



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	表面弾性波の非調和減衰
Author(s)	佐久間, 哲郎; Sakuma, Tetsuro; 中山, 恒義 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 70, 63-71
Issue Date	1974-02-20
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41192">https://hdl.handle.net/2115/41192</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	70_63-72.pdf



# 表面弾性波の非調和減衰

佐久間哲郎\* 中山恒義\*

(昭和48年7月31日受理)

## Anharmonic Damping of Surface Elastic Waves

Tetsuro SAKUMA Tsuneyoshi NAKAYAMA

Department of Engineering Science, Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, Sapporo

### Abstract

The frequency and temperature dependence of the attenuation rate of Rayleigh waves by cubic anharmonic terms in elastic energy is investigated by means of the quantum-mechanical perturbation theory. The damping mechanism considered in this paper is the interaction between the Rayleigh wave and the two bulk thermal phonons. Within a limit where the energy of thermal phonons is much larger than that of Rayleigh waves, it is found that the attenuation rate of the Rayleigh waves is proportional to  $T^4$  but independent of the frequency.

### 1. はじめに<sup>1)</sup>

1885年 Lord Rayleigh<sup>2)</sup>は、半無限弾性体と真空あるいは空気の境界を有する固体において、表面にそって伝播する弾性波が存在することを理論的に明らかにした。この波がいわゆる Rayleigh 波といわれる表面弾性波\*であり、地球表面を伝播する地震波の基本的性質をそなえているため、この波の性質は地震学の分野で主に研究が重ねられてきた。ところで表面弾性波に対して固体中を伝播する弾性波をバルク波というが、最近表面弾性波が従来のバルク波にとって代り固体エレクトロニクスの分野において非常に重要であることが認められ、その研究が急速に発展してきた\*\*。特に信号処理機構としてバルク波の代りに表面弾性波を用いることにはいくつかの顕著な有利さがある。まず表面波はバルク波と異なり伝播路上の任意の場所において信号を抽出(タッピング)することが可能である。これに加えて音波⇄電磁波変換器の挿入損失がバルク波に比べて非常に小さい。また電子デバイスの固体化、小型化という観点ともよくマッチしている。

この様に表面弾性波を信号処理機構として利用するためには、入力としての表面弾性波がそのエネルギーをできるだけ失わず、持続的に固体の表面を伝播することが望ましいが、必ず種々の要因を通じて不必要な減衰をおこす。絶縁体における表面弾性波の減衰の主な要因としては、固体表面の粗さやよごれにとまらうもの、表面に吸着した原子による密度の不均一さによる

\* 工業数学講座

\* 以下、“表面弾性波”は Rayleigh 波そのものを意味するものとする。

\*\* 超音波の代表的な応用としては、超音波加工機や洗浄器のように比較的低周波の音波のパワーを利用するものと、遅延素子や記憶素子のように比較的高周波の情報伝達機能を利用するものとの二つに大別される。

もの、また弾性的性質の不連続性にともなるもの等が挙げられる。これらの表面波散乱の要因はある程度まで試料作製時における技術的問題として解決し得るものである。しかしながら一方において、技術的問題としては本質的に除くことの出来ない音波自身の非調和性（非線形性）による減衰の要因も存在する事が知られている。

バルク超音波において、固体の弾性エネルギーの非調和項に起因する超音波の減衰は、入射する超音波の角周波数を  $\omega$ 、熱的に励起されているフォノンの緩和時間を  $\tau$  とすると、 $\omega\tau > 1$  の条件が成立する領域においては量子力学的に Landau と Rumer<sup>3)</sup> により理論的に考察され Landau-Rumer 損失と呼ばれている。また  $\omega\tau < 1$  の領域においては熱フォノンを量子として扱うことが出来ないけれども Akhieser<sup>4)</sup> 及び Woodruff と Ehrenreich<sup>5)</sup> 等はフォノンの粘性模型の考えにしたがってこの領域のバルク超音波の減衰を考察した。これは Akhieser 損失と呼ばれている。

表面弾性波においては、 $\omega\tau < 1$  の領域において Maris<sup>6)</sup> 及び King と Sheard<sup>7)</sup> によりフォノン粘性模型の立場から理論的に研究された。

