



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	時間依存中性子輸送方程式の数値計算法
Author(s)	大友, 詔雄; 井上, 和彦
Citation	北海道大學工学部研究報告, 72, 117-123
Issue Date	1974-09-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41229
Type	departmental bulletin paper
File Information	72_117-124.pdf



時間依存中性子輸送方程式の数値計算法

大友 詔雄* 井上 和彦*

(昭和 49 年 3 月 20 日受理)

A Numerical Method for the Time-dependent Neutron Transport Equation

Norio OTOMO* Kazuhiko INOUE*

(Received March 20, 1974)

Abstract

It was once suggested that the time-dependent multi-group neutron transport equation in finite, non-multiplying, isotropic homogeneous media can be solved analytically in a given small time interval and that the solution at any time can be obtained by the iterative procedure. This paper describes a more general formulation. The accuracy of the present method is higher, and we have shown here that the well-known direct integration method, in approximation can be obtained from our formulation.

1. 序 言

時間依存輸送方程式は、いくつかの理想化された場合を除き、解析的に厳密に解くことが出来ず、多くは数値的に解くことが必要であり、その方法は大別して (1) Laplace 変換を数値に行う方法¹⁾, (2) 固有関数展開法^{2)~4)}, (3) 時間ステップ法^{3), 5)~8)} の三つになる。

(1) の方法は、原理的にきわめて優れた方法であるが、逆 Laplace 変換を数値に行う場合に大きな困難に遭遇するため¹⁾、今のところ、時間依存輸送方程式の解法に用いられる例はほとんどない。しかし、いずれ数値計算法の発展によって広く用いられることと考えられる。

(2) の方法は、時間の早い過渡領域から漸近領域に至る迄解くことが出来、最も広範に用いられているが、この解法の形式で、物理的描像を直感的にとらえにくく、しばしば計算の収斂が遅くなる場合もあって手軽に扱いにくい。

(3) の方法は、これ迄にいくつかあるが、全て直接積分法に帰結する。この方法では、一般に、微小時間幅 Δt の大ききで解き得るエネルギー領域の上限が決定し、エネルギー上限を大きくとるには、 Δt を小さくする必要がある。 Δt を小さくすると、対象とする時間領域全体にわたって中性子スペクトルを解くために、莫大な数の繰返し計算を実行しなければならないので、取扱いの簡便さ、物理的描像の明らかなさにもかかわらず、利用が限られているが、その効果的方法の開発が望まれているものである。

我々は、既に、このような時間ステップ法の長所に着目し、欠点を補うより一般的な解法を求めている。そしてこの方法の概要と、利用した解析例については別報で述べた⁹⁾。本論文では、

* 北海道大学工学部原子工学科 放射線源工学講座

この方法をさらに一般的な形で表わし、この解の精度を論じ、さらに、得られた解から、これ迄に良く知られた直接積分法の解が近似形として導かれることを示し、また、我々の解と、直接積分法の解を氷の場合について適用して数値計算を行ない、両者の差異についても明らかにしている。

2. 基礎方程式と解法

基礎方程式として、有限な等方均一非増倍体系内の中性子スペクトル $\phi(E, t)$ に対して、次の時間依存輸送方程式：

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(E, t)}{\partial t} + \Sigma_T(E) \phi(E, t) = \int_0^\infty \Sigma(E' \rightarrow E) \phi(E', t) dE' + S(E, t) \quad (2.1)$$

を考える。ここで、 v は中性子の速度であり、一つのモードだけを考える。 $\Sigma_T(E)$ は

$$\Sigma_T(E) = \Sigma_a(E) + \Sigma_s(E) + D(E) \cdot B^2 \quad (2.2)$$

で定義した実効全断面積で、 $\Sigma_a(E)$ 、 $\Sigma_s(E)$ 及び $D(E)$ は、夫々、エネルギー E の中性子に対する巨視的吸収断面積、巨視的散乱断面積及び拡散係数である。 B^2 は体系の幾何学的バックリングであり、 $\Sigma(E' \rightarrow E)$ は、エネルギー E' から E への巨視的エネルギー遷移断面積である。 $S(E, t)$ は中性子源であるが、ここでは $S(E) \delta(t)$ と仮定する。

