HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	長波長ホログラフィにおける波長程度の物体の解像に関する考察
Author(s)	青木, 由直
Citation	北海道大學工學部研究報告, 71, 127-134
Issue Date	1974-06-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41210
Type	departmental bulletin paper
File Information	71_127-134.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

長波長ホログラフィにおける波長程度の物体の解像に関する考察

青木由直*

(昭和48年10月30日受理)

A Consideration on the Image Resolution of Wavelength-Order Objects in Long-Wavelength Holography

Yoshinao AOKI

(Received October 30, 1973)

Abstract

A consideration on the image resolution of wavelength-order objects was conducted in long-wavelength holography using sound-waves and radio-waves. A general consideration was conducted with reference to the experimental results of sound-wave holography and in addition an ideal hologram with an infinite aperture was analyzed theoretically. The analysis was done by estimating the spatial frequency components which propagate through free space between the object and the hologram plane and are recorded on the hologram. The obtained result shows that a free space can be considered as a filter which cuts off the spatial frequency components higher than the inverse of a wavelength. A transfer function of the free space was obtained and a discussion on the image resolution based on this transfer function was conducted. The relation between the image resolution and reactive energy stored by the object is also discussed.

1. まえがき

電波や音波の長波長波動領域でのホログラフィの基礎的研究において問題になることのひとつとして，波長程度の大きさの物体の像がホログラフイックな方法で得られるかということがある。これは長波長ホログラフィの室内実験などでは，用いる物体の大きさが波長の数倍，時には波長程度のものが選ばれることがしばしばあり，波長と物体の大きさの関係が再生像の解像とどのように関連しているかが問題となってくる。一般に波長より小さな物体であれば，物体が波に埋れて物体の情報をとり出せなくなると考えられる。しかしホログラフィック系の構成として，波長より小さな空間部分から物体波のみが放射されるようにしておき，別に用意した参照波信号を用いてホログラムを作製するような場合は事情が異なってくると考えられる。例えば波長よりもずっと細い線で作ったアンテナを考えた場合，このアンテナを線物体とみなして作製したホログラムから線像が再生されれば，このホログラフイィク系では波長以下の寸法の物体の像が得られたといえるのではないかといった疑問がでてくる。本論文ではこのような問題について，空間が波の伝搬に関しては空間周波数フィルターとみなしうることに着目して考察をおこなっている。

* 工学部電子工学科

2. 実験と一般的考察

ホログラムは物体の情報を持つ物体波と，既知の波面（位相面）を持つ参照波との干渉縞を記録したものである。電波や音波領域においては参照波を電気的にシミュレートすることができるから，図1，図2の構成でホログラムを作製することができる。図1では波源そのものを物体とみなし，波源から放射される一次波を受波器で受け，電気回路を通ってきた参照波信号と重ね検波し，これをホログラム信号として記録する。図2では波源と受波器の間にスクリーンをおき，スクリーンに切り抜かれたスリットから回折されてゆく二次波を物体波とみなし前と同様にしてホログラムを記録する。

実際に図1の構成で作製された音波ホログラム[1]を図3に示す。ここで音波の周波数は 15 KHz に選ばれており，図3には音源（ツィータ）のホログラムであるフレネル・ゾーン・プレートができている。これは図1において受波器で二次元のホログラム面を走査していっても参照波信号回路の電気長が変化しないような構成になっているため，平面波が電気的にシミュレートされ，波源からの球面波とみなせる物体波と干渉をおこしゾーン・プレートが形成されているためである。波源からの波と参照波信号は干渉するから音波の周波数を変えてもゾーン・プレートは形成され，ただ輪帯の大きさが異なってくることになる。

一方図2のような構成で作製したホログラム[1]を図4-(a)～(c)に示す。物体はボール紙のスクリーンに約 3.5 cm のスリット幅で切り抜いた文字 S である。ここで音波の周波数は 7 KHz (a), 10 KHz (b), 15 KHz (c) と選んであるから波長にすれば 4.3 cm, 3.4 cm, 2.3 cm の音波で作製したホログラムとなっている。ここで文字のスリット幅がほぼ音波の波長に等しい図 4-(b) のホログラムでは干渉縞がみとめられるが，スリット幅が波長より小さな図 4-(a) では干渉縞がほとんどみられなくなってきている。一方スリット幅が波長より大きな図 4-(c) ではっきりした干渉縞がみられ，このホログラムから光学的像再生をおこなえばはっきりと元の物体の文字 S の像が再生される[1]のが観察できる。

