



Title	数値的逆ラプラス変換によるアーラン模型の過渡解について
Author(s)	二階堂, 正直; Nikaido, Masanao; 加地, 郁夫 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 69, 39-49
Issue Date	1973-11-15
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41189
Type	departmental bulletin paper
File Information	69_39-50.pdf



数値的逆ラプラス変換によるアーラン モデルの過渡解について

二階堂 正直* 加地 郁夫*

(昭和48年4月28日受理)

Transient Solution of Erlang's Model by Numerical Inversion of the Laplace Transform

Masanao NIKAIDO Ikuo KAJI

(Received April 28, 1973)

Abstract

In the analysis of the queuing phenomenon, the Laplace transform is a powerful tool, but in many cases its analytical inversion is difficult. Hence applications such as obtaining a time dependent solution by the Laplace transform seems to be lacking in the literature.

However, if such a numerical inversion can be obtained, an accurate transient solution may be obtained.

This paper introduces a numerical inversion technique of the Laplace transform, which involves Bellman's Method and describes its limitation by applying it to Erlang's model which has a known accurate solution.

Judging from the results of the numerical experiment, this technique is very useful in a sufficiently wide range of parameters.

1. 緒 言

輻輳現象の解析においてラプラス変換は強力な道具であるが、非常に多くの場合逆ラプラス変換を解析的に求めることの困難さのために、理論上の場合を除いて実際的に時間依存解をラプラス変換を用いて求めることは余りこころみられていない。ラプラス変換による解析と適切な数値的逆ラプラス変換の手法を組合せることによって、精密な過渡解を効率的に求めることができるが、本研究では精密解が複雑であるが既知であるアーランモデルの場合をとり上げて、ベルマンの数値的逆ラプラス変換の方法に基く手法を導き、その使用限界を数値実験によって明らかにすることを意図したものである。その検討の結果、十分広いパラメータ範囲にわたって本手法は十分使用にたえるものであることが判明した。

2. 数値的逆ラプラス変換の理論の要約¹⁾

$u(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると $F(s)$ は

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \quad (2-1)$$

積分区間を有限にするために $x = \exp(-t)$ と変数変換すると (2-1) 式は

* 電気工学科 系統工学講座

$$\int_0^1 x^{s-1} u(-\log x) dx = F(s) \quad (2-2)$$

となる。

さらに $g(x) = u(-\log x)$ とおいて

$$\int_0^1 x^{s-1} g(x) dx = F(s) \quad (2-3)$$

$u(t)$ を十分なめらかな関数であるとする。と求積式は十分良い精度で

$$\int_0^1 g(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i g(x_i) \quad (2-4)$$

と表わせる。

ただし、 x_i は shifted ルジャンドル多項式 $P_N^*(x)$ の零点である。

$$P_N^*(x) = P_N(1-2x)$$

$$P_N(r) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dr} \right)^n (r^2 - 1)^n$$

w_i は N 個の重み係数で次式で与えられる。

$$w_i = \int_{-1}^1 \frac{P_N(r)}{(r-r_i)P_N'(r_i)} dr$$

(2-4) 式を用いると (2-3) 式は

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i^{s-1} g(x_i) = F(s)$$

$$s = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

これは N 個の未知関数 $g(x_i)$ に対する N 元連立方程式である。

$s-1$ を実数 k ($k=0, 1, \dots, N-1$) で置き換えると

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i^k g(x_i) = F(k+1) \quad (2-5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$g(x_j)$ について求めると

$$g(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k+1) \frac{q_{kj}}{w_j} \quad (2-6)$$

$$t = -\log x_j$$

ここで q_{kj} は多項式

$$f_j(x) = \frac{P_N^*(x)}{(x-x_j)P_N^*(x_j)}$$

の k 次の項の係数である。

次にスケール変換について述べる。

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt = F(s)$$

$$L\{u(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-s t/a} u(t) dt = \frac{F(s/a)}{a}$$

よって

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i^{s-1} u(-a \log x_i) = \frac{F(s/a)}{a} \quad (2-7)$$

$$t = -a \log x_i$$

3. アーラン模型の解について

待合せ系の中で最も単純で基本的な構造を持つのがアーラン模型である。

3.1 構造

- (1) 先着順サービス規準をとる。
- (2) 単一サービス窓口，単一待行列の立場をとる。
- (3) 単位は平均サービス率 μ の指数型サービス分布に従ってサービスを受ける。
- (4) 単位の系への到着はパラメータ λ のポアソン過程に従う。

