木の変換について

桃 内 佳 雄*

(昭和48年7月31日受理)

Transformations on Trees

Yoshio MOMOUCHI

Abstract

We consider inclusion relations among finite state top-down tree transducers, finite state bottom-up tree transducers and extended finite state bottom-up tree transducers. Also studied are tree walking automata and tree walking transducers in relation to tree automata and finite state bottom-up tree transducers. A syntax-directed translation scheme and transformational grammar are discussed briefly in connection with the tree transducers.

1. まえがき

木オートマトンは，木を入力とするオートマトンである。木オートマトンの代数的構造，木オートマトンによって認識可能な木言語と文脈自由文法によって生成される導出木の集合との関連，木言語を生成する木文法の構成，木言語の階層構造，木変換機などについての考察が進められている[1)~5),10)~12)]。

木変換機は，木を木に変換する機械である。木変換機を用いれば，文脈自由言語の変換を導出木の集合の変換を通して行なうことができ，このような言語の変換は，文法の構造を考慮にいれた変換と考えられる。Chomsky によって提案されている変形文法においても，その変形規則は木の変換としてとらえられる。木変換機についての考察は，文法の構造を考慮にいれた言語の変換機構の1つの数学的なモデルの可能性を明らかにすることである。種々の木変換機を構成することにより，木変換を通して新しい言語の階層を構成することもでき，また，木変換機は他の方法による言語の変換機構を，統一的に考察しうる機構としての可能性ももっている。

木変換機については，すでに，Rounds[1)], Thatcher[2)], 早瀬・上林[4)], Martin・Vere[5)], などによる研究がある。本論文においては，それぞれ独立に提案されているいくつかの木変換機を統一的に記述し，各木変換機間の関連について考察し，さらに，Aho・Ullman[6)] により研究されている木の上を歩くオートマトン，木の上を歩く変換機と，木オートマトン，木変換機との間の関連についての考察を進める。構文向き変換機構，変形文法との関連についても，簡単に述べる。

2. 木および木オートマトン

線分とは，有限長の直線である。線分の両端をそれぞれ前，後とよぶことにし，線分を前から後へ向きづける。このように向きを定められた線分を有向線分とよぶ。2つの点を有向線分に

* 情報数理工学第一講座

よって連結するとき，その有向線分は前に位置する点からでていくといい，後に位置する点へ入るという。

木は，有向線分によって連結された点の集合で，次の3つの条件を満足する。

(1) 入ってくる有向線分を1つももたない点がただ1つある。そのような点を根とよぶ。

(2) 木の中のどの点についても，根からその点への有向線分の列がある。

(3) 根以外のすべての点は，入ってくる有向線分をただ1つもつ。

点を節とよび，点と点を連結する有向線分を枝とよぶ。でていく枝をもたない節を葉とよぶ。ある節について，それに入ってくる枝の前に位置する節をその節の親とよび，それからでていく枝の後に位置する節を，子とよぶ。

ある木について，その節の部分集合とそれらを連結する有向線分が，うえの木の3つの条件を満足しているとき，そのときのみ，それらの有向線分によって連結された節の部分集合は，もとの木の部分木である。

ある木の2つの節，n_1, n_2 において，n_1 から n_2 へ，この向きでの枝の列があるとき，そのときのみ，n_2 は n_1 より下にある。

木において，根が指定されれば，すべての枝の向きは一意に定まる。根が一番上に位置づけられ，すべての節が上から下へ順番にならべられ，枝の向きが省略されているような木を，あらためて木とよぶことにする。

Σ を記号の有限集合（アルファベットとよぶ），N を非負整数の集合，$r:\Sigma\to N$ とする。Σ の各記号に対して r によりわりあてられる N の値を各記号のランクとするとき，(Σ, r) はランク付きアルファベットとよばれる。ランク n の記号の集合を Σ_n とかく。r が明らかであるときは，(Σ, r) を単に Σ とかく。

Z を Σ と共通な要素をもたない記号の集合とする。Z の各記号を変数とよび，変数のランクは0とする。

Σ 表現の集合 $T_{\Sigma,Z}$ は次のような集合である。

(1) $\delta\in Z\cup\Sigma_0$ ならば，$\delta\in T_{\Sigma,Z}$ である。

(2) $n>0, \sigma\in\Sigma_n, t_1, t_2, \cdots, t_n\in T_{\Sigma,Z}$ ならば，$\sigma(t_1\, t_2 \cdots t_n)\in T_{\Sigma,Z}$ である。

Z はいろいろな形をとることができる。

$T_{\Sigma,\phi}$: 単に T_Σ とかく。（ϕ；空集合）

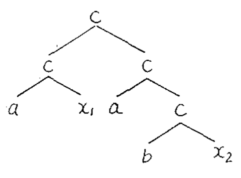
$T_{\Sigma,X}$: $X=\{x_1, x_2, \cdots\}$

T_{Σ,X_n}: $X_n=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$T_{\Sigma,S\times X}$: $S\times X=\{(s, x)|s\in S, x\in X\}$

Σ 表現；$t=c(c(ax_1)c(ac(bx_2)))$

ラベル付き木；



$\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_2=\{a, b\}\cup\{c\}, X=\{x_1, x_2\}$

Fig. 1. Σ expression and labeled tree

Σ 表現は，Σ の記号をその節のラベルとしてもつラベル付き木としても表現することができる。そのとき，各記号のランクは，その記号をラベルとしてもつ節からでる枝の数に対応している。以下においては，Σ 表現をも木とよぶことにする。