これらの実験結果よりつぎのような疑問

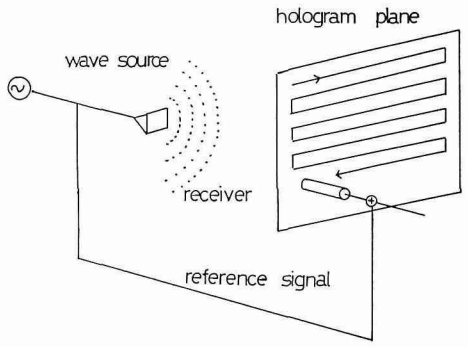


図1 波源を物体とみなしたホログラムの作製

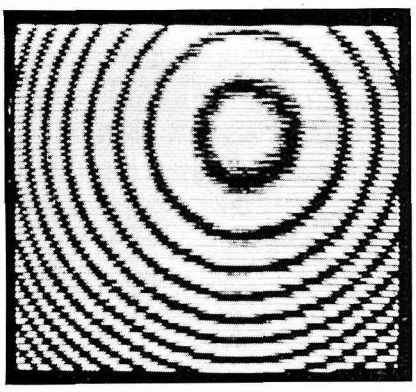


図3 音源のホログラム

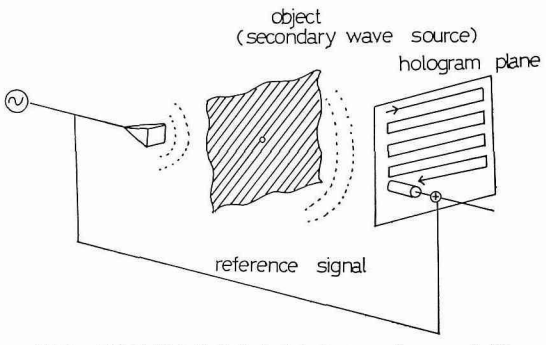
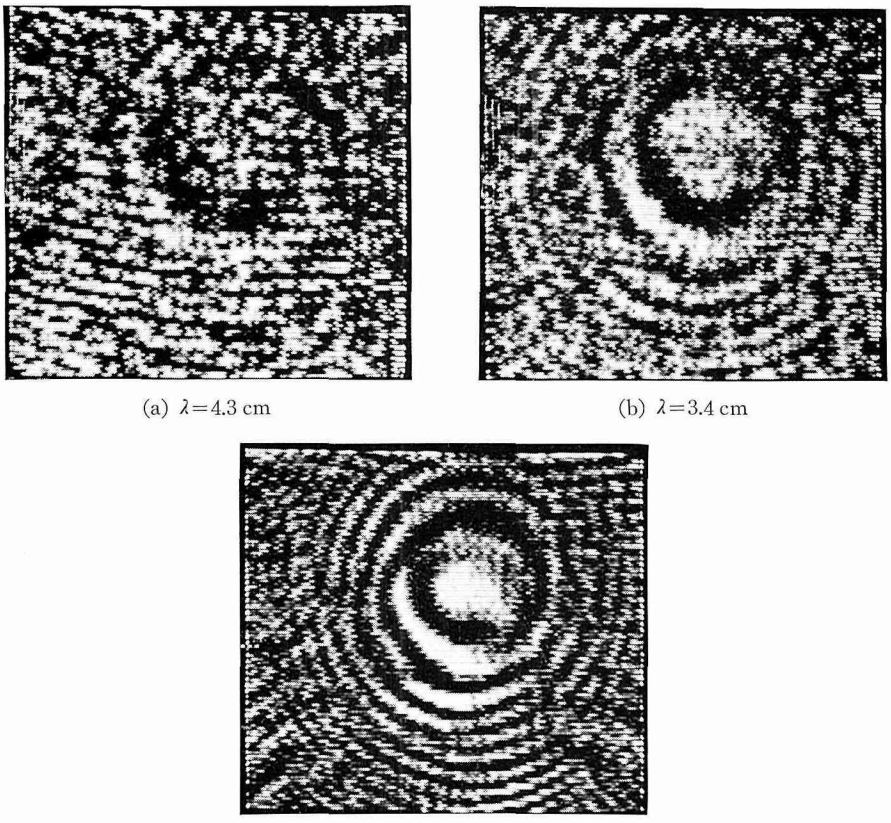