中性子エネルギーについて多群に分割し、その i 番目のエネルギー群に対する中性子束を $\phi_i(t)$ とすると、次式が定義される。 $(\Delta E_i = E_i - E_{i-1})$

$$\phi_i(t) = \int_{\Delta E_i} \phi(E, t) dE \quad (2.3. a)$$

$$S_i \delta(t) = \int_{\Delta E_i} S(E) \delta(t) dE \quad (2.3. b)$$

(2.1) 式を ΔE_i 間で積分すると次式を得る。

$$\frac{1}{v_i} \frac{d\phi_i(t)}{dt} + \Sigma_{Ti} \phi_i(t) = \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k(t) + S_i \delta(t) \quad (2.4)$$

ここで、

$$\int_0^{E_{\max}} \bar{\Sigma}(E' \rightarrow E_i) \phi(E', t) dE' = \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k(t) \quad (2.5. a)$$

$$\bar{\Sigma}(E' \rightarrow E_i) = \int_{\Delta E_i} \Sigma(E' \rightarrow E) dE \quad (2.5. b)$$

$$\Sigma_{Ti} = \frac{\int_{\Delta E_i} \Sigma_T(E) \phi(E, t) dE}{\phi_i(t)} \quad (2.5. c)$$

この(2.5)式で定義した量を定めるためには、 ΔE_i 区間で、 $\phi(E, t)$ が既知でなければならないが、区間幅が小さければ各エネルギー区間内で、 $\Sigma_T(E)$ と $\phi(E, t)$ の変化は一般に激しくないから、適当な試行解を仮定して Σ_{Ti} を求めても大きな誤差は生じない。

次に、演算子 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{J}'$ 及び係数 Σ'_i を次式のように定義する。

$$[\mathbf{J}\phi(t)]_i = \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k(t) \quad (2.6. a)$$

$$[\mathbf{J}'\phi(t)]_i = \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k(t) - \Sigma_{i,i} \phi_i(t) \quad (2.6. b)$$

$$\Sigma'_i = \Sigma_{Ti} - \Sigma_{i,i} \quad (2.6. c)$$

この定義を用いると、(2.4)式は次のように書きかえられる。

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} + v_i \Sigma'_i \phi_i(t) = v_i [\mathbf{J}' \phi(t)]_i + v_i S_i \delta(t) \quad (2.7)$$

(2.6. b) 式からわかるように、 $[\mathbf{J}' \phi(t)]_i$ には露わに ϕ_i を含んでいないから、(2.7) 式は右辺を非斉次項とした $\phi_i(t)$ に関する定数係数一階非斉次線形常微分方程式と見做すことが出来る。そこで、初期値として $t=t_0$ の解の組 $\{\phi_i^{(0)}\}$ をとれば、時間 $t=t_1$ における解は解析的に求まり、次式で与えられる。 $(\Delta t = t_1 - t_0)$

$$\phi_i^{(1)}(\Delta t) = e^{-v_i \Sigma'_i \Delta t} \left\{ \phi_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} e^{v_i \Sigma'_i t'} v_i [\mathbf{J}' \phi(t')]_i dt' + v_i S_i \delta(t) \right\} \quad (2.8)$$

実際には、右辺の積分内の $[\mathbf{J}' \phi(t)]_i$ は、 $t > t_0$ に対しては既知ではないから、何らかの工夫が必要である。その方法としては、例えば、 $t=t_0$ のまわりで $\phi(t)$ を Taylor 展開したり、あるいは Δt 区間において内挿式を仮定するなどして指定することが都合よい。

Taylor 展開

この方法では、次の Taylor 展開：

$$\phi(t) = \phi^{(0)} + (t - t_0) \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t_0} + \dots \quad (2.9)$$

を用い、 $\phi(t)$ の時間微分値は $t > 0$ では (2.7) 式から

$$\frac{d\phi_k(t)}{dt} = v_k [\mathbf{J}' \phi(t)]_k - v_k \Sigma'_k \phi_k(t) \quad (2.10)$$

