ の演算で，木は重複してあらわれない。よって，$t \cup e_x$ が G^* において木であるものについては，$\left(\int dq_y \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right) HT$ において，$\oplus$ は不要である。e_x の両端の点を結ぶ道を p とすると，$p \not\subset t$ なら，$t \cup e_x$ は G^* で木である。一方，$ht_y \cup (E_z - ht_z) = \mathcal{E}_y \cup \overline{\mathcal{E}}_z$ は，G において，木をなしているから（第 2 章参照）$p \not\subset ht_y \cup (E_z - ht_z)$ となる。ht についてのみ，$\int de_{y_i}$，または，$\frac{\partial}{\partial e_{z_j}}$ の演算をほどこすと，$\oplus$ は必要ない。よって，系 1 が成り立つ。(証明終)

同様に，短絡除去する枝 e が E_z の枝であった場合，次の定理 3′, 系 1′ が成り立つ。

[定理 3′]　短絡除去した枝 e が，E_z に属していること以外，仮定については定理 3 と全く同じである。このとき，

$$HT^* = HT \cup \left[\{e\} \times \left\{\left(\int dq_y \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right) HT\right\}\right]$$

が成立する。(証明略)

[系 1′]　短絡除去した枝 e が，E_z に属している他は，系 1 と全く同じ仮定をする。また，$E_z'' = E_z - e$ とすると，

$$\begin{aligned}HT^* = HT \cup [\{e\} \times (\{ & \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \{ht \cup e_{y_i} \mid ht \in HT,\ e_{y_i} \notin ht,\ p_{ii'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z'' - ht_z)\}\}\} \\ & \cup \{\textstyle\bigcup_{j=1}^{m} \{ht \oplus e_{z_j} \mid ht \in HT,\ e_{z_j} \in ht,\ p_{jj'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z'' - ht_z)\}\}\})]\end{aligned}$$

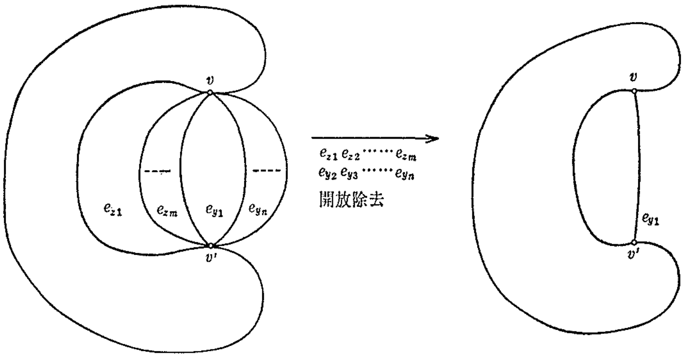
が成立する。(証明略)

[定理 4]　グラフ G^{**} の枝集合を E とし，$E = E_y \cup E_z,\ E_y \cap E_z = \phi$ なるように枝が分割されているものとする。G^{**} における枝，$e_{y_1}, e_{y_2}, \ldots, e_{yn}, e_{z_1}, e_{z_2}, \ldots, e_{zm}$ を並列枝とし，$\bar{E}_y = \{e_{y_1} e_{y_2} \ldots e_{yn}\}$，$\bar{E}_z = \{e_{z_1} e_{z_2} \ldots e_{zm}\}$ と表わす。

G^{**} から，枝 $e_{y_2}, e_{y_3}, \ldots, e_{yn}, e_{z_1}, e_{z_2}, \ldots, e_{zm}$ を開放除去したグラフを G とする。G^{**}, G における混成木集合を，それぞれ，HT^{**}, HT と表わす。このとき，

$$HT^{**}=[HT\times\bar{E}_z]$$
$$\cup\left[\cup_{i=1}^{m}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\right)\times(\bar{E}_z-e_{zi})\right\}\right]$$
$$\cup\left[\cup_{j=2}^{n}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\right)\times\{e_{yj}\}\times\bar{E}_z\right\}\right]$$