図2 2次波源を物体とみなしたホログラムの作製



(a) $\lambda=4.3$ cm　　(b) $\lambda=3.4$ cm

(c) $\lambda=2.3$ cm

図4　音波の波長 λ を変化させて作製したホログラム

がでてくる。図1のような構成で音波の周波数を低くしてゆけば波長をいくらでも音源の大きさよりも大きくすることができる。音源から自由空間を伝搬してゆく音波と電気回路を通ってゆく参照波信号は周波数にかかわりなく干渉をおこすから，低周波の音波でも音源のホログラムが記録でき，したがって記録されたホログラムから波長以下の物体である音源の像を再生できるのではないか。これは音波に限らず音源を線状テンテナで置換えれば，電波の波長よりずっと細い線の像が得られるのではないか。しかし一方図4の実験結果から図2の構成で得たホログラムは実際には波長以下のスリット幅になれば干渉縞があらわれなくなってきている。すると図1と図2の構成において本質的な違いがあるのかといった疑問もでてくる。

本論文ではこのような疑問について考察をおこなっている。実際問題としては長波長ホログラフィにおいて再生像の解像度に影響を与える要因としてはホログラム開口，送受波器の指向性，受波器の有効開口，波動場の記録の仕方などがある。しかし本論文では理想的な場合を考えて，ホログラム面での波動場の強さそのものがホログラムとして記録され，ホログラム開口を無限大と仮定して考察をおこなっている。

3.　無限大開口のホログラム

図 5-(a) に示すように無限大のスクリーンに細いスリットを切った物体を仮定し，図2に示す構成でホログラムを作製することを考える。この場合スリットは充分広い部分まで照明波で照射

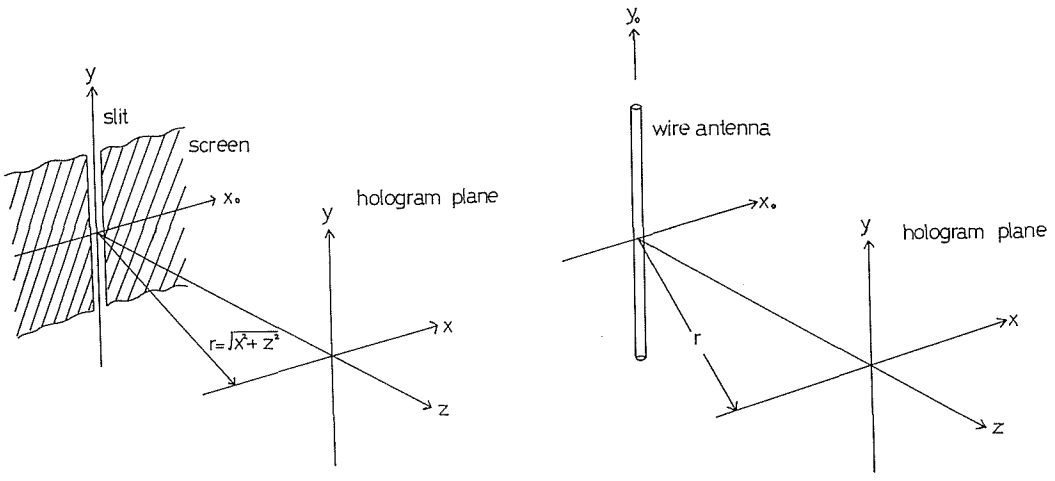


図5 無限長スリット (a) と無限長線状アンテナ (b) のホログラム作製

されているものと仮定すれば，ホログラムは x 軸方向の一次元のものを考えれば充分である。スリット幅が充分小さいとすれば，このスリットからもれてくる物体波は円筒波となり x 座標のみを考えれば物体波 $0(x)$ はつぎのようにあらわされる。

$$0(x)\propto\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}e^{-i(2\pi/\lambda)\sqrt{x^2+z^2}} \tag{1}$$