木に関連した3つの関数を与える。

① f_v: $T_{\Sigma,Z}\to 2^Z$

(1) $\delta\in Z\cup\Sigma_0$ に対して，

$\delta\in Z$ ならば，$f_v(\delta)=\{\delta\}$

$\delta\notin Z$ ならば，$f_v(\delta)=\phi$

(2) $f_v(\sigma(t_1\,t_2\cdots t_n))=\bigcup_{i=1}^{n} f_v(t_i)$

② $f_y^W:\quad T_{\Sigma,Z}\to W^*\quad (W\subseteq Z\cup\Sigma_0)$

(1) $\delta\in Z\cup\Sigma_0$ に対して，

$\delta\in W$ ならば，$f_y^W(\delta)=\delta$

$\delta\notin W$ ならば，$f_y^W(\delta)$ は定義されない。

(2) $f_y^W(\sigma(t_1\,t_2\cdots t_n))=f_y^W(t_1)f_y^W(t_2)\cdots f_y^W(t_n)$

$W=Z\cup\Sigma_0$ であるときは，f_y とかく。

③ $f_t:\quad T_{\Sigma,Z}\to\Sigma\cup Z$

(1) $\delta\in Z\cup\Sigma_0$ に対して，$f_t(\delta)=\delta$

(2) $f_t(\sigma(t_1\,t_2\cdots t_n))=\sigma$

注 ① $\cup$；集合の和をとる演算

② f: $A\to B$；A から B への関数 f

③ $W^*=\{\varepsilon\}\cup W\cup W^2\cup\cdots,\varepsilon$；長さ0の空系列

$$W^k=\overbrace{W\cdot W\cdot\cdots\cdot W}^{k}$$

$W\cdot W$；W の記号と W の記号をつないで得られるすべての系列の集合。

$W^{k-1}\cdot W$；W^{k-1} の系列と W の記号をこの順序でつないで得られるすべての系列の集合。

(W はアルファベット)

木オートマトンは，木を入力とするオートマトンである。

定 義 2.1

有限状態上昇型木オートマトン

$\mathrm{UA}=(\Sigma,A,\alpha,A_F,a_0)$

Σ；ランク付きアルファベット

A；状態の有限集合

α:　$\Sigma\to\{A^{(A^n)}|n\geqq 0\}$，$\alpha(\sigma)$；遷移規則

$\sigma\in\Sigma$ に対して，$\alpha(\sigma)=\alpha_\sigma$:　$A^{r(\sigma)}\to A$

$\lambda\in\Sigma_0$ に対しては，$\alpha_\lambda(a_0)$ だけが定義され，α_λ とかく。

$A_F\subseteq A$；最終状態の集合

a_0；初 期 状 態

UA に対する応答関数 h_U は，次のような関数である。

(1) $\lambda\in\Sigma_0$ ならば，$h_U(\lambda)=\alpha_\lambda$

(2) $h_U(\sigma(t_1\,t_2\cdots t_n))=\alpha_\sigma(h_U(t_1)h_U(t_2)\cdots h_U(t_n))$

木 t は，$h_U(t)\in A_F$ ならば，UA により認識されるという。UA により認識される木の集合は次のように与えられる。

$$T(\mathrm{UA})=h_U^{-1}(A_F)=\{t|h_U(t)\in A_F\}$$

$R\subseteq T_\Sigma$ は，$R=\{t|h_U(t)\in A_F\}$ となるような，有限状態上昇型木オートマトンが存在するならば，認識可能であるという。このような R を認識可能集合とよぶ。

この木オートマトンは，木を葉の方からよんでゆく形をしている。これに対して，木を根の方からよんでゆく形の木オートマトンを構成することもできる。そのような木オートマトンを有限状態下降型木オートマトンとよぶことにする。任意の有限状態上昇型木オートマトンに対して，それとちょうど同じ木の集合を認識することのできる有限状態下降型木オートマトンを構成することができ，その逆もいえることが示される。

また，上昇型と下降型の遷移規則を両方もつ形の木オートマトン，すなわち，２方向有限状態木オートマトンの構成も考えることができる。

遷移規則 α_σ は一般には部分関数である。

3. 木変換機

木変換機は，木を木へ変換する機械である。

定義 3.1

木の代入 h_η

$\eta: Z \to T_{\Sigma,Z}$ とする。

$z \in Z$ に対して，$h_\eta(z) = \eta(z)$

$t \in T_{\Sigma,Z}$ に対して，$h_\eta(t) = \{t'$；t の各 z を $h_\eta(z)$ でおきかえることにより得られる木$\}$

定義 3.2

有限状態下降型木変換機

$\mathrm{DT} = (S, \Sigma, \Omega, X, \delta_D, S_S)$

S；状態の有限集合

Σ；ランク付きアルファベット（入力木に対するアルファベット）

Ω；ランク付きアルファベット（出力木に対するアルファベット）

X；変数の集合

$S_S \subseteq S$；初期状態の集合

δ_D；変換規則

$S \times \{\sigma(x_1\, x_2 \cdots x_n) | \sigma \in \Sigma, n = r(\sigma)\} \times T_{\Omega, S\times X}$ の有限部分集合

$\{(s, \sigma(x_1\, x_2 \cdots x_n)) \to t : t \in T_{\Omega, S\times X_n}, r(\sigma) = n\}$

変換の途中にあらわれる木を計算状況とよぶ。それは $T_{\Omega, S\times T_\Sigma}$ の要素である。

直接変換 $\vdash$ は，次のように定義される。

$t \vdash t'$；t の部分木として，$t_s = (s, \sigma(t_1\, t_2 \cdots t_n))$ という形のものがあり，$(s, \sigma(x_1\, x_2 \cdots x_n)) \to t_\sigma \in \delta_D$ であるときは，t' は，t から，t_σ の各 $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ に各 $t_i (i=1, 2, \cdots, n)$ を代入して得られる木 t'_σ で t_s をおきかえることにより得られる。$t, t' \in T_{\Omega, S\times T_\Sigma}$