また  $\omega\tau > 1$  の領域における理論的考察は格子力学の手法に従い Mardudin と Mills<sup>8)</sup> によりなされた。しかしながらバルク弾性波における Landau-Rumer 理論に対応する表面弾性波に対する量子力学的な理論的考察はまだなされていない。ここ数年、表面弾性波の非調和減衰の実験が報告されはじめており<sup>9),10),11)</sup>、従って  $\omega\tau > 1$  の領域における量子論に基いた理論的考察を行なうことは極めて重要であるという事が出来よう。

本論文は、表面弾性波の非調和減衰を量子力学的摂動論に従って考察し、減衰率の周波数依存性及び温度依存性を導くことを目的としている。以下、第2章では表面弾性波の量子化について述べ、第3章では弾性エネルギーの非調和項を導入する。第4章では摂動論にもとづいて表面弾性波の非調和項による減衰率の計算を行う。結論は第5章で与えられる。

## 2. Rayleigh 波とその量子化

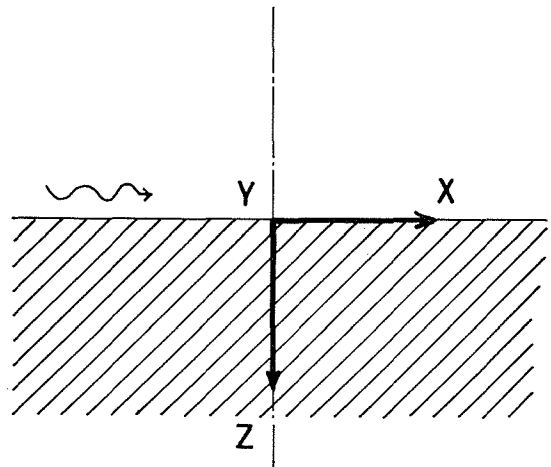
均質で等方的な弾性体と真空が空間を2分して作る無限平面の境界上を伝播する表面波を考えよう。第1図の如く境界面を  $x-y$  平面にとり、弾性体媒質は  $z > 0$  に存在するとする。境界表面を自由表面（表面における応力の法線成分が零）とした時、空間座標  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  における変位ベクトルを  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  とすると、よく知られているように Rayleigh 波は次のように表わされる<sup>12)</sup>。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_{\perp}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} i \frac{\mathbf{k}}{k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho K}} \cdot \left\{ e^{-\gamma k z} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\gamma k z} \right\} \cdot \left\{ a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\omega t} - c.c. \right\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_{\perp}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\mathbf{k}} \gamma \mathbf{n} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho K}} \cdot \left\{ e^{-\gamma k z} - \frac{2}{1+\gamma^2} e^{-\gamma k z} \right\} \cdot \left\{ a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\omega t} + c.c. \right\}. \quad (2.3)$$

ただし上式において  $\mathbf{k}$  は表面に平行な波数ベクトル、 $\boldsymbol{\rho}$  は  $\mathbf{x}$  の  $(x, y)$  平面への射影ベクトル、



第1図 座標系

$\mathbf{n}$  は  $z$  軸方向の単位ベクトル,  $a_k$  及び  $a_k^*$  は振幅を表わす複素数,  $\gamma$  及び  $\eta$  は固体の弾性定数によって定まる正数,  $\rho$  は固体の密度である。また  $K$  は次のように与えられる。

$$K = \left\{ \frac{(\sqrt{1-c_R^2/c_t^2} - \sqrt{1-c_R^2/c_l^2})^2}{2(1-c_R^2/c_t^2)\sqrt{1-c_R^2/c_l^2}} - \left( \sqrt{1-c_R^2/c_t^2} - \sqrt{1-c_R^2/c_l^2} \right) \right\} c_R \quad (2.4)$$

ただし  $c_R$  は Rayleigh 波の速度で次式の解として定められる。

$$(2-c_R^2/c_t^2)^4 = 16(1-c_R^2/c_l^2)(1-c_R^2/c_t^2) \quad (2.5)$$

$c_t, c_l$  は各々バルクの音波における横波および縦波の速さを表わす。(2.2)と(2.3)より高周波の Rayleigh 波は指数関数のためにその振幅が固体内部に入るに従い急激に減少することに注意しよう。その様子を第2図に示す。また変位成分  $u_{||}$  と  $u_{\perp}$  は第2図にみられるように位相が  $\pi/2$  だけずれているので変位ベクトルの軌道は楕円になる。