ただし λ は波長で z は物体面とホログラム面の距離である。また図5-(b) のように無限長の導線に電流を流したアンテナを仮定すれば，その放射界はやにり式 (1) に比例したものとなるから，このアンテナを物体とみなして図1の構成でホログラムを作製する場合にも式 (1) を物体波とみなして議論できる。

x 座標に関して位相，振幅変化のない参照波信号を b として，無限長の一次元ホログラムが二乗検波で記録されたとすればホログラム $h(x)$ はつぎのようにかける。

$$h(x)=|b|^2+|0(x)|^2+b^*0(x)+b0^*(x) \tag{2}$$

式 (2) のホログラムに元の物体の構造がどのくらいの細かさまで記録されているのかを検討すれば，再生像の解像の度合のひとつの基準とみなすことができる。つまり物体のもつ空間周波数成分がどのくらいまでホログラムに記録されているかを検討すればよいわけであるから，物体波の空間座標に関するフーリェ成分と，ホログラムのそれを比較すればよい。式 (1) の物体波が $z=0$ なる物体面で実際にはどんな関数になるかは問題のあるところであるが，一応円筒波が線状物体から放射されていると仮定し一次元のみで考えて $o(x_0)=\delta(x_0)$ なる δ 関数を考える。ただし x_0 は図5に示されている物体面の座標である。この物体の関数のフーリェ変換は，空間周波数を f_x とすると $O(f_x)=1$ となりすべての空間周波数成分を一様に含む。

つぎに式 (2) のホログラムのフーリェ変換について考えてみる。こで式 (2) において実像を再生する項 $b0^*(x)$ のみに着目してそのフーリェ変換 $H'(fx)$ を求めるとつぎのようになる[2]。

$$H'(f_x)\propto\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}e^{i(2\pi/\lambda)\sqrt{x^2+z^2}}e^{-i2\pi f_x x}dx=\begin{cases}i\pi H_0^1(2\pi z\sqrt{(1/\lambda)^2-f_x^2}) & |f_x|<\dfrac{1}{\lambda}\\ 2K_0(2\pi z\sqrt{f_x^2-(1/\lambda)^2}) & |f_x|>\dfrac{1}{\lambda}\end{cases} \tag{3}$$

ここで $H_0^1=J_0+iN_0$ で H_0^1 は第1種ハンケル関数，J_0, N_0 は0次のベッセル関数とノイマン関

数，K_0 0次の変形されたベッセル関数である。式 (3) のハンケル関数の絶対値 $|H_0^1|$ を考えると定数 $2\pi z/\lambda$ が充分大きければ $|f_x|$ が $1/\lambda$ より小さな範囲では f_x の変化に対して $|H_0^1|$ の値は急激に変化しないが，$|f_x|$ が $1/\lambda$ に近づくと急速に無限大に近づく。一方変形されたベッセル関数 K_0 は $|f_x|$ の値が $1/\lambda$ から増加するにしたがって無限大より急速に0に向って減少してゆく[3]。このことは物体のもつ空間周波数成分のうち $1/\lambda$ よりも低周波成分はホログラムに記録されるが，$1/\lambda$ よりも高周波成分は空間を伝搬する際に減衰波となって，無限大の開口をもつホログラムであっても記録されないことを意味している。ただし式 (3) において $|f_x|=1/\lambda$ の周波数成分が無限大になっているのは，無限大開口のホログラムを考えているため，原点から離れるにしたがってホログラム面の x 座標軸上に記録される物体波は x 軸に平行に伝搬してゆくものに近づき，記録される干渉縞の1周期が1波長にいくらでも近づいてゆくので，この空間周波数成分が無限の強さをもってくることを意味している。