変換 $\overset{*}{\vdash}$ は，$\vdash$ の反射的，推移的閉包である。

DT による $t \in T_\Sigma$ に対する出力木は，

$T_\mathrm{D}(t) = \{t' | (s_0, t) \overset{*}{\vdash} t', s_0 \in S_s, t' \in T_\Omega\}$

$V \subseteq T_\Sigma$ に対しては，

$T_\mathrm{D}(V) = \bigcup_{t \in V} T_\mathrm{D}(t)$

定義 3.3

有限状態上昇型木変換機

$\mathrm{UT} = (S, \Sigma, \Omega, X, \delta_U, S_F)$

S；状態の有限集合

Σ；ランク付きアルファベット（入力木に対するアルファベット）

Ω；ランク付きアルファベット（出力木に対するアルファベット）

X；変数の集合

$S_F \subseteq S$；最終状態の集合

δ_U；変換規則

$\{\{((S\times\{x_1\}), (S\times\{x_2\}), \cdots, (S\times\{x_n\}))|1\leqq n\leqq \max(r(\sigma))\}\cup\phi\}\times\Sigma\times(S\times T_{\Omega,X})$ の有限部分集合

$\{(((s_{i1}, x_1), (s_{i2}, x_2), \cdots, (s_{in}, x_n)), \sigma)\to(s, t): t\in T_{\Omega,X_n}, r(\sigma)=n\}$

計算状況は，$T_{\Sigma, S\times T_\Omega}$ の要素である。

直接変換$\vdash$は，次のように定義される。

$t\vdash t'$; t の部分木として，$t_\sigma=\sigma((s_{i1}, t_1)(s_{i2}, t_2)\cdots(s_{in}, t_n))$ という形のものがあり，$(((s_{i1}, x_1), (s_{i2}, x_2), \cdots, (s_{in}, x_n)), \sigma)\to(s, t_s)\in\delta_U$ であるとき，t' は t から，t_s の各 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ に各 $t_i(i=1, 2, \cdots, n)$ を代入することにより得られる木 t'_s で t_σ をおきかえることにより得られる。

変換 $\overset{*}{\vdash}$ は，$\vdash$ の反射的，推移的閉包である。

UT による $t\in T_\Sigma$ に対する出力は，

$$T_{\mathrm{U}}(t)=\{t'|t\overset{*}{\vdash}(s, t'), s\in S_F, t'\in T_\Omega\}$$

$V\subseteq T_\Sigma$ に対しては，

$$T_{\mathrm{U}}(V)=\bigcup_{t\in V}T_{\mathrm{U}}(t)$$

うえの2つの定義は，非決定的な変換機の定義を与えている。決定的な変換機は変換規則の各左辺に対して右辺がただ1つ与えられる。次のような略称を用いる。

決定的有限状態下降型木変換機：d-DT

決定的有限状態上昇型木変換機：d-UT

2つの木変換機，A, Bは，任意の $V\subseteq T_\Sigma$ に対して，$T_{\mathrm{A}}(V)=T_{\mathrm{B}}(V)$ となるとき，等価であるという。

定　理　3.1

任意の有限状態上昇型木変換機に対して，それと等価な有限状態下降型木変換機を構成することができる。

証明：有限状態下降型木変換機の構成のみを示す。$\mathrm{UT}=(S, \Sigma, \Omega, X, \delta_U, S_F)$ に対して，$\mathrm{DT}=(S', \Sigma', \Omega', X', \delta_D, S_s)$ を構成する。$S'=S, \Sigma'=\Sigma, \Omega'=\Omega, X'=X, S_s=S_F$ とする。δ_D は δ_U から次のように構成される。

a）ランクが1以上の記号について

$\delta_{U\sigma}$: $(((s_{i1}, x_1), (s_{i2}, x_2), \cdots, (s_{in}, x_n)), \sigma)\to(s, t^\omega), r(\sigma)=n, t^\omega\in T_{\Omega,X_n}, f_t(t^\omega)=\omega$ に対して，

$\delta_{D\sigma}$: $(s, \sigma(x_1 x_2\cdots x_n))\to\bar{t}_\omega, \bar{t}_\omega\in T_{\Omega, S\times X_n}$。$\delta_{U\sigma}$ の右辺の t_ω に含まれる各変数に対して，状態はただ1つ対応している。$\bar{t}^\omega$ は，t^ω から，t^ω の各変数に対して $\delta_{U\sigma}$ の左辺の各変数に対応している状態とその変数の対を作り，それを新しい変数として作られる。

b）ランクが0の記号について

$\delta_{U\lambda}$: $(\phi, \lambda)\to(q, t^\omega)$ に対して，$\delta_{D\lambda}$: $(q, \lambda)\to t^\omega$　」

定　理　3.2

等価な有限状態上昇型木変換機を構成することのできない有限状態下降型木変換機が存在する。

証明：有限状態上昇型木変換機は，木集合の認識可能性を保存する[4]。有限状態下降型木変換機は，木集合の認識可能性を保存しない[1),2)]。また，有限状態上昇型および下降型木変換機はともに，その定義域はちょうど認識可能集合である[1),4)]。したがって，定理が証明された。　」