そこで(2.2)と(2.3)式において、われわれは  $a_k^*, a_k$  を次のような Bose 型の交換関係に従う生成、消滅演算子と読み変えることによって Rayleigh 波を量子化することができる。

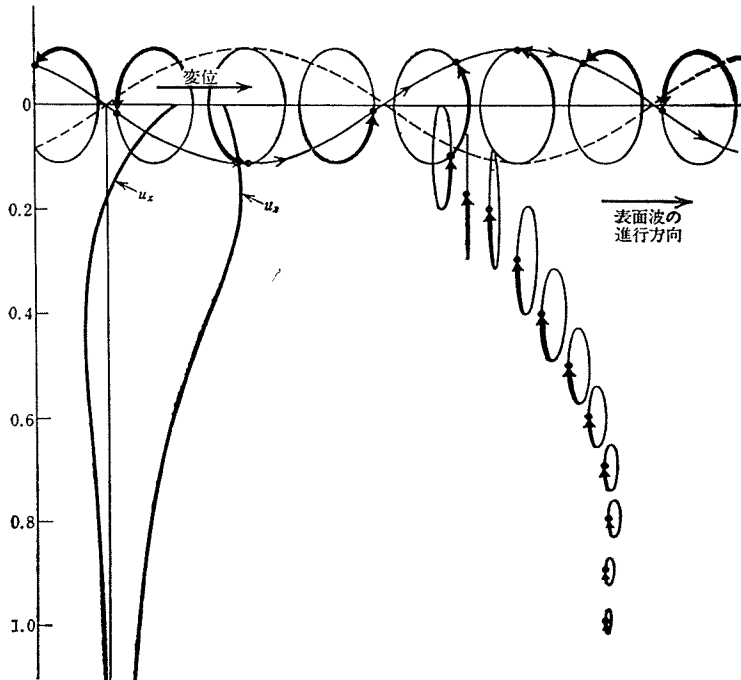
$$[a_k, a_{k'}^*] = \delta_{k,k'}, \quad (2.6)$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0. \quad (2.7)$$

このようにして得られた Rayleigh 波の量子は Ezawa<sup>13)</sup> により狭義のサーフオン (表面フォノン) と呼ばれた。

またここで第4章で必要になるバルク波の量子化を行なっておこう。いまバルク波は縦波と横波により構成されていて、その変位ベクトル  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  を平面波で展開することができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega(\mathbf{k})}} \mathbf{e}(\mathbf{k}) \cdot \left\{ a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + a_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \right\}. \quad (2.8)$$



第2図 表面弾性波にともなう変位

ここで  $\mathbf{k}$  は 3 次元の波数ベクトルであり、 $\mathbf{e}(\mathbf{k})$  は偏極ベクトルである。量子化は前と同様に振幅  $a_{\mathbf{k}}^*$ ,  $a_{\mathbf{k}}$  をそれぞれ (2.6), (2.7) の Bose 型交換関係に従う生成、消滅演算子と読み変えることによって遂行される。のちに第 4 章で表面弾性波の減衰を量子力学的に論ずる際にこれら量子化されたフォノン描像は重要な役割を演ずるのであろう。

### 3. 弾性エネルギーの非調和項

均質で等方的な弾性体の弾性エネルギーは Hooke の法則が成立するとすれば、次の歪テンソル (strain tensor)  $u_{ij}$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.1)$$

に関して 2 次の項まで考慮して

$$W = \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2 \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで  $\lambda$  および  $\mu$  は Lamé の定数である。しかし、弾性波間の非調和相互作用を論ずるには歪テンソルとしてつぎのようなより一般的に定義された変形テンソル (deformation tensor)  $\eta_{ij}$  を用いなければならない。

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.3)$$

(3.3) で定義された変形テンソルを用いると、変位に関して 3 次まで考慮した弾性エネルギーは次式で与えられる。

$$W = \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ij}^2 + \left\{ \nu_1 u_{ii}^3 + \frac{3}{2} \nu_2 u_{iii} u_{ij}^2 + \nu_3 u_{ij}^3 + \frac{\lambda}{2} u_{ii} v_{ij}^2 - \mu u_{ij} v_{jk} v_{ki} \right\} \quad (3.4)$$