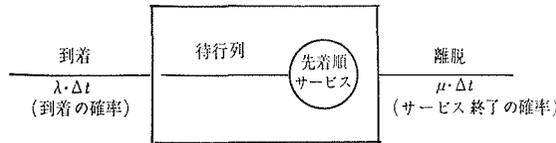


図 0-1 アーラン待合せ系

時刻 t に n コの単位が待合せ系の中に存在する確率を $P_n(t)$ とすると $P_n(t)$ は次の方程式を満たす。

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\{1 - (\lambda + \mu)\Delta t\} + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_{n+1}(t)\mu\Delta t + O(\Delta t^2) \quad n \geq 1 \quad (3-1)$$

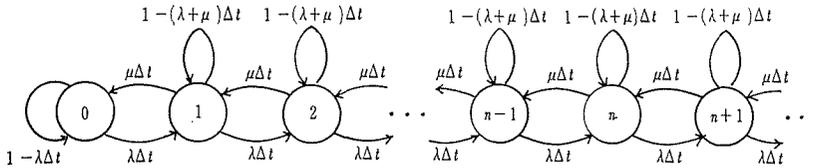


図 0-2 アーラン模型の推移図

(3-1) 式から次式を得る。

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \quad n=0$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (3-2)$$

$P_n(t)$ の母関数を $P(z, t)$ とすると

$$P(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n \quad (3-3)$$

(3-2) 式の両辺に z^{n+1} を掛けて n について加わえ合せ整理すると

$$z \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = (1 - z)[(\mu - \lambda z)P(z, t) - \mu P_0(t)] \quad (3-4)$$

を得る。

サービス開始時点に待ち行列の中に i コの単位がいたとすると $P_i(0) = 1$ で $P_n(0) = 0, n \neq i$ であるから

$$P(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)z^n = z^i \quad (3-5)$$

(3-5) のラプラス変換を行い，母関数の性質を利用して $P_n^*(P_n$ のラプラス変換) を求めると $n \geq i$ に対して

$$P_n^*(s) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\alpha_1^{n-i+1}} + \frac{\mu/\lambda}{\alpha_1^{n-i+3}} + \frac{(\mu/\lambda)^2}{\alpha_1^{n-i+5}} + \dots + \frac{(\mu/\lambda)^i}{\alpha_1^{n+i+1}} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(\mu/\lambda)^k}{\alpha_1^k} \right] \quad (3-6)$$

但し

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu + s + \sqrt{(\lambda + \mu + s)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

第1種変形ベッセル関数 I_n を用いることによって (3-6) の逆ラプラス変換を行って整理すると

$$P_n(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left[\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{i-n} I_{n-i}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^{i-n+1} I_{n+i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^k I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t) \right] \quad (3-7)$$

(3-7) 式は n が整数の場合、第1種変形ベッセル関数の性質 $I_n = I_{-n}$ によって $n \geq i$ および $n < i$ について成立する。

以上は文献2)の要約であるが、以下アールン模型の理論的考察および数値的逆ラプラス変換の適用のために必要な変形を行った。

最初に (3-6) 式, (3-7) 式に対して $\tau = \lambda t$ なる正規化を行う。

(3.6) 式について $\hat{P}_n(\tau)$ を求める正規化後の関数とし

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(\tau) &\triangleq P_n(\tau/\lambda) = P_n(t) \\ L[\hat{P}_n(\tau)] &= \hat{P}_n^*(s) \end{aligned}$$

と定義すると

$$\hat{P}_n^*(s) = \int_0^{\infty} \hat{P}_n(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$\tau = \lambda t$ を代入して

$$\begin{aligned} &= \lambda \int_0^{\infty} \hat{P}_n(\lambda t) e^{-s\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^{\infty} P_n(t) e^{-s\lambda t} dt \\ &= \lambda P_n^*(s\lambda) \end{aligned} \quad (3-8)$$