が成立する。



(a)　グラフ G**　　　　　(b)　グラフ G

図8　並列枝の開放除去

(証明) G の枝集合を E' とし，G^{**} において E_y, E_z に含まれていた枝の集合を，それぞれ，E'_y, E'_z と表わす。また，G^{**}, G の木集合を，それぞれ，T^{**}, T と書く。明らかに，$E_z=E'_z\cup\bar{E}_z$ ...① である。T^{**} は，次の4つの部分集合からなっている。

i)　G^{**} において，v,v' 間 (v,v' は e_{y1} の両端の点である。) の道が e_{y1} であるものを，T^{**}_1 とする。

ii)　G^{**} において，v,v' 間の道が $e_{y2}, e_{y3},\ldots, e_{yn}$ のいずれかであるものを，T^{**}_2 とする。

iii)　G^{**} において，v,v' 間の道が $\bar{E}_z$ の枝であるものを，T^{**}_3 とする。

iv)　G^{**} において，v,v' 間の道が $\bar{E}_y, \bar{E}_z$ の枝でないものを，T^{**}_4 とする。

一方，T は次の2つの部分集合からなっている。

i)　G において，v,v' 間の道が e_{y1} であるものを，$T(^{e_{y1}}_{1})$ とする。

ii)　G において，v,v' 間の道が e_{y1} でないものを，$T(^{e_{y1}}_{0})$ とする。

明らかに，$T^{**}_1=T(^{e_{y1}}_{1}),\ T^{**}_4=T(^{e_{y1}}_{0})$...② である。

$$\begin{aligned}HT^{**}_1&=T^{**}_1*E_z\\&=T(^{e_{y1}}_{1})*(E'_z\cup\bar{E}_z)\qquad(①\ ②\ より)\\&=\{T(^{e_{y1}}_{1})*E'_z\}\times\bar{E}_z\\&=HT(^{e_{y1}}_{1})\times\bar{E}_z\ldots③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}HT^{**}_4&=T^{**}_4*E_z\\&=T(^{e_{y1}}_{0})*(E'_z\cup\bar{E}_z)\qquad(①\ ②\ より)\\&=\{T(^{e_{y1}}_{0})*E'_z\}\times\bar{E}_z\\&=HT(^{e_{y1}}_{0})\times\bar{E}_z\ldots④\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}HT^{**}_2&=T^{**}_2*E_z\\&=(E'_z\cup\bar{E}_z)*\left[\cup_{j=2}^{n}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}T^{**}_1\right)\times\{e_{yj}\}\right\}\right]\end{aligned}$$

$$=(E'_z\cup\bar{E}_z)*\Big[\bigcup_{j=2}^{n}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}T\binom{e_{y1}}{1}\Big)\times\{e_{yj}\}\Big\}\Big]$$

$$=\bigcup_{j=2}^{n}\Big[\{e_{yj}\}\times\Big\{\frac{\partial}{\partial e_{y1}}\Big(T\binom{e_{y1}}{1}*E'_z\Big)\Big\}\times\bar{E}_z\Big]$$

$$=\bigcup_{j=2}^{m}\Big[\Big\{\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\binom{e_{y1}}{1}\Big\}\times\{e_{yj}\}\times\bar{E}_z\Big]\ \ldots ⑤$$

$$HT_3^{**}=T_3^{**}\times E_z$$

$$=(E'_z\cup\bar{E}_z)*\Big[\bigcup_{i=1}^{m}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}\Big(T\binom{e_{y1}}{1}\ \times\{e_{zi}\}\Big\}\Big]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial}{\partial e_{y1}}\{(E'_z\cup\bar{E}_z)*(T\binom{e_{y1}}{1}\times\{e_{zi}\})\}\Big]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial}{\partial e_{y1}}\{\{E'_z\cup(\bar{E}_z-e_{zi})\}*T\binom{e_{y1}}{1}\}\Big]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}\Big[\frac{\partial}{\partial e_{y1}}\{(E'_z*T\binom{e_{y1}}{1})\times(\bar{E}_z-e_{zi})\}\Big]$$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}\Big[\{\bar{E}_z-e_{zi}\}\times\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\binom{e_{y1}}{1}\Big]\ \ldots ⑥$$

③ ④ ⑤ ⑥ より

$$HT^{**}=HT_1^{**}\cup HT_4^{**}\cup HT_2^{**}\cup HT_3^{**}$$

$$=\{HT\binom{e_{y1}}{1}\times\bar{E}_z\}\cup\{HT\binom{e_{y1}}{0}\times\bar{E}_z\}$$

$$\cup\Big[\bigcup_{j=2}^{n}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\binom{e_{y1}}{1}\Big)\times\{e_{yj}\}\times\bar{E}_z\Big\}\Big]$$

$$\cup\Big[\bigcup_{i=1}^{m}\Big\{(\bar{E}_z-e_{zi})\times\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\binom{e_{y1}}{1}\Big\}\Big]$$

$$=\{HT\times\bar{E}_z\}$$

$$\cup\Big[\bigcup_{i=1}^{m}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\Big)\times(\bar{E}_z-e_{zi})\Big\}\Big]$$

$$\cup\Big[\bigcup_{j=2}^{n}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial e_{y1}}HT\Big)\times\{e_{yj}\}\times\bar{E}_z\Big\}\Big]$$