ここで

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

である。式 (3.4) において変位について 3 次の項を無視すると Hooke の法則に従う弾性エネルギー (3.2) に帰着することは明らかである。 $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  は固体の弾性的性質の Hooke の法則からのずれをあらわす 3 次の弾性定数である。(3.4) 式において、右辺括弧内第 4 項および第 5 項は 3 次の弾性定数  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  を含まず、2 次の弾性定数  $\lambda, \mu$  のみで非調和項を形成していることに注意しよう。これは歪テンソル  $u_{ij}$  の代りに変形テンソル  $\eta_{ij}$  を用いたためである。(3.4) 式の右辺括弧であらわされる項が、次の章で議論される表面弾性波の熱フォノンによる減衰を与える摂動項になる。

### 4. $\omega\tau > 1$ の領域における表面弾性波の減衰

第 1 章で述べたように弾性エネルギーの非調和項による弾性波の減衰を考察する場合、弾性波の角周波数  $\omega$  と固体中に励起されている熱フォノンの緩和時間  $\tau$  との相対的な関係に依存するような 2 つの領域がある。本論文であつかうのは条件  $\omega\tau > 1$  がみたされる領域で、これは熱フォノンの平均自由行路  $l$  が弾性波の波長より大きい場合である。多くの物質においてはこの条件は温度 50°K において超音波の周波数が 1 GHz の場合に成立することになる。この条件が成立するような領域での理論をつくるには表面弾性波の量子と熱的に励起されているフォノンとの散乱過程を計算してやればよい。

通常の実験条件では熱フォノンの平均エネルギー  $k_B T$  にくらべて表面弾性波の量子のエネルギー  $\hbar\omega_R$  は充分小さく、 $\hbar\omega_R \ll k_B T$  の条件が成立する。ところが  $k_B T$  のエネルギーをもつ熱的に励起された表面熱フォノンの振幅は表面からの深さ  $\lambda_{th} \approx \hbar c / k_B T$  でほぼ零に近づく。(第2図)ここで  $c$  は音速である。それにくらべて人工的に励起された表面弾性波(表面超音波)の振幅が零になる深さは  $\lambda_R \approx c / \omega_R$  であって、表面弾性波の波長  $\lambda_R$  と表面熱フォノンの波長  $\lambda_{th}$  の間には  $\lambda_R \gg \lambda_{th}$  という関係があるから表面熱フォノンの量子は表面弾性波の量子にくらべて固体のごく表面近傍に局在していることになる。このことから、人工的に励起された表面弾性波が表面熱フォノンによって散乱をうける確率は極めて小さいであろうことがわかる。そこで以下の議論ではわれわれは表面弾性波の量子と(2.8)式で定義されたバルクの熱フォノンとの散乱過程のみに限定して考察する。表面弾性波の減衰に寄与する散乱過程は次のようなものである。

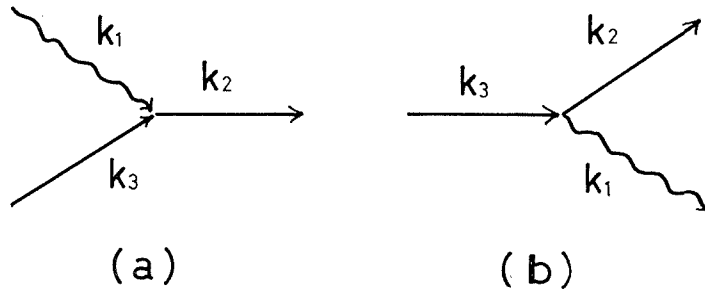
熱フォノンが表面弾性波を吸収する過程：

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) \rightarrow \omega(\mathbf{k}_3) \quad (4.1)$$

熱フォノンが表面弾性波を放出する過程：

$$\omega(\mathbf{k}_3) \rightarrow \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) \quad (4.2)$$

(4.1)式および(4.2)式において添字1は表面弾性波を表わし、添字2,3はバルクの熱フォノンをあらわしている。これらの過程をわかりやすく示したのが第3図である。