よって (3-8) 式および $\rho = \lambda/\mu$ (但し, ρ はトラフィック強度と呼ばれ, 単位時間の中に占める全サービス時間の割合すなわち, サービス施設の利用率を表わす。) を (3-6) 式に適用すると,

$$\hat{P}_n^*(s) = \frac{1}{\alpha_1^{n-i+1}} + \frac{(1/\rho)}{\alpha_1^{n-i+3}} + \frac{(1/\rho)^2}{\alpha_1^{n-i+5}} + \dots + \frac{(1/\rho)^i}{\alpha_1^{n+i+1}} + \rho^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^k}{\alpha_1^k} \quad (3-9)$$

但し

$$\alpha_1(s) = \frac{1 + 1/\rho + s + \sqrt{(1 + 1/\rho + s)^2 - 4(1/\rho)}}{2}$$

(3-7) 式には $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ を適用して

$$P_n(\tau) = e^{-(1+1/\rho)\tau} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)^{i-n} I_{n-i}\left(2\sqrt{\frac{1}{\rho}}\tau\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)^{i-n+1} I_{n+i+1}\left(2\sqrt{\frac{1}{\rho}}\tau\right) + (1-\rho)\rho^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right)^k I_k\left(2\sqrt{\frac{1}{\rho}}\tau\right) \right] \quad (3-10)$$

又, (3-9) は $n \geq i$ についての式であるから $n < i$ についての式を求めると

$$\hat{P}_n^*(s) = \frac{(\mu/\lambda)^i}{\alpha_1^{n+i+1}} + \frac{(\mu/\lambda)^{i-1}}{\alpha_1^{n+i-1}} + \dots + \frac{(\mu/\lambda)^{i-n}}{\alpha_1^{n-n+1}} + \rho^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^k}{\alpha_1^k} \quad (3-11)$$

(2-7) 式のスケール変換を (3-9) 式に適用すると

$$\hat{P}_n^*(s)/a = \frac{1}{\alpha_1^{n-i+1}} + \frac{(1/\rho)}{\alpha_1^{n-i+3}} + \frac{(1/\rho)^2}{\alpha_1^{n-i+5}} + \dots + \frac{(1/\rho)^i}{\alpha_1^{n+i+1}} + \rho^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^k}{\alpha_1^k} \quad (3-12)$$

但し

$$\alpha_1(s) = \frac{1 + 1/\rho + s + \sqrt{(1 + 1/\rho + s)^2 - 4(1/\rho)}}{2}$$

$$s = 1/a, 2/a, \dots, N/a$$

これは $\hat{P}_n(a\tau)$ のラプラス変換した式である。(3-11) についても同様に求まるので省略する。

4. 計算結果ならびに考察

今後の説明を簡単にするために解析的逆ラプラス変換による方法を A 方法, 数値的逆ラプラス変換による方法を B 方法と呼ぶことにする。

A 方法による式 (3-10) の右辺の [] 内第 3 項の \sum 内は相対増加率が 0.001% 以下になったとき計算を打切った。第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ の精度^{3,4,5)}は $|n| < 10, |x| < 10.0$ で有効数字 7~8 桁, $|n| > 10$ または $10.0 < |x| < 100$ では有効数字 5~7 桁である。

B 方法による計算は全て倍精度で行い, 式 (3-12) の右辺の \sum 内の計算は相対増加率が 10^{-8} % 以下で打ち切った。

なお, 計算には北大大型計算機センター FACOM 230-60 を利用し, FÖRTRAN 言語を使った。

数値計算の結果得られたデータを図 1~図 16 に示す。

各図中の実曲線は A 方法によるもので, 各種記号が B 方法によって計算されたデータである。各図中のパラメータおよび記号の意味を次に示す。

(1) パラメータ

- n : システムに存在する単位の数
- i : $\tau=0$ でシステムに存在する単位の数
- ρ : トラフィック強度
- a : B 方法におけるスケール変換の倍率
- N : B 方法におけるルジャンドル関数の根の数
- τ : 正規化された時刻 $\tau = \lambda t$ (但し, t は実時間で λ は到着率)
- $P_n(\tau)$: 時刻 τ に待ち合せ系に単位が n コ 存在する確率

(2) 記号

表 0 を参照のこと。

表 0 記号と倍率 (a)

右記の図を除く全ての図に対して	記号	倍率(a)	図 4・9・12 に対して	記号	倍率(a)
	●	0.5		●	0.5
	○	1		○	0.25
	△	2		▲	0.1
	◎	3		×	0.01
	▲	5			
	×	10			