式 (3) のスペクトル分布関数は物体からの回折波が空間を伝搬する結果として得られるものであるから，空間の伝達関数とみなすこともできる。この場合式 (3) は $|f_x|<1/\lambda$ の空間周波数を通過させるフィルターの特性をあらわしているから，空間を空間周波数に対する一種のフィルターとみなすことができる。次節ではこの空間フィルターの伝達関数についてさらに検討してみる。

4. 空間の空間周波数フィルター

前節では図 5-(a) の物体を用い図2の構成でホログラムを作成した場合について検討したが，この場合スリットからの回折波が x-z 面の全ての方向へ同じ強さで伝搬してゆくものと仮定している。しかし実際には傾斜因子であらわされる効果で，スリットからの回折波は一種の指向性をもつ。したがってこの傾斜因子も考慮した空間の空間周波数フィルターの伝達関数を求めてみる。スリットのかわりに図6に示される小さなホールを仮定し，これからの回折波を物体波とみなし，前節と同様に無限大開口のホログラムを作製したと考える。この場合物体波は次のような球面波となる。

$$0(x,y)\propto\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-i(2\pi/\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

したがって前節と同様の議論で式 (4) のフーリエ変換を計算し，定数係数を無視した伝達関数 $H'(f_x,f_y)$ を求めるとつぎのようになる。

$$H'(f_x,f_y)=\frac{e^{i(2\pi z/\lambda)\sqrt{1-(\lambda f)^2}}}{\sqrt{1-(\lambda f)^2}} \tag{5}$$

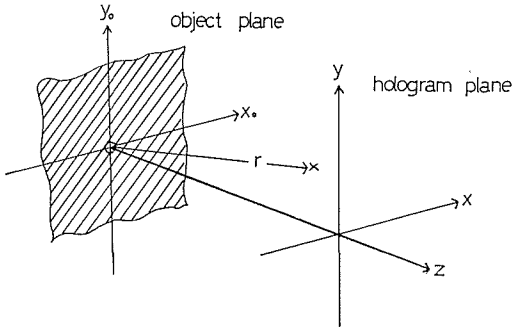


図6　ピンホールのホログラム作製

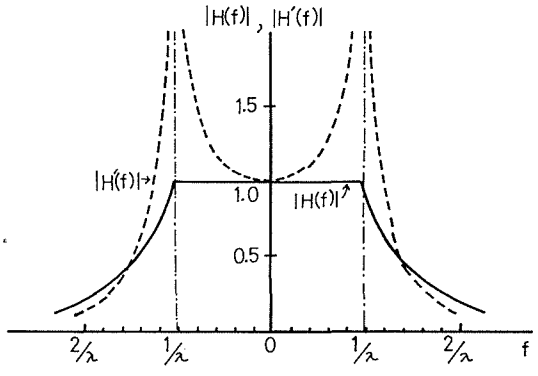


図7　空間の空間周波数特性

ただし図6の x 座標，y 座標に関する空間周波数を f_x, f_y として $f=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$ である（付録 I 参照）。式 (5) の伝達関数の絶対値 $|H'(f_x, f_y)|$ をグラフに描くと図7の点線のようになる。このグラフは式 (3) の伝達関数と同じ傾向を示し，$|f|=1/\lambda$ で伝達関数の絶対値は無限大となり $|f|>1/\lambda$ では $|f|$ の増加にしたがって急速に0に近づく。この結果はやはり $|f|>1/\lambda$ なる周波数成分は減衰波となってホログラムに記録されなくなってくることを示している。