第3図 表面弾性波の散乱過程

これらの過程を計算するには、(2.1)式および(2.9)式を(3.4)式の非調和項に代入して生成、消滅演算子が  $a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}$  あるいは  $a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^*$  のような積の項に注目すればよい。すなわち(4.2)式のような過程では非調和項から得られる積  $a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}$  の項によってフォノンの数  $N_{k_1}$ ,  $N_{k_2}$ ,  $N_{k_3}$  で表示した始状態  $|N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_3}\rangle$  から終状態  $|N_{k_1}+1, N_{k_2}+1, N_{k_3}-1\rangle$  へ遷移する確率を計算する。そして実験的に測定し得る表面弾性波の減衰は(4.1)の遷移確率から(4.2)の遷移確率を差し引くことによって求めることができる。

さて(4.2)式であらわされる散乱過程の遷移行列要素を求めよう。上に述べた方法に従って弾性エネルギーの非調和項から得られる生成、消滅演算子の積  $a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}$  の項を始状態  $|N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_3}\rangle$  と終状態  $|N_{k_1}+1, N_{k_2}+1, N_{k_3}-1\rangle$  で期待値をとってやると遷移行列要素  $S(3 \rightarrow 1+2)$  は

$$S(3 \rightarrow 1+2) = i(2\pi)^3 \left( \frac{1}{8\pi^2 \rho} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{N_{k_3} (N_{k_1}+1) (N_{k_2}+1)} \times \\ \times [\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3 - \mu A_4 + \lambda A_5] \delta_{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}^{(2)} \delta_{(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)} \quad (4.3)$$

で与えられる。ここで  $A_1 \sim A_5$  は付録に与えられる。

さて人工的に発生し得る表面弾性波の波長は熱フォノンのそれにくらべて充分長く

$$|\mathbf{k}_1| \ll |\mathbf{k}_2|, \quad |\mathbf{k}_3| \quad (4.4)$$

という関係が成立するから次のような近似をとることが出来る。

$$\mathbf{k}_2 \approx \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{e}(\mathbf{k}_2) \approx \mathbf{e}(\mathbf{k}_3) \quad (4.5)$$

表面弾性波の減衰を計算するには (4.5) を考慮して, (4.1) の遷移確率から (4.2) の遷移確率を差し引いてやればよいから結局表面弾性波の単位時間当りの減衰確率  $R$  は, 次のようにあらわされる。

$$R = \int \frac{d\mathbf{k}_2}{(8\pi^2\rho)^3} \cdot \frac{k_1}{4\pi^2K} \cdot \frac{N_{k_1}(N_{k_2} - N_{k_3})}{\omega_1\omega_2\omega_3} \cdot |M|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \quad (4.6)$$

ここで  $M$  は次のように与えられる。

$$M = \left( \frac{\tilde{\gamma}^2 - 1}{\tilde{\gamma}} \right) T_1 - 2 \left( \frac{1}{\tilde{\gamma}} - \frac{2\tilde{\gamma}}{1 + \tilde{\gamma}^2} \right) T_2 + 2\tilde{\gamma} \left( 1 - \frac{2}{1 + \tilde{\gamma}^2} \right) T_3 - 4i \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}}{\eta} \right) T_4 - \frac{i\tilde{\gamma}}{3\eta} \cdot \frac{1 - \tilde{\gamma}^2}{1 + \tilde{\gamma}^2} T_5 \quad (4.7)$$

ただし

$$T_1 = (\nu_1 + \nu_2 - \lambda/12) (\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_2)^2 + (\nu_2 + \lambda/12) k_2^2 \quad (4.8)$$

$$T_2 = [\{2(\nu_2 + \nu_3) - \mu/12\} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_2) (\mathbf{k}_2 \mathbf{e}_2) + (\nu_3 + \mu/24) \{(\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_2)^2 k_2^2 + (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2\}] k_1^{-2} \quad (4.9)$$

$$T_3 = \{2(\nu_2 + \nu_3) - \mu/12\} (\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_2) k_2^2 e_2^z + (\nu_3 + \mu/24) (k_2^{z2} + k_2^2 e_2^{z2}) \quad (4.10)$$

$$T_4 = [\nu_2 + \nu_3 - \mu/24] (\mathbf{k}_2 \mathbf{e}_2) \{k_2^z (\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_2) + e_2^z (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)\} + (\nu_3 + \mu/24) \{k_2^z (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) + e_2^z (\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_2) k_2^z\} k_1^{-1} \quad (4.11)$$

$$T_5 = (\lambda + \mu) (\mathbf{k}_2 \mathbf{e}_2) \{(\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_2) k_2^z - (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) e_2^z\} k_1^{-1} \quad (4.12)$$