なお今回はアーラン模型の最基本型である $n=0, i=0$ を前提条件として解析した。(但し, $n=0, i=3$ の場合も一部説明のため載せた。)

4.1 B 方法自身のパラメータによる影響

(1) スケール変換の倍率 (a) について

$i=0, n=0, N=15, \rho=0.1$ (図1) の場合, 倍率が0.5と1ではA方法による解である実曲線からの隔りが無く(有効数字3桁の精度では)安定であるが, $a=2, 10$ と倍率が大きくなるに従って実曲線を中心とした振動が大きくなっている。次に根が少ない $N=7$ (図2), $N=4$ (図3) の場合, $a=10$ で各々 $\tau=0.2\sim 0.3, \tau=0.7\sim 0.8$ の近辺で不安定となっている。 $\rho=0.5$ の場合(図

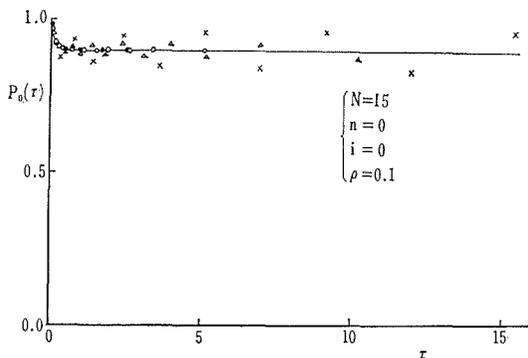


図 1

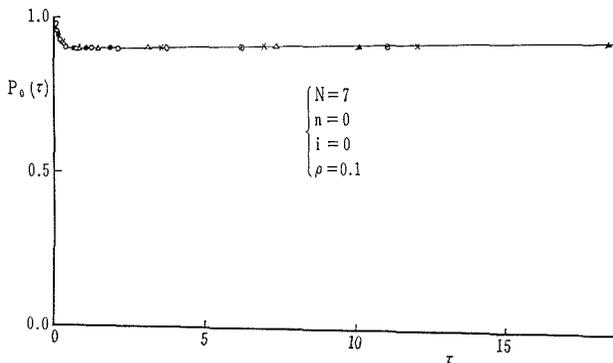


図 2

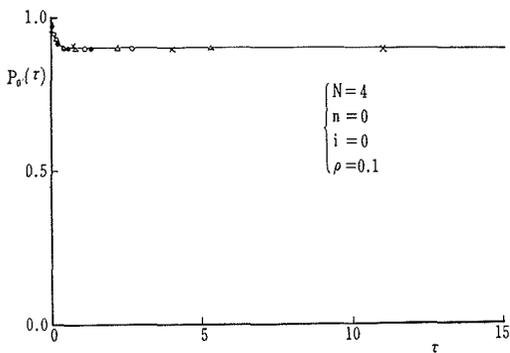


図 3

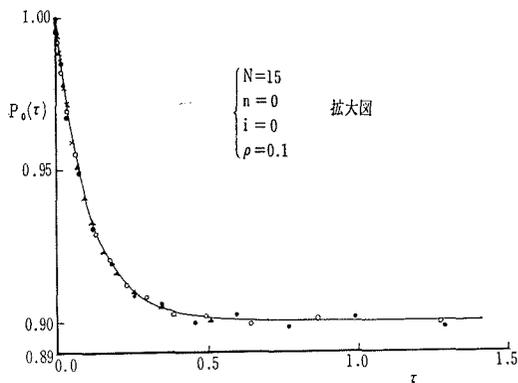


図 4

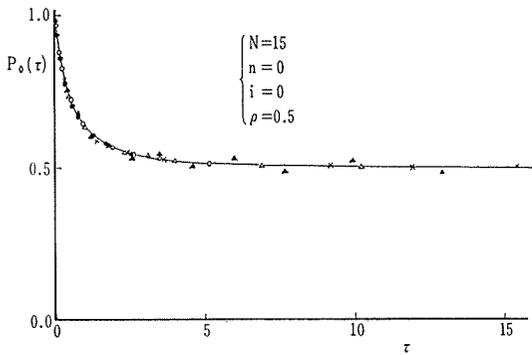


図 5

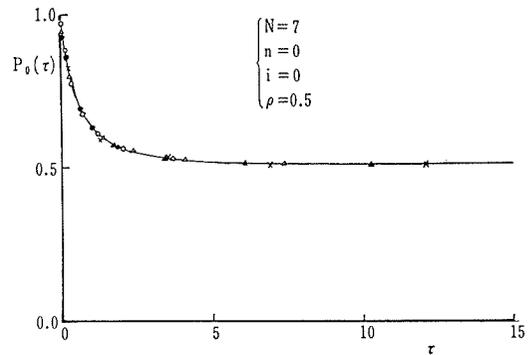