Levy・Joshi[3] により，有限状態下降型木変換機に関して得られている結果から次のことが示される。

定　理　3.3

有限状態下降型木変換機の族は，決定的有限状態下降型木変換機の族を真に含む。

系 3.1

等価な決定的有限状態下降型木変換機を構成することのできない有限状態上昇型木変換機が存在する。

また，次の定理がなりたつ。

定 理 3.4

有限状態上昇型木変換機の族は，決定的有限状態上昇型木変換機の族を真に含む。

証明： ランク0の記号に対する次のような2つの非決定的な変換規則は，決定的な変換規則によりおきかえることができない。$(\phi, \lambda)\rightarrow t_1$, $(\phi, \lambda)\rightarrow t_2$, $r(\lambda)=0$, $t_1, t_2\in T_\Omega$。有限状態上昇型木変換機においては，木は葉の方からよまれ，しかも葉の部分では，状態はすべてϕからはじまるものと定義されているので。 」

次に有限状態上昇型木変換機の拡張を考える。

定 義 3.4

拡張有限状態上昇型木変換機

$\mathrm{EUT}=(S, \Sigma, \Omega, X, \delta_{EU}, S_F)$

S；状態の有限集合

Σ；ランク付きアルファベット（入力木に対するアルファベット）

Ω；ランク付きアルファベット（出力木に対するアルファベット）

X；変数の集合

$S_F\subseteq S$；最終状態の集合

δ_{EU}；変 換 規 則

$\{\{((S\times X_1), (S\times X_2), \cdots, (S\times X_n))|1\leqq n\leqq \max(r(\sigma))\}\cup\phi\}\times\Sigma\times(S\times\rho T_{\Omega,X})$ の有限部分集合

各 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$ は変数の有限集合，$X_i=\{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in(i)}\}$

$\rho T_{\Omega,X}$ は，$T_{\Omega,X}$ の有限部分集合。

$\{(((s_{i1}, X_1), \cdots, (s_{in}, X_n)), \sigma)\rightarrow(s, (t_1, t_2, \cdots, t_m))\}$

$$\bigcup_{i=1}^{m} f_v(t_i)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} X_i, r(\sigma)=n$$

計算状況は $T_{\Sigma, S\times\rho T_\Omega}$ の要素である。

直接変換 $\vdash$ は次のように定義される。

$t\vdash t'$；t の部分木として，$t_\sigma=\sigma((s_{i1}, T_1)(s_{i2}, T_2)\cdots(s_{in}, T_n))$ という形のものがあり，$(((s_{i1}, X_1), (s_{i2}, X_2), \cdots, (s_{in}, X_n)), \sigma)\rightarrow(s, T_s)\in\delta_{EU}$ であるとき，t' は，t から，T_s の各変数 $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, n(i))$ に各 $t_{ij}(i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, n(i))$ を代入することにより得られる木の集合 T_s' で，t_σ をおきかえて得られる。($T_i(i=1, 2, \cdots, n)$, T_s, T_s' は木の集合である。各 X_i と各 T_i の要素の数は一致していなければならない。)

変換 $\overset{*}{\vdash}$ は，$\vdash$ の反射的，推移的閉包である。

EUT による $t\in T_\Sigma$ に対する出力木は，

$$T_{\mathrm{EU}}(t)=\{t'|t\overset{*}{\vdash}(s, T'), t'\in T', s\in S_F, T'\subseteq T_\Omega\}$$

$V\subseteq T_\Sigma$ に対しては，

$$T_{\mathrm{EU}}(V)=\bigcup_{t\in V} T_{\mathrm{EU}}(t)$$

拡張有限状態上昇型木変換機においては，各変換ごとに複数個の木が出力される。

定　理　3.5

拡張有限状態上昇型木変換機の族は，有限状態上昇型木変換機の族を真に含む。

証明：拡張有限状態上昇型木変換機の族が有限状態上昇型木変換機の族を含むことは明らかである。真に含むことを示すためには有限状態上昇型木変換機は認識可能性を保存することが示されているので[4]，認識可能性を保存しない拡張有限状態上昇型木変換機の存在を示せばよい。

次のような文脈自由文法 G_1 を考える。

$$G_1=(V\,\Sigma, P, S)$$
$$V=\{S, S_1, S_2, a, b\}$$
$$\Sigma=\{a, b\}$$
$$P=\{S\to S_1, S\to S_2, S_1\to aS_1b, S_1\to aS_2b, S_2\to ab\}$$

$L(G_1)=\{a^n b^n|n\geqq 1\}$。$G_1$ により生成される導出木の集合を $D(G_1)$ とすると，$D(G_1)$ は認識可能集合である。

次のような拡張有限状態上昇型木変換機を考える。

$$\mathrm{EUT}=(S, \Sigma, \Omega, X, \delta_{EU}, S_F)$$
$$S=\{s_a, s_b, s_{S1}, s_{S2}, s_S\}$$
$$\Sigma=\{a, b, S, S_1, S_2\}$$
$$\Omega=\{a, b, c, A, B, C, D, S\}$$
$$X=\{x_1, x_2, x_3, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$$
$$S_F=\{s_S\}$$

δ_{EU}: $(\phi, a)\to(s_a, a)$, $(\phi, b)\to(s_b, b)$, $(((s_a, X_1), (s_b, X_2), S_2)\to(s_{S2}, D(x_1\ x_2), C\ c)$, $((s_{S2}, X_1), S)\to(s_S, S(x_{11}\ x_{12}))$, $(((s_a, X_1), (s_{S2}, X_2), (s_b, X_3)), S_1)\to(s_{S1}, A(x_1\ x_2\ x_3), B(c\ x_{22}))$, $((s_{S1}, X_1), S)\to(s_S, S(x_{11}\ x_{12}))$, $(((s_a, X_1), (s_{S1}, X_2), (s_b, X_3)), S_1)\to(s_{S1}, A(x_1\ x_{21}\ x_3)$, $B(c\ x_{22}))$

$D(G_1)$ をこの EUT により変換し，f_y を作用させると，$f_y(T_{\mathrm{EU}}(D(G_1)))=\{a^n\,b^n\,c^n|n\geqq 1\}$ となる。これは文脈自由言語ではない。文脈規定型言語である。