で与えられる。(2.9)、(2.10) 式を (2.8) 式に代入して、積分を実行し整理すると、次の解が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_i^{(1)}(\Delta t) &= \phi_i^{(0)} e^{-v_i \Sigma'_i \Delta t} + \frac{1}{\Sigma'_i} [\mathbf{J}' \phi^{(0)}]_i (1 - e^{-v_i \Sigma'_i \Delta t}) \\ &\quad + \frac{1}{v_i \Sigma_i'^2} [\mathbf{J}' (v \mathbf{J}' \phi^{(0)} - v \Sigma' \phi^{(0)})]_i \{v_i \Sigma'_i \Delta t - (1 - e^{-v_i \Sigma'_i \Delta t})\} + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.11) 式の各項の物理的意味は明瞭である。即ち、第一項は、 i 群の中で Δt 時間内に吸収・散乱及び体系外へのもれによって、その i 群から除去される効果を示し、第二項は、 Δt 時間内に他の群から i 群に入ってくる効果、第三群は、さらに高次の効果を表わしている。

内挿式

この方法では、 $\phi(t)$ を Δt 区間内で適当な内挿式を仮定する。ここでは最も簡単に、

$$\phi(t) = \frac{\phi^{(1)} - \phi^{(0)}}{\Delta t} t + \phi^{(0)} \quad (2.12)$$

で与えられるとする。これを (2.8) 式に代入し、積分を実行し整理すると、次式の解が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_i^{(1)}(\Delta t) &= \phi_i^{(0)} e^{-v_i \Sigma'_i \Delta t} + \frac{1 - (1 - v_i \Sigma'_i \Delta t) e^{v_i \Sigma'_i \Delta t}}{v_i \Delta t \Sigma_i'^2} \left\{ \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k^{(1)}(\Delta t) - \Sigma_{i,i} \phi_i^{(1)}(\Delta t) \right\} \\ &\quad - \frac{v_i \Sigma'_i \Delta t + (1 - e^{v_i \Sigma'_i \Delta t})}{v_i \Delta t \Sigma_i'^2} \left\{ \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k^{(0)} - \Sigma_{i,i} \phi_i^{(0)} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) 式では、 $\phi_i^{(0)}$ が既知であれば、 I 個の式から $\phi_i^{(1)}(\Delta t)$ を求めることが出来る。

これら二つの方法は、いずれも同レベルの近似手段であって、求めた解の優劣をきめるものではないが、Taylor 展開による式の方が、単純な積分変換の形式で、 Δt 間での反復計算による解の収斂を行う必要はないので、数値計算に用いるのに都合のよい形をしている。一方、(2.13)

式では、 Δt 区間での $\phi_i^{(1)}(\Delta t)$ に試行値を仮定して、反復計算によって解を収斂させ、任意の時刻の解を Δt を時間ステップとする逐次計算で求める必要がある、繰り返し数が莫大になり手間がかかる。さらに、Taylor 展開を用いた解 (2.12) 式では、 $v_i \Sigma_i \Delta t$ は正で、 $[J' \phi^{(0)}]_i$ は一般に正であるから、第一、二項は常に正であり、第三項以下については、絶対値を第一、二項を比べると、後者がはるかに大きい。従って、(2.12) 式は決して負の値をとらない。このことは、仮りに Δt をいくら大きくしても、あるエネルギー領域を越すと中性子束が負になるといった従来の時間ステップ法の困難がないことを意味し、 Δt の大きさの選択に荷せられる制限は、答の精度の良否による。これに対して、内挿式を用いた (2.13) 式では、各項の大小関係を一見して論じることが出来ず、全体として中性子束が負にならないように注意してとり扱う必要がある。これらの理由から、(2.12) 式あるいは (2.13) 式のいずれを用いるかは、 Δt とエネルギーとの制限による問題と、計算の手間という点で判断すればよく、多くの点から (2.12) 式の方が数値計算を行うのに便利である。

3. 計算精度の評価

前節で述べたことから明らかなように、我々の方法の基本的な考え方は (2.8) 式を導くことにあって、この式をもとにして二つの取り扱い方の例を示したが、こうした方法に用いた近似は次のようなことである。