図 6

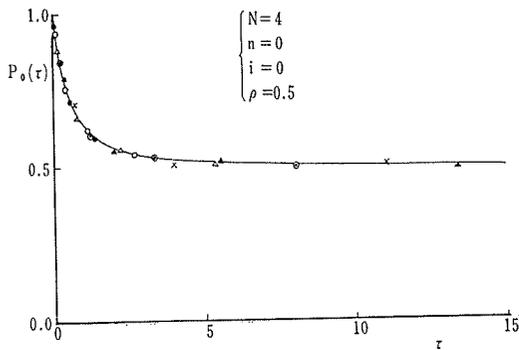


図 7

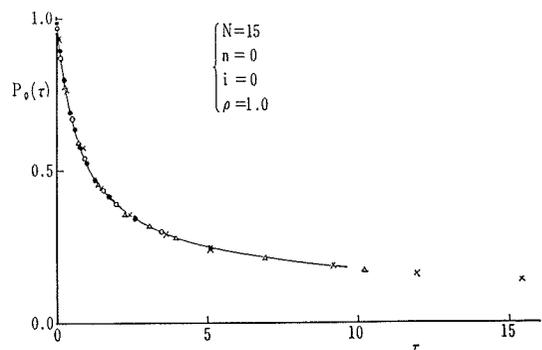


図 8

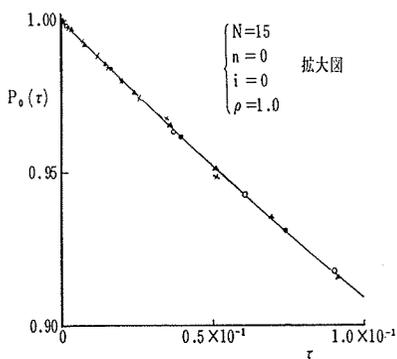


図 9

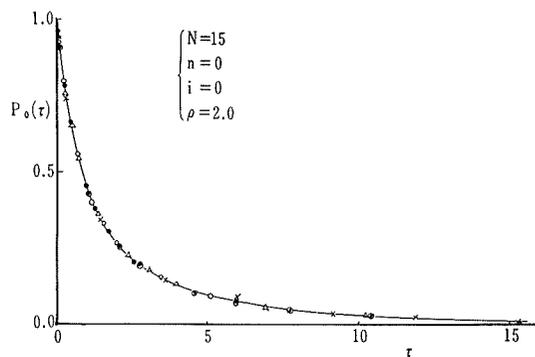


図 10

5, 6, 7) は $\rho=0.1$ の場合よりも安定な点が多いが同様な傾向が見られる。しかし, $N=15$ (図 5) では $a=5$ が $a=10$ より不安定となっている。 $\rho=1.0, 2.0$ の場合 (図 8, 図 10) いずれも $a=10$ で不安定な点があるが, 他の倍率では安定である。 $\rho=10$ (図 11) では全ての倍率で ($a=10$ でさえも) 安定である。

以上の考察から一般的にはスケール変換を 1 より増加させると不安定となる傾向が見出された。

一方縮少倍率の場合 (既に 0.5 の場合は考察済みだが比較の意味新たに考察する。) $\rho=0.1$ (図 4) では縮少率が高くなる程, 安定性が増している。 $\rho=1.0$ (図 9) では $a=0.01$ で他の倍率の点と比べて若干不安定な点があり, $\rho=10.0$ (図 12) では $a=0.5, 0.25$ が安定で $a=0.1, 0.01$ でやや不安定である。