Thatcher により次のことが示されている[2]。V が認識可能集合ならば，$f_y(V)$ は文脈自由言

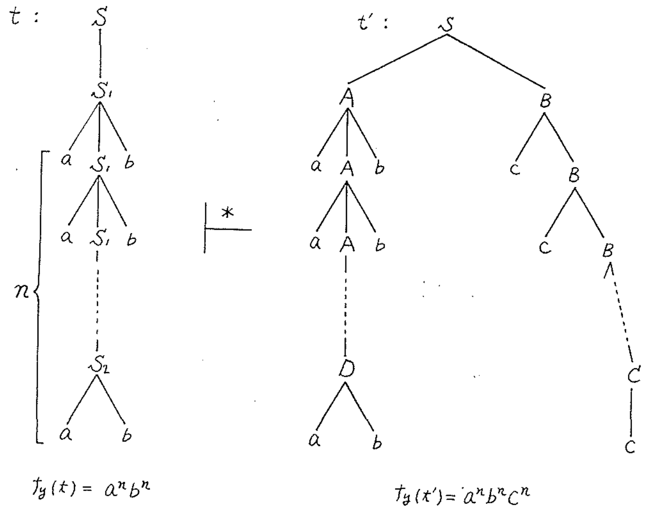


Fig. 2. Tree transformation by EUT

語である。

したがって，$T_{\mathrm{EU}}(D(G_1))$ は認識可能集合ではない。すなわち，この EUT は認識可能性を保存しない。

$D(G_1)$ の EUT による変換をグラフにより示すと，Fig. 2 のようになる。」

4. 木の上を歩くオートマトン

木の上を歩くオートマトンは，木というグラフの上を節から節へそれらを連結する枝を通りながら動く機械である。各節の上のラベルが入力となる。

定　義　4.1

木の上を歩くオートマトン

$\mathrm{TWA}=(S, \Sigma, \delta_W, s_0, s_F)$

S；状態の有限集合

Σ；ランク付きアルファベット（入力木に対するアルファベット）

$s_0 \in S$；初期状態

$s_F \in S$；最終状態

δ_W；遷移規則

$S \times \Sigma \times S \times I$ の有限部分集合

$$I=\{-1, 0, 1, \cdots, n\}, n=\max(r(\sigma)), \sigma \in \Sigma$$

$(q, \sigma) \rightarrow (s, i)$

状態 q である節にいて，その節のラベルが σ であると，状態は s へ遷移し i 番目の枝へ進む。$i=-1$；その節の親へ進む。$i=0$；その節にとどまる。$i=m(1 \leqq m \leqq r(\sigma))$；左から m 番目の子へ進む。

次のような関数を用いる。

$s(i)$；i 動作後の TWA の状態

$N(i)$；i 動作後に TWA がいる節

$s(0)=s_0$, $N(0)=$ 根である。ある木 t に対して，$s(0)=s_0$, $N(0)=$ 根でその木をよみはじめ，ある i に対して $s(i)=s_F$, $N(i)=$ 根となるとき，TWA は i 動作で t を認識するという。状態 s_F からの遷移はないものとする。

TWA, A, により認識される木の集合は次のように与えられる。

$T_{\mathrm{W}}(A)=\{t \mid t \in T_\Sigma, s(i)=s_F, N(i)=\text{根}:\ \text{ある}\ i\ \text{に対して}\}$

この木の上を歩くオートマトンに制限を加えて，制限された形の木の上を歩くオートマトンを定義する。

定　義　4.2

制限された木の上を歩くオートマトン

$\mathrm{RTWA}=(S, \Sigma, \delta_R, s_0, s_F)$

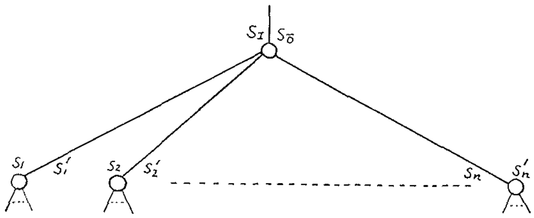
TWA に対して次のような制限が加えられる。

① RTWA が枝をそれぞれ異なる方向に1度ずつ通ったとき，その枝は RTWA により処理されたという。ある木について，その木の枝がすべて処理されたとき，その木は処理されたという。RTWA は木を根から出発して処理する。したがって，木の処理を終了したとき，かならず根へもどっている。処理は，まだ処理を終っていない最左，最下の枝の処理から進められる。

② 遷移規則 $(s, \sigma)\to(q, i)$ において，(s, σ) に対してただ 1 つの 1 より大きな i か，-1，またはその両方が対応している。0 は $(s_F, 0)$ という形でしかあらわれない。最終状態 s_F からの遷移はない。

③ 遷移規則は，各 $\sigma\in\Sigma$ に対して次のようなグループの形で与えられる。$r(\sigma)=n$。

$$
\begin{array}{l}
(s_I, \sigma)\to(s_1, 1)\\
(s_1', \sigma)\to(s_2, 2)\\
(s_2', \sigma)\to(s_3, 3)\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots\\
(s_n', \sigma)\to(s_o, -1)\\
\ (s_I, s_o),\ (s_1, s_1'),\ \cdots\cdots,(s_n, s_n')
\end{array}
$$



は，RTWA が節 σ へ入るときの状態と，でるときの状態の対，および σ の左から 1 番目の子，…，σ の左から n 番目の子へ σ から入るときの状態と，それらから σ へ向ってでてくるときの状態の対である。$M_{s_i}(\sigma)=s_i'$；節 σ に，上から状態 s_i で入り，状態 s_i' で上へでることを示す。