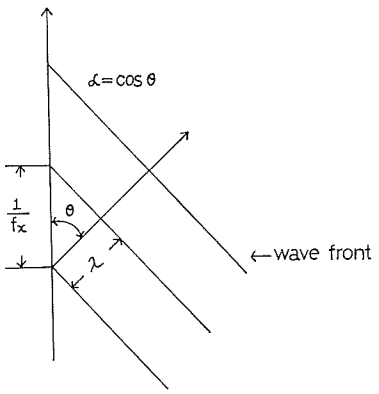


図8 回折格子

つぎにレーレー・ゾンマーフェルドの回折公式にあらわれてくる傾斜因子 $\cos(z, r)$ を考えると

$$\cos(z, r)=\gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \tag{6}$$

なる関係がある[4]。ただし α, β, γ は図6において穴からの出射光線（音波であれば音線）の x_0 軸，y_0 軸，z 軸に関する方向余弦である。式 (6) は穴からの回折波は $\alpha=\beta=0$，つまり z 軸方向に最大の強さで放射され，$\alpha^2+\beta^2=1$，つまりスクリーン面上に沿って回折波は伝搬してゆかぬことを示す係数である。したがって方向余弦 α, β, γ をもって穴から出射してゆく光線で，この光線が垂線となるような波面をもつ平面波を代表させれば，式 (6) はこのような平面波の分布を決定する重み係数とも考えられる。物体をあらわす関数（図6では δ 関数）のフーリエ係数を求めることは物体波を平面波で展開することである。したがって点物体の場合式 (6) の傾斜因子を考慮するということは点物体の空間周波数分布が一様なものから式 (6) のような分布をもったものに変ったと考えられる。ここで物体面の x 軸のみを考えればよい場合 特定の空間周波数成分 f_x に着目すればこれは $1/f_x$ の周期をもつ回折格子をあらわしており，この回折格子から回折される平面波の方向は図8を参照して求めると式 (7) のように求まる。物体面を二次元として議論しても同様の結果が得られ結局つぎの関係が求まる。

$$\alpha=\lambda f_x, \quad \beta=\lambda f_y \tag{7}$$

式 (7) の関係を式 (6) に代入し，これを式 (5) に掛ければ前述の議論より傾斜因子の効果も含めた空間の伝達関数 $H(f_x, f_y)$ がつぎのように求まる。

$$H(f_x, f_y)=e^{i(2\pi z/\lambda)\sqrt{1-(\lambda f)^2}} \tag{8}$$

式 (8) の結果は物体関数を形成する各々の空間周波数成分がやはり波動方程式を満足しながら伝搬してゆくという事実から得られる結果[4]と一致している。式 (8) の伝達関数の絶対値をグラフに描くと図7の実線のようになる。このグラフは $|f|<1/\lambda$ なる空間周波数を通過させるフイルターの特性を示している。

5. リアクティブ・エネルギーと解像

図1の構成で作製された図3のホログラムが示唆するように波源の寸法（図5の例ではスリット幅またはアンテナの太さ）が波長よりも小さな場合も，波源からの放射波と参照波信号は干渉をおこし干渉縞が記録され，ホログラムが作製される。しかしこのホログラムには図7の解析結果が示すように，波長より細かな物体の情報は空間を伝搬する際にフィルターされ記録されなくなる。したがって無限大開口の理想的ホログラムといえどもこのホログラムから読み出すことのできる物体点は像面では波長以上に拡がったものになる。これは逆にいうと点波源が波長以内の

空間のどこに存在しているのかわからないという不確定性を意味している。この不確定性は波源の寸法をいくら小さくしてゆこうとも，波源のまわりの少なくとも1波長程度の空間または媒質が波動の振動に相関をもった振動をおこしているためとも解釈できる。しかし，例えば波長よりも小さな部分に振動膜をはってまわりを極力固定した音源を考えれば，波長以下の空間に局在した音源が考えられる。しかしこの場合振動膜を振動させ放射音波を得るためには非常に大きなリアクティブ・エネルギーが必要となろう。このような大きなリアクティブ・エネルギーを波源に与えて，波源点の位置を波長以内ですこしでも分解しようとするのは，図7において減衰波となる空間周波数成分を利用することに対応すると考えられる。つまり波源の波長以下の微細構造は減衰波となって空間を伝搬してゆかないが，減衰波といえども大きなエネルギーが与えられればそれだけ空間を伝搬してゆく。したがって物体がリアクティブ・エネルギーを貯えられる構造になっているか否かは解像に大きく影響を与えると考えられる。この観点からいえば図1の構造でホログラムを作製する場合，使用する物体はアンテナとかスピーカーなどの一次波源であり，大きなリアクティブ・エネルギーを貯えられ，強い放射界が得られる構造になっているためはっきりした干渉縞のホログラムが記録できるであろう。一方図2の構成では物体となる二次波源はリアクティブ・エネルギーを貯えるには不都合であり，したがって波長以下のスリットになれば干渉縞が記録されなくなってゆくであろう。図4の実験結果は点波源ではないが図2の構成では波長がスリット幅より大きくなってゆくとホログラムの干渉縞がもはや形成されなくなってゆくことをはっきりと示している。