である。

いまわれわれが興味があるのは表面弾性波の非調和減衰の周波数依存性および温度依存性である。そこで (4.7) で求めた  $M$  の表面弾性波の周波数依存性をみると (4.8)~(4.12) 式から明らかなように  $M$  は  $k_1$  によらない。また (4.6) 式において (4.5) 式を考慮すれば

$$N_{k_2} - N_{k_3} \approx - \frac{\partial N_{k_2}}{\partial \omega_2} \cdot \omega_1 \quad (4.13)$$

と近似でき, 更に  $\delta$ -関数の引数を

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \approx \omega_1 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \mathbf{k}_2} \cdot \mathbf{k}_1 \quad (4.14)$$

と近似できるから結局

$$R \sim \int \frac{\partial N_{k_2}}{\partial \omega_2} \cdot k_2^4 d\mathbf{k}_2 \sim \omega_1^0 T^4 \quad (4.15)$$

なる表面弾性波の減衰確率を得る。但し (4.15) 式の温度依存性を出す際, 熱フォノンの分布  $N_{\mathbf{k}}$  としてつぎのような Bose-Einstein 分布を仮定した。

$$N_{\mathbf{k}} = [\exp(\omega/k_B T) - 1]^{-1} \quad (4.16)$$

(4.15) 式から表面弾性波の減衰は, 入射する表面弾性波の周波数に依存しないこと, また, その温度依存性は  $T^4$  則に従うことがわかる。

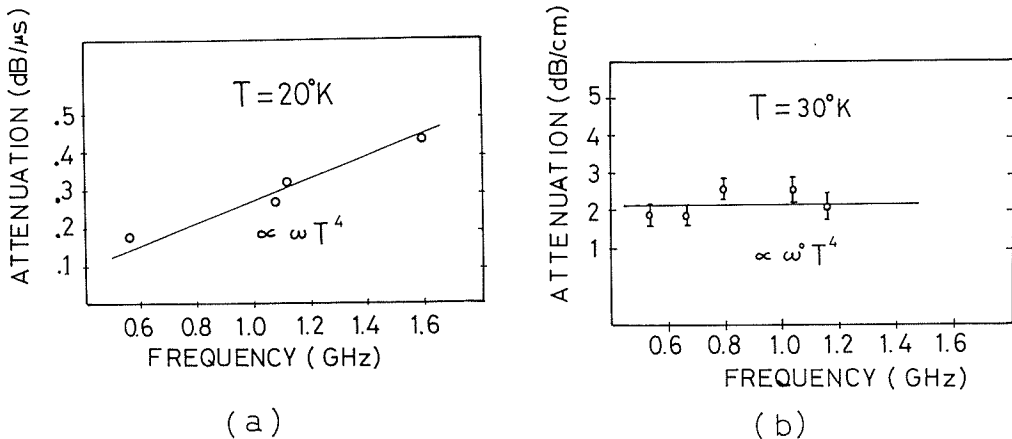
## 5. 結 論

われわれは入射する表面弾性波の周波数  $\omega$  と熱フォノンの緩和時間  $\tau$  との関係  $\omega\tau > 1$  が成立する領域において, 表面弾性波の非調和減衰に関してその周波数依存性および温度依存性を求めた。その結果単位時間当りの減衰率は周波数に依存せず, またその温度変化については  $T^4$  則

に従うことが明らかになった。計算は量子化された Rayleigh 波の描像にもとづき、量子力学的振動論を用いて遂行されたが、これは Landau と Rumer によるバルク波減衰の理論に対比するものである。