木 t について，$s(0)=s_0$，$N(0)=$ 根で，処理を開始し，$s(2n-1)=s_F$，$N(2n-1)=$ 根となるとき，RTWA は t を認識するという。ただし，n はその木の節の数である。

RTWA, A, により認識される木の集合は次のように定義される。

$T_{\mathrm{RW}}(A)=\{t|t\in T_\Sigma,\ s(2n-1)=s_F,\ N(2n-1)=$ 根, n；木の節の数$\}$

木を入力とする 2 つのオートマトンにおいて，それぞれが認識する木の集合が等しいとき，それらの 2 つのオートマトンは等価であるという。

定　理　4.1

任意の有限状態上昇型木オートマトンに対して，それと等価な制限された木の上を歩くオートマトンを構成することができる。

証明： 制限された木の上を歩くオートマトンの構成のみを示す。$\mathrm{UA}=(\Sigma, A, \alpha, A_F, a_0)$ に対して，$\mathrm{RTWA}=(\Sigma, S, \delta_R, s_0, s_F)$ を構成する。

a）ランクが 1 以上の記号について，

$\sigma\in\Sigma_n$ に対する遷移規則が次のようであるとする。α_σ: $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \sigma)\to b$, $a_1, a_2, \cdots, a_n, b\in A$。新しい状態 $[a, X, k]$ を導入する。$a\in A$, X；U または D(U；RTWA が上向きに節に入るとき，D；RTWA が下向きに節に入るとき)，k；k 番目の枝へ進むとき $(k=-1, 0, 1, 2, \cdots)$。状態 b が UA のすべての遷移規則において，その左辺の状態対の左から何番目にあらわれているかを調べ，それらのすべての番号の集合を K_b とする。$k\in K_b$ として，α_σ に対して，

$$
\begin{array}{l}
([b, D, k], \sigma)\to([a_1, D, 1], 1)\\
([a_1, U, 1], \sigma)\to([a_2, D, 2], 2)\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
(([a_n, U, n], \sigma)\to([b, U, k], -1)
\end{array}
$$

すべての $k\in K_b$ に対して，

$$
\begin{array}{l}
([b, D, k], \sigma)\to([a_1, D, 1], 1)\\
([a_n, U, n], \sigma)\to([b, U, k], -1)
\end{array}
$$

という対の形の遷移規則を作る。

$b\in A_F$ であるときは，さらに次のような遷移規則を作る。

$$(s_0, \sigma) \to ([a_1, D, 1], 1)$$
$$([a_n, U, n], \sigma) \to (s_F, 0)$$

b) ランクが0の記号について,

$\lambda \in \Sigma_0$ に対しては, $\alpha: (a_0, \lambda) \to \alpha_\lambda$, $a_0, \alpha_\lambda \in A$, と定状態が対応している。すべての $k \in K_{\alpha\lambda}$ に対して,

$$([\alpha_\lambda, D, k], \lambda) \to ([\alpha_\lambda, U, k], -1)$$

という遷移規則を作り, $\alpha_\lambda \in A_F$ であるときは, $(s_0, \lambda) \to (s_F, 0)$ という遷移規則も作る。

以上の構成より, $S = \{[a, X, k] | a \in A,\ X \in \{U, D\},\ k \in K_a$; α から構成する$\} \cup \{s_0\} \cup \{s_F\}$。$\delta_R$ は上の a), b) によって構成される。 」

定理 4.2

任意の制限された木の上を歩くオートマトンに対して，それと等価な有限状態上昇型木オートマトンを構成することができる。

証明： 有限状態上昇型木オートマトンの構成のみを示す。RTWA $= (\Sigma, S, \delta_R, s_0, s_F)$ に対して, UA $= (\Sigma, A, \alpha, A_F, a_0)$ を構成する。

a) ランクが1以上の記号について,

$\sigma \in \Sigma_n$ に対する遷移規則が次のようであるとする。$\delta_{R\sigma}$: $(s_I, \sigma) \to (s_1, 1)$, $(s_1', \sigma) \to (s_2, 2)$, $\cdots$, $(s_n', \sigma) \to (s_o, -1)$, $s_I, s_o, s_1, s_1', \cdots, s_n, s_n' \in S$。新しい状態 $[s_I, s_o]$, $[s_1, s_1']$, $[s_2, s_2']$, $\cdots$, $[s_n, s_n']$ を導入する。$\delta_{R\sigma}$に対して,

$$([s_1, s_1'], [s_2, s_2'], \cdots, [s_n, s_n'], \sigma) \to [s_I, s_o]$$

という形の遷移規則を作る。

b) ランクが0の記号について,

$\lambda \in \Sigma_0$ に対しては, $\delta_{R\lambda}$: $(s_I, \lambda) \to (s_o, -1)$, $s_I, s_o \in S$。これに対して, $(a_0, \lambda) \to [s_I, s_o]$ という形の遷移規則を作る。

以上の構成より, $A = \{[s, q] | M_s(\sigma) = q, \sigma \in \Sigma$: δ_R から構成する$\} \cup \{a_0\}$, $A_F = \{[s_0, s_F]\}$。α は上の a) ,b) によって構成される。 」