像の解像ということは原理的には物体上の二点がみわけられるかどうかということである。これまでの議論から無限大開口の理想的なホログラムから再生される点物体の像は少なくとも波長以上に拡がったものになるということがいえるから，波長以内の空間に存在する二個の物体点はみわけられないことがすぐ結論される。では波長以下の物体が存在するか否かといったことが判定できるかといった問題がある。もし判定できたとすれば，物体として用いているものが波長以下のものであるといった余分の情報さえあれば，一応波長以下の物体を検知できたといってもよいのではないかといった問題である。この場合物体の存在を判定するためにはホログラムには図3のようなゾーン・プレートが記録されねばならない。ゾーン・プレートが記録されるか否かは物体の構造によると考えられる。図2に用いられる物体のように単にスクリーンに波長以下の穴をあけただけでは，図4の結果からみてもおそらく干渉縞はあらわれないと予想される。干渉縞が記録されるのは前述の議論のように大きなリアクティブ・エネルギーが貯えられるような構造の一次波源を物体に選んだ場合であろう。

6. あとがき

長波長ホログラフィにおける波長程度の物体の解像に関して，空間を空間周波数のフィルターとみなして考察をおこなった。本考察は定性的で不充分な点があると考えられ，本考察を裏付ける実験結果も不充分なもので今後さらに正確な実験とそれに基づく考察が必要であろう。

最後に本論文はカナダ・トロント大学の飯塚啓吾教授との二・三の討論に始まり[5]，本学電子工学科大学院生岩崎俊君，同学助手永井啓之亮君などと討論して到った結論をまとめてみたもので，これらの諸氏に感謝する。

参考文献

1) 青木由直：北大工学部研究報告，**65** (1972), 69.

2) 森口，宇田川，一松：数学公式 II (1972, 岩波), 277.
3) 森口，宇田川，一松：数学公式 III (1972, 岩波), 170, 178, 201.
4) Goodman, J. W.: Introduction to Fourier Optics (1968, McGraw-Hill Book Co.), 45, 54.
5) Iizuka, K. and L. G. Gregoris: Appl. Phys. Letters, **17** (1970), 509.

付録 I 式 (5) の導出

式 (4) であらわされる球面波のフーリエ変換を $H'(f_x, f_y)$ とすると

$$H'(f_x, f_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(2\pi/\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{-i2\pi(f_x x+f_y y)}\,dxdy \tag{A-1}$$

と書ける。ここで $x-y$ 面，f_x-f_y 面においてつぎのように直角座横から極座標に座標変換をおこなう。

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z \tag{A-2}$$

$$f_x=f\cos\phi,\quad f_y=\sin\phi \tag{A-3}$$

式 (A-2), (A-3) を式 (A-1) に代入して整理すると，

$$H'(f_x, f_y)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-i(2\pi/\lambda)\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\rho d\rho\int_0^{2\pi}e^{-i2\pi\rho f\cos(\theta-\phi)}d\theta \tag{A-4}$$

ここで 0 次のベッセル関数を J_0 とすれば，

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ix\cos(\theta-\phi)}d\theta \tag{A-5}$$

なる関係があり[3]，さらにつぎの公式[3]

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}xJ_0(bx)\,dx=\frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{A-6}$$

を用いると式 (A-4) はつぎのように求まる。

$$H'(f_x, f_y)=\pm i\lambda\frac{e^{\pm(i2\pi z/\lambda)\sqrt{1-(\lambda f)^2}}}{\sqrt{1-(\lambda f)^2}} \tag{A-7}$$

式 (A-7) において定数係数を無視し，指数部の正符号を選べば本文式 (5) が得られる。