先ずエネルギーの次元に関して、連続量を離散的な多群に分割し、(2.1) 式から (2.4) 式を導いていることである。定常問題では、こうした多群近似は、熱化方程式を数値的に解く場合の常套手段として用いられ、その妥当性も認められているが¹⁰⁾、非定常問題に関しては議論される必要がある。しかし、非定常の場合も $\phi(E, t)$ がエネルギー群の幅 ΔE 間で、ゆるやかに変化しているならば、多群近似は妥当なはずである。従って、そのような場合には、前節の非斉次方程式の取り扱いが許されると考えられる。

次の近似は、時間の次元に関して、(2.8) 式の積分計算を実行する際に非斉次項の中性子束 $\phi(t)$ を Taylor 展開あるいは内挿式によって与えたことである。この二つの処置は、微小時間内における中性子束の時間変化が小さいという条件のもとでは適当な処置であると考えられる。

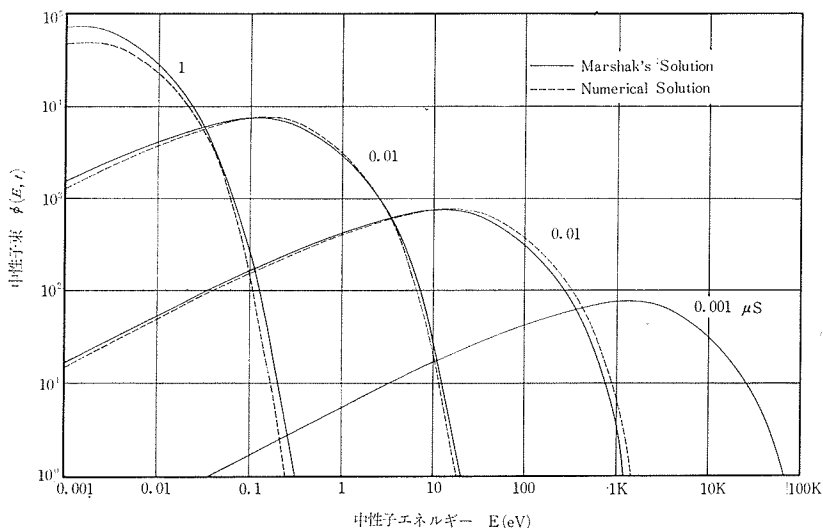


図 1

このような近似手段についての妥当性は、上述のように論理的な矛盾はないが、その近似による計算精度の評価については定量的になされなければならない。

(2.11)あるいは(2.13)式の計算精度を調べるために0°Kの自由気体(A=1)の時間依存中性子スペクトルを(2.11)式の右辺第二項迄とった近似式で数値計算したものと、Marshakの厳密解¹¹⁾と比較した。結果は図1に示すように、全体として両者は良い一致を見ている。

時間依存中性子スペクトルの計算は、高エネルギー領域について、Marshakやvon Dardel^{11),12)}らの仕事があって、時間の早い領域から有効な解を与えている。しかし、彼らの散乱模型は現実の中性子減速材として実用的でない場合である。我々の解法は、実用的減速材について求めることが出来、しかも、Marshak解の妥当なエネルギー領域からMarshakの解の意味をもたない低エネルギー領域迄を含めて解くことが出来るので、ほぼエネルギー領域全域にわたって時間依存中性子スペクトルを解くのに有力である。

4. 他の差分法との関係

ここでは、時間依存輸送方程式(2.1)式を差分法で解いているこれ迄の方法と、我々の導いた方法との関係を論じる。これ迄の差分法はいろいろあるが、時間の次元について差分法を適用した、所謂、時間ステップ法に限定して、その方法は、本質的にTaylor展開によって求める直接積分法³⁾に帰結し、その類似のものとして積分演算法⁸⁾があり、その他に内挿式を基本として求める方法¹³⁾があって、それぞれ差分法の前進差分及び中心差分をとることに対応している。