5. 木の上を歩く変換機

木の上を歩くオートマトンに出力機構を付加することにより，木の上を歩く変換機が構成される。これは木から言語への変換を行う変換機である。

定義 5.1

木の上を歩く変換機

TWT $= (S, \Sigma, \Omega, \delta_T, s_0, s_F)$

S; 状態の有限集合

Σ; ランク付きアルファベット（入力木に対するアルファベット）

Ω; 出力アルファベット

$s_0 \in S$; 初期状態

$s_F \in S$; 最終状態

δ_T; 変換規則

$S \times \Sigma \times S \times I \times \Omega^*$ の有限部分集合

$$I = \{-1, 0, 1, \cdots, n\},\ n = \max(r(\sigma)),\ \sigma \in \Sigma$$

$(q, \sigma) \to (s, i, w)$

状態 q である節にいて，その節のラベルが σ であると，状態は s へ遷移し i 番目の枝へ進み，w を出力する。

TWA の考察において用いた関数に加えて，次の関数を用いる。

$\theta(i)$；i 動作までにおける TWT の出力

$s(0)=s_0$, $N(0)=$ 根, $\theta(0)=\varepsilon$ である。ある木 t に対して，$s(0)=s_0$, $N(0)=$ 根, $\theta(0)=\varepsilon$ でその木の変換を開始し，ある i に対して $s(i)=s_F$, $N(i)=$ 根, $\theta(i)=y$ となるとき，TWT は i 動作で t を y に変換するという。状態 s_F からの遷移はないものとする。

TWT による木 t に対する出力は，

$T_{\mathrm{T}}(t)=\{y|y\in\Omega^*,\ s(i)=s_F,\ N(i)=\text{根},\ \theta(i)=y：\ \text{ある } i \text{ に対して}\}$

木の集合 $V\subseteq T_\Sigma$ に対しては，

$T_{\mathrm{T}}(V)=\bigcup_{t\in V} T_{\mathrm{T}}(t)$

TWT は，$V\subseteq T_\Sigma$ から $T_{\mathrm{T}}(V)\subseteq\Omega^*$ への変換を行っている。これを言語の変換としてとらえると，$\bigcup_{t\in V} f_y(t)\to T_{\mathrm{T}}(V)$ となる。この木の上を歩く変換機に制限を加えて，制限された形の木の上を歩く変換機を定義する。

定　義　5.2

制限された木の上を歩く変換機

RTWT $=(S, \Sigma, \Omega, \delta_{RT}, s_0, s_F)$

TWT に対して次のような制限が加えられる。

① RTWT が枝をそれぞれ異なる方向に 1 度ずつ通ったとき，その枝は RTWT により処理されたという。ある木について，その木の枝がすべて処理されたとき，その木は処理されたという。RTWT は木を根から出発して処理する。したがって，木の処理を終了したときかならず根へもどっている。

② 変換規則 $(s, \sigma)\to(q, i, w)$ において，(s, σ) に対してただ 1 つの 1 より大きな i か，-1，またはその両方が対応している。0 は $(s_F, 0)$ という形でしかあらわれない。最終状態 s_F からの遷移はない。

③ 変換規則は，各 $\sigma\in\Sigma$ に対して次のようなグループの形で与えられる。$r(\sigma)=n$。

$$\begin{array}{l} (s_I, \sigma)\to(s_{i1}, i1, w_{i1}) \\ (s'_{i1}, \sigma)\to(s_{i2}, i2, w_{i2}) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (s'_{in}, \sigma)\to(s_o, -1, w_{in+1}) \end{array}$$

$(i1, i2, \cdots, in)$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の置換である。$M_{s_I}(\sigma)=s_o$ のとき，s_I で上から σ に入り，s_o で上へ σ をでるまでに得られる出力を $W(s_I, s_o)$ とかくことにすると，

$W(s_I, s_o)=w_{i1}W(s_{i1}, s'_{i1})\,w_{i2}W(s_{i2}, s'_{i2})\cdots\cdots W(s_{in}, s'_{in})\,w_{in+1}$ となる。

RTWT による木 t に対する出力は，

$T_{\mathrm{RT}}(t)=\{y|y\in\Omega^*,\ s(2n-1)=s_F,\ N(2n-1)=\text{根},\ \theta(2n-1)=y,\ n；\text{木の節の数}\}$

木の集合 $V\subseteq T_\Sigma$ に対しては，

$$T_{\mathrm{RT}}(V)=\bigcup_{t\in V} T_{\mathrm{RT}}(t)$$

3. で定義された有限状態上昇型木変換機に制限を加えたものと，制限された木の上を歩く変換機との関連について考察する。

定　義　5.3

制限された有限状態上昇型木変換機

$\mathrm{RUT}=(S, \Sigma, \Omega, X, \delta_{RU}, s_F)$

制限は δ_U の最後の項の $T_{\Omega,X}$ に対して加えられる。$T_{\Omega,X}$ の要素は次のような形の木だけからなるものとする。

$$\omega(\alpha_1\, x_{i1}\, \alpha_2\, x_{i2} \cdots x_{in}\, \alpha_{n+1})$$

$(i1, i2, \cdots, in)$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の置換である。$\alpha_i \in \Omega^*$ $(i=1, 2, \cdots, n+1)$。$r(\omega)=|\alpha_1\, x_{i1}\, \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}|$ ($|w|$; 系列 w の長さ)。

定　理　5.1

任意の制限された木の上を歩く変換機に対して，それと等価な制限された有限状態上昇型木変換機を構成することができる。

証明：制限された有限状態上昇型木変換機の構成のみを示す。$\mathrm{RTWT}=(S, \Sigma, \Omega, \delta_{RT}, s_0, s_F)$ に対して，$\mathrm{RUT}=(S', \Sigma, \Omega, X, \delta_{RU}, S_F)$ を構成する。

a) ランクが1以上の記号について，

$\sigma \in \Sigma_n$ に対する変換規則が次のようであるとする。$\delta_{RT\sigma}$: $(s_I, \sigma) \rightarrow (s_{i1}, i1, \alpha_1)$, $(s'_{i1}, \sigma) \rightarrow (s_{i2}, i2, \alpha_2), \cdots, (s'_{in}, \sigma) \rightarrow (s_o, -1, \alpha_{n+1})$, $s_I, s_o, s_{i1}, s'_{i1}, \cdots, s_{in}, s'_{in} \in S$。$(i1, i2, \cdots, in)$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の置換。新しい状態 $[s_I, s_o], [s_1, s'_1], \cdots, [s_n, s'_n]$ を導入する。$\delta_{RT\sigma}$ に対して，