Maradudin と Mills<sup>8)</sup> は一対の自由表面をもつ格子模型を考え、格子力学の方法によって格子表面を伝播する波の非調和減衰の温度依存性および周波数依存性を  $\omega\tau > 1$  の領域で考察した。彼等にとっての模型は無限格子を原子を含み任意の平面で切断することにより自由表面の効果を取りいれているが、厳密にはこの手続きによって Rayleigh 波そのものが導かれるものではない。結果として彼等は、表面弾性波の減衰の温度依存性および周波数依存性として、バルク波の場合の Landau-Rumer 損失と同じ  $\omega T^4$  依存性を得ている。これは本論文における結論と周波数依存性において異なるものである。

ここで、表面弾性波の非調和減衰についての実験について注目すると、最近三篇の実験報告<sup>9),10),11)</sup> がなされている。Salzmann et al<sup>9)</sup> および Budreau と Carr<sup>10)</sup> は媒質として水晶を用いて 0.31~1.54 GHz の表面超音波の周波数領域で、また 4.2°K~3.00°K の温度領域で減衰の測定を行なった。その結果 23°K 以下においては減衰は  $\omega T^4$  に比例するとして Maradudin と Mills<sup>8)</sup> の結論を支持している (第 4 a 図)。しかし一方において Daniel と de Klerk<sup>11)</sup> は同じく水晶を用いて、周波数領域 0.3~2.0 GHz、温度領域 4.2°K~100°K において減衰の測定をパルスエコー法により行なった (第 4 b 図)。彼等の結果によれば、温度が 20°K~40°K においては周波数に依存する結果は得られず、減衰は  $\omega^0 T^4$  に比例するという結論を得ている。この結果はわれわれが本論文で得た減衰の理論結果と一致しており非常に興味深い。いままでのところ、著者等の知る限りこれら三例の実験しか報告されていないが更により精密な表面における超音波減衰の実験がなされることにより本論文の理論的結果の検証がなされることが望まれる。



第 4 図 水晶における表面弾性波の減衰の周波数依存性

(a) 文献 10) より引用 (b) 文献 11) より引用

## 文 献

- 1) 表面弾性波の一般的解説として：高田 進，早川尚夫，御子柴宣夫：物性 (1971 年 2 月~3 月号) R. M. White: Proc. IEEE 58 (1970) 1238.
- 2) Lord Rayleigh: Proc. London Mathematical Society 17 (1885) 4.
- 3) L. D. Landau and G. Rumer: Phys. Z. Sowjetunion 11 (1937) 18.
- 4) A. I. Akhieser: J. Phys. USSR 1 (1939) 277.

- 5) T. O. Woodruff and H. Ehrenreich: Phys. Rev. **33** (1961) 1553.
- 6) H. J. Maris: Phys. Rev. **188** (1969) 1308.
- 7) P. J. King and F. W. Sheard: J. appl. Phys. **40** (1969) 5189.
- 8) A. A. Maradudin and D. L. Mills: Phys. Rev. **173** (1968) 881.
- 9) E. Salzmann, T. Plieninger and K. Dransfeld: Appl. Phys. Letters **13** (1968) 14.
- 10) A. J. Budreau and P. H. Carr: Appl. Phys. Letters: **18** (1971) 239.
- 11) M. R. Daniel and J. de Klerk: Appl. Phys. Letters: **16** (1970) 30.
- 12) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: Theory of Elasticity (Pergamon Press, New York, 1959).
- 13) H. Ezawa: Ann. of Phys. **67** (1971) 438.

## 付 録

ここでは遷移行列要素 (4.3) における振幅  $A_1 \sim A_5$  の表現を与える。以下  $k_1 \Rightarrow k$  とする。

$$A_i = \sqrt{\frac{K}{4\pi^2 k}} \int_0^\infty dz F_i(z) e^{i(k_2^z - k_3^z)z}, \quad (i = 1 \sim 5) \quad (\text{A. 1})$$