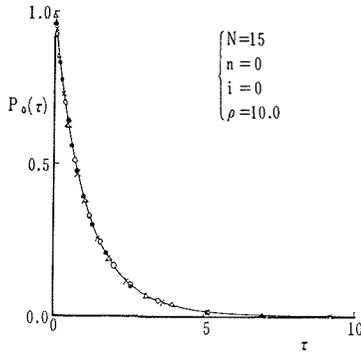


図 11

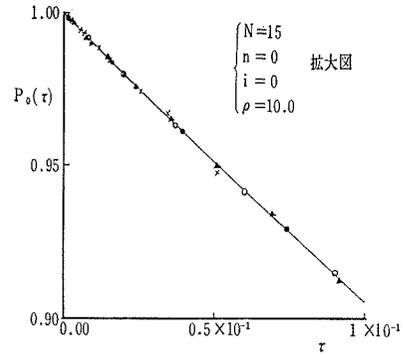


図 12

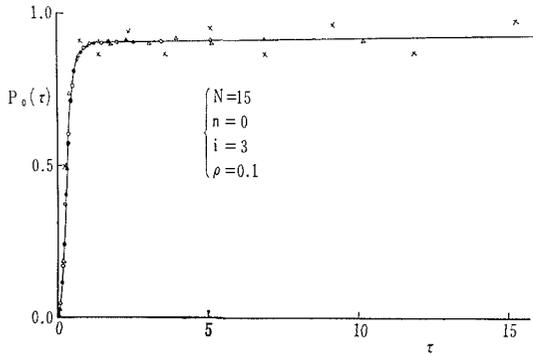


図 13

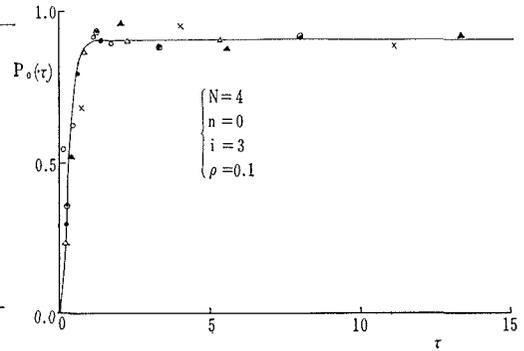


図 14

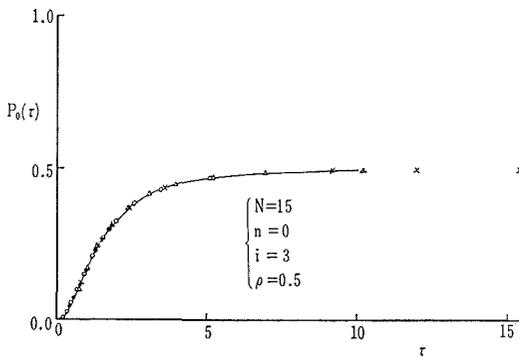


図 15

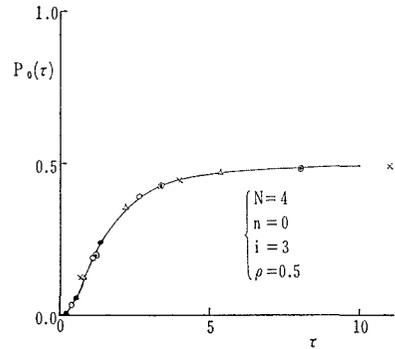


図 16

すなわち、最も安定なデータの得られる倍率（縮少率も含む）は ρ に依存して決まることが判明した。これに関する考察は 4.3, 4.4 へ引き継がれる。

なお、縮少倍率に関する図はいずれも一般倍率の図の 10 倍の拡大図であるから、他の図と同様に有効数字 3 桁まで見ると十分安定な曲線が得られることになる。

(2) 根の数 (N) について

$\rho=0.1$ (図 1, 2, 3) については根の数が少ない方が安定であるように見える。 $\rho=0.5$ については根の数が多の方が安定である。 $n=0, i=3, \rho=0.1$ (図 13, 14) については $N=4$ の方が $a=1$ から大きく不安定になるが、 $N=15$ では不安定性は $N=2$ から始まり、そのバラつき方も小さい。 $\rho=0.5$ に関しても根の数が少ない方が不安定と言え。すなわち、スケール変換は本来、根の

数だけのデータから内挿的, 外挿的に多くの未知のデータを得るものであるため変化の大きい曲線 ($n=0, i=3, \rho=0.5$) に対しては誤差が大きくなると考えられる。

結論として変化の少ない曲線に対しては根の数が少なくともスケール変換で補えばよいが, 一般的には根の数が多し程データの補充のため倍率をより高くする必要もないし, 理論的にも安定性が増すと言える。