$([s_1, s'_1], [s_2, s'_2], \cdots, [s_n, s'_n], \sigma) \rightarrow ([s_I, s_o], \omega(\alpha_1\, x_{i1}\, \alpha_2 \cdots x_{in}\, \alpha_{n+1}))$, $(i1, i2, \cdots, in)$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の置換，ω は任意，

という形の変換規則を作る。

b) ランクが0の記号に対して，

$\lambda \in \Sigma_0$ に対しては，δ_{RT_λ}: $(s_I, \lambda) \rightarrow (s_o, -1, \alpha)$, $s_I, s_o \in S$。これに対して，$(\phi, \lambda) \rightarrow ([s_I, s_o], \alpha)$ という形の変換規則を作る。

以上の構成より，$S'=\{[s, q] \mid M_s(\sigma)=q, \sigma \in \Sigma$: δ_{RT} から構成する$\}$, $S_F=\{[s_0, s_F]\}$。δ_{RU} は上の a), b) によって構成される。 」

この定理の逆は，制限をつけなければなりたたない。その制限は次のようなものである。

制限：変換規則の左辺の各 σ に対して唯一つの右辺だけが対応している。

6. 構文向き変換機構および変形文法との関連

[1] 構文向き変換機構との関連

構文向き変換機構は，生成される文の構文も考慮にいれながら言語の変換を行なう機構である。導出木は構文を表現しているのであるから，この変換機構は木変換機と密接な関連がある。構文向き変換機構の数学的な形式化，その性質についての考察，および一般化について，Aho・Ullman による一連の研究がある[6),7)]。構文向き変換機構および一般化された構文向き変換機構に対して，それぞれ，SDTS, GSDTS という略称を用いる。これらと木変換機との間に次のような関係が示されている。

定　理　6.1

(1) 任意の SDTS に対して，それと等価な UT を構成することができる。

(2) 任意の GSDTS に対して，それと等価な DT を構成することができる (Martin・Vere[5)])。

(3) 任意の GSDTS に対して，それと等価な EUT を構成することができる。

証明：（略）

木の上を歩く変換機との間に次のような関係が示されている。

(1) 任意の木のうえを歩く変換機に対して，それと等価な GSDTS を構成することができる (Aho･Ullman[6])。

(2) 任意の GSDTS に対して，それと等価な Pd 記憶をもった木のうえを歩く変換機を構成することができる (Martin･Vere[5])。

ただし，上の (1), (2) での木の上を歩く変換機は文脈自由文法を内蔵した形で定義されており，本論文において定義されているものとは同一ではない。本論文における，木の上を歩く変換機の方がより一般的な形で定義されている。

[2] 変形文法との関連

Chomsky により提案されている変形文法を数学的に形式化しようとする試みがいくつかある。Ginsburg･Partee[9] により形式化された変形文法における変形規則は，非常に強力な木の変換を行なう。Salomaa は，彼等の木の変換（すなわち変形規則）を用いると，任意の帰納的可算言語を，正規言語に対する木の集合から変換によって生成できることを示している[8]。このような木の変換とこれまで考察してきた木変換機との間の階層についての考察も必要であろう。

7. あとがき

木から木への変換を行なう有限状態上昇型木変換機，有限状態下降型木変換機，拡張有限状態上昇型木変換機の間の関連についての考察を行ない，木変換機による新しい言語の階層の構成への１つの基礎を与えた。制限された木の上を歩くオートマトンと有限状態上昇型木オートマトンの等価性を示し，木の上を歩くオートマトンに出力構造を付加することにより木の上を歩く変換機を構成した。制限された木の上を歩く変換機と制限された有限状態上昇型木変換機の間の関連を明らかにした。さらに，構文向き変換機構，変形文法との関連についても，簡単にではあるが，考察を進めた。

木変換機による言語の階層の構成についてのより詳細な考察，文法との関連，木の上を歩くオートマトンと木の上を歩く変換機についてのより詳細な考察，などが今後に残されていると考えられる。

各定理の証明におけるオートマトン，変換機の構成は，実際的なものである。

謝　辞

本研究は，主として，著者が精密工学科自動制御工学講座に在学中になされたもので，研究を進めるにあたり，いろいろと御指導，御鞭撻いただいた，三浦良一教授，小山昭一助教授，自動制御工学研究室の方々に厚く感謝いたします。

参考文献

1) Rounds, W. C.: Math. Systems Theory, 4 (1970).
2) Thatcher, J. W.: JCSS, 4 (1970).
3) Levy, L. S., Joshi, A. K.: Math. Systems Theory, 6 (1972).
4) 早瀬道芳, 上林弥彦: 電子通信学会オートマトン･インホメーション理論研究会資料, A 69-42 (1969).
5) Martin, D. F., Vere, S. A.: Proc. ACM Symp. on Theory of Computing, (1970).
6) Aho, A. V., Ullman, J. D.: Inf. and Cont., 19 (1971).
7) Aho, A. V., Ullman, J. D.: JCSS, 3 (1969).

8) Salomaa, A.: Inf. and Cont., 18 (1971).
9) Ginsburg, S., Partee, B.: Inf. and Cont., 15 (1969).
10) Brainerd, W. S.: Inf. and Cont., 14 (1969).
11) Mezei, J., Wright, J. B.: Inf. and Cont., 11 (1967).
12) Thatcher, J. W., Wright, J. B.: Math. Systems Theory, 2 (1968).