直接積分法

(2.11)式のはじめの2項をとって、指数項を冪級数展開し、展開の2項目迄をとると、次の近似式を得る。

$$\phi_i^{(1)}(\Delta t) = \phi_i^{(0)} + v_i \Delta t \left\{ \sum_{k=1}^I \Sigma_{i,k} \phi_k^{(0)} - \Sigma_{Ti} \phi_i^{(0)} \right\} \quad (4.1)$$

これは、直接積分法による解である^{3),5)~7)}。この式の形式はReichardt⁸⁾の用いた積分演算法と基本的に同一の形式である。この式では反復計算を必要としないが、散乱核の形状や Δt のとり方によって、あるエネルギー領域を越すと中性子束が負になることがある。

内挿式による方法

(2.13)式において、右辺の第一、二項の指数項について展開の一次迄、第三項については展開の二次迄をとると、次の近似式を得る。

$$\phi_i^{(1)}(\Delta t) = \phi_i^{(0)}(1 - v_i \Sigma'_i \Delta t) + \frac{v_i \Delta t}{2} [\mathbf{J}'(\phi^{(1)} + \phi^{(0)})]_i \quad (4.2)$$

この式の右辺を変形すれば次式となる。

$$\phi_i^{(1)}(\Delta t) = \frac{(2 - v_i \Sigma'_i \Delta t) \phi_i^{(0)} + v_i \Delta t [\mathbf{J}'(\phi^{(1)} + \phi^{(0)})]_i}{2 + v_i \Sigma'_i \Delta t} \quad (4.3)$$

この式は、(2.3)式で、 $\phi_i(t)$ を内挿式(2.12)式で指定して、 Δt 間で積分を実行して得られる式であって、Bergström¹³⁾らの用いている形式である。この解は(2.13)式と同様、反復計算が必要であって、右辺の第一項によって、 Δt 大きくとると、あるエネルギー領域で全体として中性子束を負にすることが生ずる。従って(4.3)式を用いる場合、 Δt を十分小さくとることが必要であるが、これによってくり返し計算が莫大になる。Smileyは、STREAKコード¹⁴⁾を開発して最適の時間ステップ幅 Δt のとり方をエネルギー領域の変化に応じて決定し計算し、計算時間の短縮と誤差の低減を計っているが、(4.3)式を用いる限り、こうした工夫が必要となる。

(4.3) 式の右辺の $\phi^{(1)}$ を (2.9) 式の Taylor 展開で指定して高次の項を無視して変形すれば, (4.1) 式を得る。このようにして (2.11) 及び (2.13) 式を近似することによって, 最終的に直接積分法による解に至り, 我々の解法が, 従来の時間ステップ法の統一的一般的な方法であることが理解できる。

5. 計 算 例

極低温氷の場合¹⁵⁾ についての, $t=0.01 \mu\text{S}$ の Marshak の厳密解を源スペクトルとして, 我々の解 (2.11) 式と, 直接積分法の解 (4.1) 式とを用いて時間依存中性子スペクトルを計算し, これから単色中性子パルスの時間特性を求め, 0.01 eV と 0.001 eV のエネルギーについて, 両者を比較して図 2 に示す。 0.001 eV のエネルギーでは, 長時間後の漸近領域で両者は一致し, 基本モードに近い減衰になるが, 0.01 eV では, 両者の一致はさらに長時間を要している。又, 時間の早い領域では両者の差は著しい。我々の解は, 図 1 で示したように, 時間の早い領域から正しい解を与えているから, 直接積分法では, 高エネルギー領域及び時間の早い領域の解法に適さないことがわかる。さらに, 直接積分法では, 時間依存中性子スペクトルの解き得る上限エネルギーは, $\Delta t=0.01 \mu\text{S}$ では約 0.2 eV であるが, 我々の方法ではこうした制限は当然生じない。