(証明終)

E_z の枝 e_{z_1} のみを残し，他の並列枝 $e_{z_2}, e_{z_3},\ldots, e_{zm}, e_{y_1}, e_{y_2},\ldots, e_{yn}$ を開放除去したとき，次の定理 4′ が成り立つ。

[定理 4′] 開放除去の結果，残った枝が e_{z_1} であること以外，定理 4 と全く同じ仮定をする。さらに，記号も定理 4 と同様とする。このとき，

$$HT^{**}=[\bigcup_{i=1}^{m}\{HT\binom{e_{z1}}{0}\times(\bar{E}_z-e_{z_i})\}]$$

$$\cup[\bigcup_{j=1}^{n}\{HT\binom{e_{z1}}{0}\times\bar{E}_z\times\{e_{yj}\}\}]$$

$$\cup[HT\binom{e_{z1}}{1}\times(\bar{E}_z-e_{z_1})]$$

が成立する。(証明略)

4. 混成木の生成法

前章で明らかにした諸定理を用いて，混成木生成の 1 つのアルゴリズムを述べる。このアルゴリズムは 2 段階に分れている。

まず，第 1 段階について説明する。与えられたグラフに，並列枝が存在した場合は，並列の部分に 1 本の枝 e_p のみを残し，他の並列枝を開放除去する。このとき，開放除去した枝 $\{e_{01}e_{02}\ldots e_{0n}\}$

と，これらの枝に並列であった枝 e_p を記憶する。(図 9 (a))

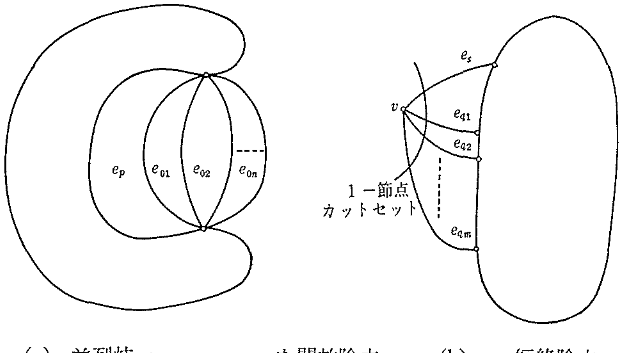
並列枝のなくなったグラフにおいて，位数（節点に接続する枝の数のことを，その節点の位数という。）が最小である節点 v に接続している枝 e_s を短絡除去する。このとき，枝 e_s と図 9 (b) のような 1–節点カットセットに含まれる枝 $\{e_{q_1}e_{q_2}\dots e_{q_m}\}$ を記憶する。枝の短絡除去によって，得られたグラフに新たな並列枝が生じた場合には，先に述べたように枝の開放除去を行なう。さらに，得られたグラフにおいて，位数の最小である節点に接続する枝を短絡除去する。

このように開放除去と，短絡除去を繰り返し行なうことにより，節点が 2 個で並列枝 $e_1'e_2'\dots e_n'$ だけからなるグラフ G' が得られる。G' の混成木集合 HT' は容易に求められる。以上が第 1 段階である。

次に第 2 段階に移る。ここでは，まず，HT' から初め，前節で述べた諸定理を用いて，零度，及び，階数の大きなグラフの混成木集合を次々と求めてゆく。この操作を繰り返すことによって，最終的には与えられたグラフの混成木集合が得られるのである。