4.2 アーラン模型のパラメータによる影響

(1) トラフィック強度 (ρ) について

4.1 (1) で既に見て来たように ρ の値が大きくなるに従って安定性が増すことが分る。

(2) 系中に存在する単位の数 n と $\tau=0$ での単位の数 i について

これについては $n=0, i=3$ についてだけのデータ (図 13~図 16) があるが, $n=0, i=0$ の場合と ρ, a に関してはほぼ同様な傾向が見られる。根の数に関しては $n=0, i=0$ の場合よりも変化の大きい曲線となったため根の数が多し方が安定性が高いことを明白に表わしている。予想としては n, i の変化にもかかわらず $n=0, i=0$ の場合も同様の結果になることが考えられるが, n, i をパラメータとして種々の計算を行い実証することが必要であると思われる。

4.3 モデル式の s, ρ に対する極限特性

(3.12) 式から

$$\lim_{s \rightarrow 0} \alpha_1(s) = \frac{1 + 1/\rho + (1 - 1/\rho)}{2} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \rho^{n+1} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^k}{\alpha_1^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^{k-n-1}}{\alpha_1^k} = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i+2} + \dots$$

よって

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{P}_n^*(s)/a = 1 + \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i+2} + \dots \quad (4-1)$$

又

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \alpha_1(s) = \frac{1 + s + 1 + s}{2} = 1 + s$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \frac{(1/\rho)^k}{\alpha_1^k} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1/\rho)^{i+1}}{\alpha_1^{n+i+2}} + \frac{(1/\rho)^{i+2}}{\alpha_1^{n+i+3}} + \dots \right\} = 0$$

よって

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \hat{P}_n^*(s)/a = \frac{1}{(1+s)^{n-i+1}} \quad (4-2)$$

(4-1) 式は s が十分小さい (または倍率 a が十分大きい) とき $1 < \rho$ なら収束し, $\rho \leq 1$ なら発散することを示す。すなわち, 倍率 a が十分大きいときは (4-1) 式が大変大きな値となり, 逆変換したときそのエラーが増幅されて出てくることになって不安定となることを表わしている。実用上は $\rho > 1$ なら倍率がいくら大きくても収束するので (収束値は (4-2) 式から得られる。) 問題ないが $\rho \leq 1$ の場合, (4-1) 式が成立しない程度に倍率を決める必要がある。

$s \rightarrow \infty$ および $\rho \rightarrow 0$ に関しては (3-12) 式は 0 に収束するので問題ないと考える。

4.4 モデル式の s, ρ に対する一般特性

(3.12) 式における主な頂は B 方法自身のパラメータ s とモデル自身のパラメータ ρ によって決まる $1/\rho$ である。そこで, これら 2 頂の比 $s/(1/\rho)$ が大きい程, B 方法の特徴が生かされると同時に 4.3 で述べられた理論も満足されるのでより安定になるのではないかと仮定し, 得られたデータを整理し調べた結果が表 1 である。表 1 は図 1~図 16 で示した図を観察することによって得られた結果なので, 全てに安定性の順序をつけることができなかつたが, その傾向が次の

表1 B方法自身のパラメータ s/a とアラン模型のパラメータ $1/\rho$ との比と安定性
 $n=0, i=0, s=\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \dots, \frac{15}{a}$, 安定性の欄には各 ρ 毎に安定度の高い順に番号を
 付ける。