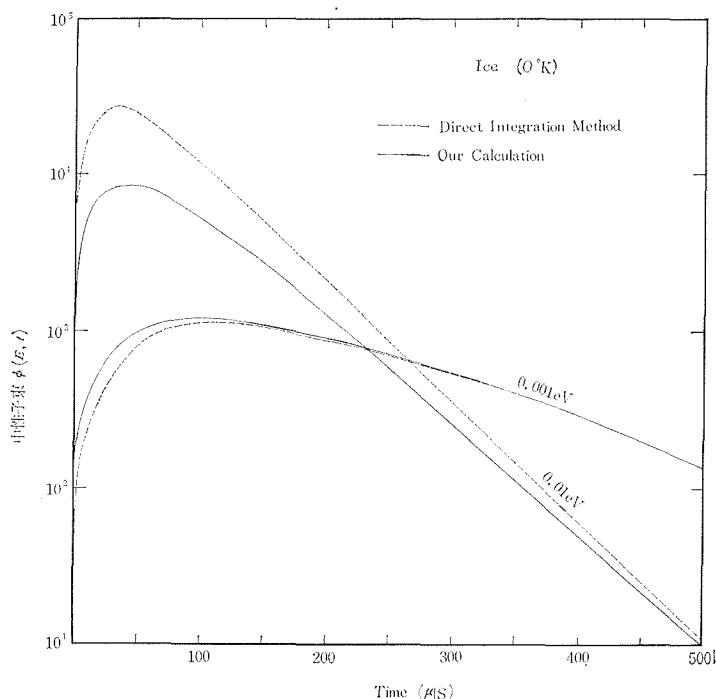


図 2

6. 結 言

我々は, エネルギー群を多群に分割し, その i 番目の群の中性子束を求める際に, 他の群の中性子束を非斉次項と見做すことが出来るように工夫し, 時間依存輸送方程式を非斉次方程式として解き解析的に求めた。又, 非斉次項の中性子束を Taylor 展開あるいは Δt 間での適当な内挿式などで与えて近似解を求め, この解の近似度を, 従来の時間ステップ法の解を導くことに

よって示した。さらに、計算精度も論じ、(2.11)式が、数値計算に非常に都合が良いことを説明した。従って、我々の方法は、今後の広範な利用の可能性が大きいと考えている。

極低温氷で、直接積分法による計算結果との比較を行ない、直接積分法が時間の早い領域で不適切であることを示したが、 Δt を細かく切れば、繰返し数が著しく増大することによる誤差の累積に注意を要するが、当然、直接積分法でも高エネルギー領域から、しかも時間の早い領域で時間依存中性子スペクトルを計算することは可能である。

参 考 文 献

- 1) Bellman, R., Kalaba, R. E. and Lockett, J. A.: Numerical Inversion of the Laplace Transform, American Elsevier Publishing Company (1966).
- 2) Purohit, S. N.: Nucl. Sci. Eng., **9**, 157 (1961).
- 3) Ohanian, M. J. and Daitch, P. B.: Nucl. Sci. Eng., **19**, 343 (1964).
- 4) Tewari, S. P. and Kothari, L. S.: Nucl. Sci. Eng., **39**, 193 (1970).
- 5) Daitch, P. B.: Neutron Physics (M. L. Yeater *et al.*), Academic Press, New York, 187 (1962).
- 6) Grover, P. S. and Kothari, L. S.: J. Nucl. Energy (Parts A/B, Reactor Sci. Technol.) **20**, 835 (1966).
- 7) Navalkar, M. P. and Iyengar, S. B. D.: J. Nucl. Energy **22**, 391 (1968).
- 8) Reichardt, W.: I. A. E. A. Symposium of Neutron Thermalization and Reactor Spectra, Ann Arbor, USA, July (1967).
- 9) 大友韶雄, 井上和彦: 北海道大学工学部研究報告, 第64号 (1972).
- 10) Ehrlich, R. and Hurwitz, H. Jr.: Nucleonics, Vol. 12, No. 2 (1954).
- 11) Marshak, R. E.: Rev. Mod. Phys. **19**, 185 (1947).
- 12) von Dardel: Transactions of the Royal Institute of Technology Nr. 75 (1954).
- 13) Bergström, A., Kockum, J. and Söderberg, S.: SM-101/54 (1968).
- 14) Smiley, J. W.: STREAK Code internal report, the Pennsylvania State University (1966).
- 15) Inoue, K.: J. Nucl. Sci. Technol., **7** [11], 580 (1970).