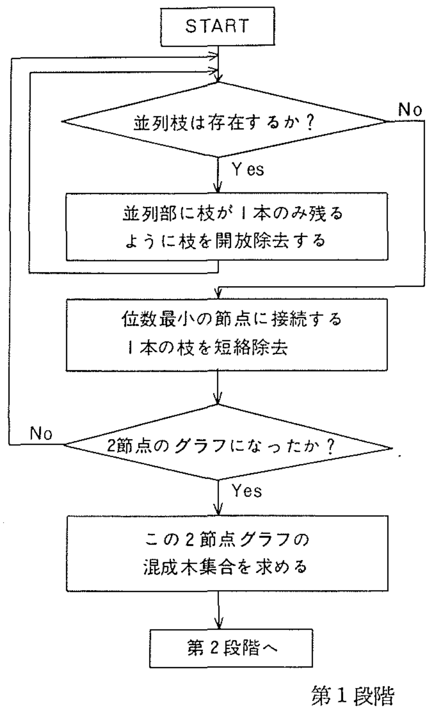
つまり，与えられたグラフを G としたとき，G の枝を短絡除去，あるいは開放除去して得られるグラフを G_1 とする。さらに，G_1 の枝を短絡除去，あるいは，開放除去してグラフ G_2 を得る。この操作を繰り返して $G_3, G_4,\dots, G_k, G'$ が得られる。G' は並列枝のみからなる 2 節点のグラフである。$G, G_1, G_2,\dots, G_k, G'$ の混成木集合を，$HT, HT_1, HT_2,\dots, HT_k, HT'$ とすると，前節の諸定理を用い，HT' から初め $HT_k, HT_{k-1},\dots, HT_1$ を次々に求め，最終的にはグラフ G の混成木集合 HT が求められるのである。

第 1 段階，第 2 段階をフローチャートの形式で示す。



(a) 並列枝 $e_{01}, e_{02},\dots, e_{0n}$ を開放除去　(b) e_s 短絡除去

図 9 並列枝の開放除去と，1–節点カットセットの記憶



第 1 段階

フローチャート 1

[演算 1] を

$$HT^* = [\{e\}\times HT] \cup \left[\left\{\int dq_v \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right\} HT\right]$$

と定義する。(定理 3 参照)

[演算 2] を

$$
\begin{aligned}
HT^* = & [\{e\} \times HT] \\
& \cup [\cup_{i=1}^{n} \{ht \cup e_{y_i} \mid ht \in HT,\ e_{y_i} \notin ht,\ e_{y_i} \in q_y,\ p_{ii'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z - ht_z)\}\}] \\
& \cup [\cup_{j=1}^{m} \{ht \oplus e_{z_j} \mid ht \in HT,\ e_{z_j} \in ht,\ e_{z_j} \in q_z,\ p_{jj'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z - ht_z)\}\}]
\end{aligned}
$$

と定義する。(e_{y_i}, e_{z_j} の両端の点を結ぶ道を，それぞれ，$p_{ii'}, p_{jj'}$ と表わす。) (系 1 参照)

[演算 3] を

$$HT^* = HT \cup \left[\{e\} \times \left\{\left(\int dq_y \oplus \frac{\partial}{\partial q_z}\right) HT\right\}\right]$$

と定義する。(定理 3′ 参照)

[演算 4] を

$$
\begin{aligned}
HT^* = HT \cup [\{e\} \times [& \{\cup_{i=1}^{n} \{ht \cup e_{y_i} \mid ht \in HT,\ e_{y_i} \notin ht,\ p_{ii'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z'' - ht_z)\}\}\} \\
& \cup \{\cup_{j=1}^{m} \{ht \oplus e_{z_j} \mid ht \in HT,\ e_{z_j} \in ht,\ p_{jj'} \not\subset \{ht_y \cup (E_z'' - ht_z)\}\}\}]]
\end{aligned}
$$

と定義する。($p_{ii'}, p_{jj'}$ は，それぞれ，e_{y_i}, e_{y_j} の両端の点の間の道であり，$E_z'' = E_z - e$ である。)
(系 1′ 参照)

[演算 5] を

$$
\begin{aligned}
HT^{**} = & [HT \times \bar{E}_z] \\
& \cup \left[\cup_{l=1}^{m} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_{y_1}} HT\right) \times (\bar{E}_z - e_{z_l})\right\}\right] \\
& \cup \left[\cup_{j=2}^{n} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial e_{y_1}} HT\right) \times \{e_{y_j}\} \times \bar{E}_z\right\}\right]
\end{aligned}
$$

と定義する。(定理 4 参照)

[演算 6] を

$$
\begin{aligned}
HT^{**} = & [\cup_{i=1}^{m} \{HT(\substack{e_{z_1} \\ 0}) \times (\bar{E}_z - e_{z_i})\}] \\
& \cup [\cup_{j=1}^{n} \{HT(\substack{e_{z_1} \\ 0}) \times \bar{E}_z \times \{e_{y_j}\}\}] \\
& \cup [HT(\substack{e_{z_1} \\ 1}) \times (\bar{E}_z - e_{z_1})]
\end{aligned}
$$