ρ	a	$s/(1/\rho)$	安定性	図番号	全ての判定困難な場合 の安定性の相対的比較
0.1	0.01	10.0 ~ 150.0	1	4	
	0.1	1.0 ~ 15.0	2		
	0.25	0.4 ~ 6.0	3		
	0.5	0.2 ~ 3.0	4	1, 4	
	1.0	0.1 ~ 1.5	5	1	
	2.0	0.05 ~ 0.75	6		
	10.0	0.01 ~ 0.15	7		
0.5	0.5	1.0 ~ 15.0	1	5	
	1.0	0.5 ~ 7.5	2		
	2.0	0.25 ~ 3.75	3		
	5.0	0.1 ~ 1.5	5		
	10.0	0.05 ~ 0.75	4		
1.0	0.01	100.0 ~ 1500.0	4	9	グラフ上では0.1, 0.25, 0.5のいずれが一番安定 か判定できない。
	0.1	10.0 ~ 150.0			
	0.25	4.0 ~ 60.0			
	0.5	2.0 ~ 30.0		8, 9	
	1.0	1.0 ~ 15.0	5	8	
	2.0	0.5 ~ 7.5	6		
	10.0	0.1 ~ 1.5	7		
2.0	0.5	4.0 ~ 60.0		10	
	1.0	2.0 ~ 30.0			
	2.0	1.0 ~ 15.0	3		
	3.0	0.67 ~ 10.0	4		
	10.0	0.2 ~ 3.0	5		
10.0	0.01	1000.0 ~ 15000.0		12	$0.25 > 0.1 > 0.01$ \leftarrow 安定性が増す。 $0.5 > 1.0 > 2.0$ $10.0 > 1.0$
	0.1	100.0 ~ 1500.0			
	0.25	40.0 ~ 600.0	2		
	0.5	20.0 ~ 300.0	1	11, 12	
	1.0	10.0 ~ 150.0		11	
	2.0	5.0 ~ 75.0	7		
	10.0	1.0 ~ 15.0			

様なものであることが分る。 $\rho=0.1$ では $s/(1/\rho)$ が大きい程、安定性が増す。 $\rho=0.5$ でも $a=5$ と $a=10$ の場合の順序が逆になっている以外は $\rho=0.1$ と同様の傾向がある。

$\rho=10$ では $s/(1/\rho)$ が 20~300 と言う $\rho=10$ の全体から見ると中間の数値で安定性が一番高い。以上から、 $s/(1/\rho)$ を独立変数とする安定性を表わす関数がある定められた ρ で a に対して単調減少、またはいくつかの極大値を持つことを推測させる。

4.5 計 算 時 間

結果を表 2 に示す。

平均すると B 方法は A 方法より 2.66 倍速いことになる。

表 2 計 算 時 間

	データ総数 (個)	コンパイル 時間 (MS)	プログラム実行 時間 (MS)	プログラム実行時間 ÷データ総数 MS/個
A 方 法	804	6691	24495	30.47
	2596	6640	166189	66.32
	3039	6867	173143	56.94
	8697	6737	666028	76.58
B 方 法	44	7074	1127	25.61
	240	6964	6577	27.40
	420	7182	8241	19.62
	900	7045	12612	14.01

5. 結 言

4.4 で述べたような“手法自身のパラメータとモデル自身のパラメータとの数値的大きさ関係”から B 方法の安定性を一般のモデルに対しても定義できれば計算前にその安定性を知ることが出来、B 方法が大変使い易いものとなる。そのためには i , n をパラメータとして A 方法による解との差を求め統計的に処理し考察するばかりでなく、2, 3 の異ったモデルに対しても同様の数値実験を行う必要があるだろう。

また、単純にルジャンドルの根を(今のところ 15 コが最大数)増すことも 1 方法であるが、根の増加率に対して $\tau = -\log x$ の増加率すなわち x の減少率は減少する傾向にあり、何+何百次元の根を求める際の累積誤差を考えるとあまり有効ではない。

一方、実用的には不安定な場合でも解は実曲線を中心としてほぼ均等にバラついているので、最小 2 乗法などを使うことによって解の傾向を十分知ることができると考える。

なお今後、解析的逆ラプラス変換が不可能なサービス窓口が複数個の待ち合せ系に B 方法を適用し、上記事項と合わせて検討を進めて行く予定である

最後に、資料作成に当り、御協力頂いた大学院生渡辺俊明氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Bellman, R. E., R. E. Kalaba and J. Lockett: Numerical Inversion of the Laplace Transform, (1966), New York American Elsevier Publishing Company, Inc.
- 2) Saaty, T. L.: Elements of Queueing Theory, (1961), p. 88-96, McGram Hill.
- 3) 雨宮綾夫, 田口武夫: 数値解析と FORTRAN (1969) 丸善。
- 4) 牧之内三郎: 漸化式を用いる $I_n(x)$ の近似計算, 情報処理 vol. 6, No. 5, Sept. (1965) p. 247-252.
- 5) 山内, 森口, 一松: 電子計算機のための数値計算法 (昭 43) p. 103-121 培風館。
- 6) 猪瀬 博編: 岩波講座 基礎工学 21 システム工学 III, (1969), 岩波書店。