によって  $F_i(z)$  を定義すると,  $F_i(z)$  は次のように与えられる。

$$F_1(z) = -6(1-\gamma^2)k(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_3)e^{-\gamma kz} \quad (\text{A. 2})$$

$$F_2(z) = 6 \left[ F_{21} \cdot \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + F_{22} \cdot \left( \gamma^2 e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + iF_{23}\gamma (e^{-\gamma kz} - e^{-\eta kz}) + F_{24}e^{-\gamma kz} \right] \quad (\text{A. 3})$$

$$F_3(z) = 12 \left[ F_{31} \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + F_{32} \left( \gamma^2 e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + iF_{33}\gamma (e^{-\gamma kz} - e^{-\eta kz}) \right] \quad (\text{A. 4})$$

$$F_4(z) = -\frac{1}{2} \left[ F_{41} \frac{1}{k} \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + F_{42}k \left( \gamma^2 e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) + iF_{43}\gamma (e^{-\gamma kz} - e^{-\eta kz}) - 2iF_{44}\gamma \cdot \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right] \quad (\text{A. 5})$$

$$F_5(z) = \frac{1}{2} \left[ F_{51}k(1-\gamma^2)e^{-\gamma kz} + 2iF_{52}\gamma \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right] \quad (\text{A. 6})$$

但し

$$F_{21} = -\frac{2}{k} \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_2) + (\mathbf{e}_2\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{k}\mathbf{k}_3) \} \quad (\text{A. 7})$$

$$F_{22} = 2k \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_3)e_2^z k_2^z + (\mathbf{e}_2\mathbf{k}_2)e_3^z k_3^z \} \quad (\text{A. 8})$$

$$F_{23} = -2 \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_3)(k_2^z(\mathbf{e}_2\mathbf{k}) + e_2^z(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)) + (\mathbf{e}_2\mathbf{k}_2)(k_3^z(\mathbf{e}_3\mathbf{k}) + e_3^z(\mathbf{k}\mathbf{k}_3)) \} \quad (\text{A. 9})$$

$$F_{24} = -k(1-\gamma^2) \{ \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) \} \quad (\text{A. 10})$$

$$F_{31} = -\frac{1}{k} \{ (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) \} \quad (\text{A. 11})$$

$$F_{32} = k \{ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)k_2^z k_3^z + (\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3)e_2^z e_3^z + (\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3)k_2^z e_3^z + (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2)k_3^z e_2^z \} \quad (\text{A. 12})$$

$$F_{33} = -k_2^z \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \} - e_2^z \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) \} - k_3^z \{ (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \} - e_3^z \{ (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) \} \quad (\text{A. 13})$$

$$F_{41} = (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) - (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) - (\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) \quad (\text{A. 14})$$

$$F_{42} = (\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3)k_2^z e_3^z + (\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2)k_3^z e_2^z - (\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3)e_2^z e_3^z - (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)k_2^z k_3^z \quad (\text{A. 15})$$

$$F_{43} = k_2^z \{ (\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{e}_2\mathbf{k}_3) \} + e_2^z \{ (\mathbf{e}_3\mathbf{k})(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) - (\mathbf{k}\mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) \} + k_3^z \{ (\mathbf{k}\mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_2\mathbf{k})(\mathbf{e}_3\mathbf{k}_2) \}$$

$$+ \tilde{e}_3^z \{ (\mathbf{e}_2 \mathbf{k})(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3) - (\mathbf{k} \mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_3) \} \quad (\text{A. 16})$$

$$F_{44} = \tilde{e}_3^z (\mathbf{k} \mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_3) + \tilde{e}_2^z (\mathbf{k} \mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{k}_2) - \tilde{k}_3^z (\mathbf{e}_2 \mathbf{k})(\mathbf{e}_3 \mathbf{k}_2) - \tilde{k}_2^z (\mathbf{e}_3 \mathbf{k})(\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_3) \quad (\text{A. 17})$$

$$F_{51} = (\mathbf{e}_3 \mathbf{k}_2)(\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_3) - (\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \quad (\text{A. 18})$$

$$F_{52} = -(\mathbf{e}_2 \mathbf{k}_2) \{ \tilde{k}_3^z (\mathbf{e}_3 \mathbf{k}) - \tilde{e}_3^z (\mathbf{k} \mathbf{k}_3) \} - (\mathbf{e}_3 \mathbf{k}_3) \{ \tilde{k}_2^z (\mathbf{e}_2 \mathbf{k}) - \tilde{e}_2^z (\mathbf{k} \mathbf{k}_2) \} \quad (\text{A. 19})$$

である。