と定義する。(定理 4′ 参照)

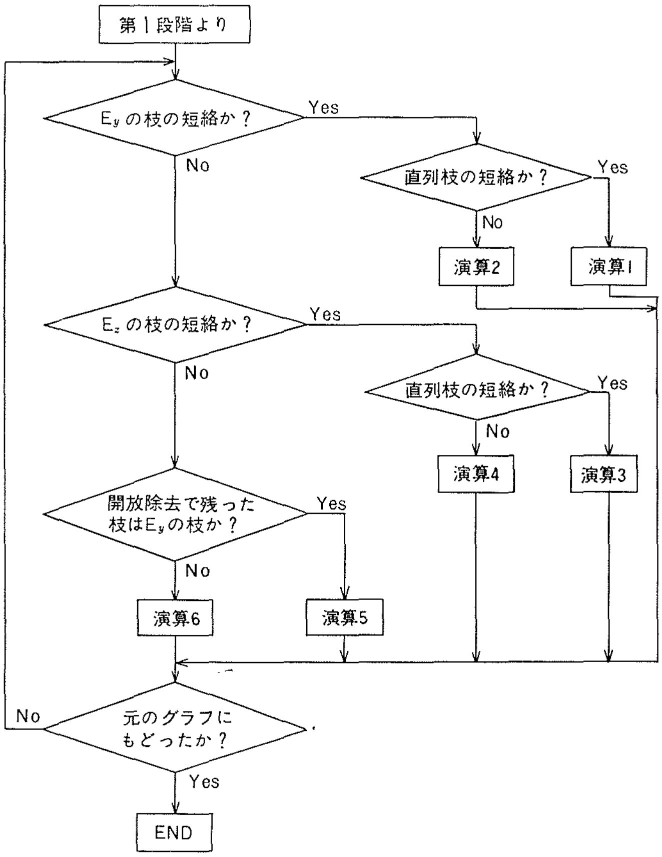
枝 e_s を短絡除去したグラフ G の混成木集合 HT から，元のグラフ G^* の混成木集合 HT^* を導くのに，e_s が直列枝であろうとなかろうと，**[演算 1]** と **[演算 3]** があれば十分である。(定理 3, 3′ 参照) HT^* を得るのに，あえて複雑な **[算演 2]**，**[演算 4]** を導入した理由を説明する。枝 e_s が直列枝であった場合，**[演算 1]**，**[演算 3]** において，⊕を行なう必要はない。しかし，e_s が直列枝でなかったときには，これらの演算において，必らず ⊕ を行なう必要がある。⊕の演算は電子計算機で処理させた場合でも，厄介な演算であり，除去する必要がある。系 1，系 1′ で述べたように，**[演算 2]**，**[演算 4]** においては，e_s が直列枝でなくとも⊕は不要である。これが **[演算 2]**，**[演算 4]** を導入した理由である。このアルゴリズムを用いて，実際のグラフで混成木集合が導かれる例を示す。

例として，グラフ G–1 の混成木集合を求める。$E_y = \{e_1 e_4 e_5 e_6\}$, $E_z = \{e_2 e_3\}$ とする。

第 1 段階

1 G–1 において，E_z の枝 e_3 を短絡除去し，グラフ G–2 を得る。e_3 の作るカットセットに属する枝は，e_1, e_2 である。$q_y(1) = \{e_1\}$, $q_z(1) = \{e_2\}$ となる。

2 G–2 において，e_6 を開放除去しグラフ G–3 を得る。このとき，E_z の枝 e_2 が残る。$\bar{E}_z(2)$



第２段階
フローチャート　2

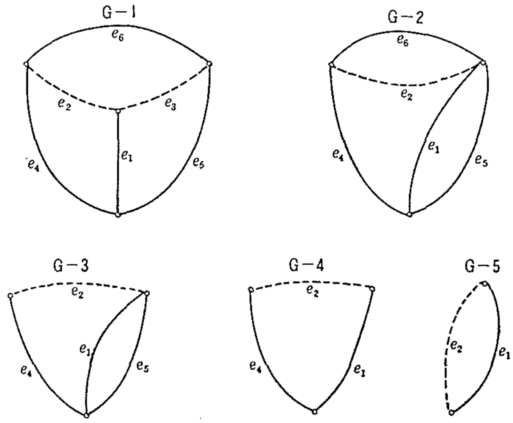


図 10　例題のグラフ

$=\{e_2\}, \bar{E}_y(2)=\{e_6\}$ が成り立つ。

3 G–3 において，e_5 を開放除去する。E_y の枝 e_1 が残り，$\bar{E}_z(3)=\phi, \bar{E}_y(3)=\{e_1e_5\}$ が成り立つ。

4 G–4 において，E_y の枝 e_4 を短絡除去する。e_4 の作るカットセットに属する枝は，e_1 である。$q_y(4)=\{e_1\}, q_z(4)=\phi$ が成り立つ。

G–5 の混成木集合は，$HT(5)=\{\phi, e_1e_2\}$ である。

第2段階

A 第1段階において，G–4 から G–5 を導くのに，E_y の直列枝 e_4 を短絡除去したから，**[演算1]** を行ない，G–4 の混成木集合 $HT(4)$ を求める。

$$HT(4)=[\{e_4\}\times HT(5)]\cup\int HT(5)de_1$$
$$=\{e_1, e_4, e_1e_2e_4\}$$

B 第1段階において，G–3 から G–4 を導くのに，枝 e_5 を開放除去し，E_y の枝 e_1 が残ったから **[演算5]** を行なう。

$$HT(3)=[HT(4)\times\bar{E}_z(3)]\cup\left[\left(\frac{\partial}{\partial e_1}HT(4)\right)\times\{e_5\}\times\bar{E}_z(3)\right]$$
$$=[HT(4)\times\phi]\cup\left[\frac{\partial}{\partial e_1}HT(4)\right)\times\{e_5\}\times\phi\right]$$
$$=\{e_1, e_4, e_5, e_1e_2e_4, e_2e_4e_5\}$$

C G–2 から G–3 を導くのに，e_6 を開放除去し，E_z の枝 e_2 が残ったから **[演算6]** を行なう。

$$HT(2)=\{e_1, e_4, e_5, e_1e_2e_6, e_2e_4e_6, e_2e_5e_6, e_1e_2e_4, e_2e_4e_5\}$$

D G–1 から G–2 を導くのに，E_z の枝 e_3（直列枝でない）を短絡除去したから，**[演算4]** を行なう。

$$HT(1)=\{e_1, e_4, e_5, e_1e_2e_6, e_2e_4e_6, e_2e_5e_6, e_1e_2e_4, e_2e_4e_5, e_1e_3e_5, e_1e_3e_6,$$
$$e_3e_4e_6, e_3e_4e_5, e_3e_5e_6, e_1e_2e_3e_4e_6, e_1e_2e_3e_5e_6, e_1e_2e_3e_4e_5\}$$

$HT(1)$ は，与えられたグラフ G–1 の混成木集合である。

5. 結　　言

与えられたグラフの混成木集合を求める，1つの新たなアルゴリズムについて，その原理を述べ実際の手順をフローチャートで示した。このアルゴリズムでは，直列枝を短絡したグラフの混成木集合から，元のグラフの混成木集合を導くのは，単に，ある枝の加除のみであり，簡単な演算で得られる。（道を求める必要がない。）また，並列枝を開放除去したグラフの混成木集合から，元のグラフの混成木集合を求めるのも容易な演算で得られる。そのため，直列枝と，並列枝が多数，存在するようなグラフにおいては，このアルゴリズムを電子計算機で処理させた場合，非常に短い演算時間で全ての混成木を求めることが可能である。この意味で，ここに述べたアルゴリズムはグラフの（構造上の）特徴を，よく利用した混成木生成法であると考えられる。

さらに，混成木集合の要素に現れる枝の延数が最小になるよう，枝を分割すると，単に木集合や補木集合を求めるより，容易に混成木集合が得られることは，十分予想される。

最後に，御討論頂いた電波伝送工学講座の諸氏に感謝の意を表します。

参　考　文　献

1) 仙石正和, 小川吉彦, 黒部貞一："混合表現グラフの木, 補木集合の代数的関係と, それらによる能動回路網解析" 信学会, 回路とシステム理論研究資料, CT 70-27 (1970-10).
2) S. L. Hakimi, D. G. Green,: "Generation and Relization of Trees and k-Trees" IEEE, CT-11, pp. 247-255 (1964-6).
3) W. Mayeda, S. Seshu,: "Generation of Trees without Duplication" IEEE, CT-12, pp. 181-185 (1965-6).
4) M. Iri,: "On the synthesis of loop and cutset matrices and related problem" RAAG Memories Vol. 4, A-XIII. pp. 4-38, (1968).