



Title	単軸異方性プラズマにおけるマイクロ波ホログラフィ
Author(s)	永井, 啓之亮; Nagai, Keinosuke; 鈴木, 道雄 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 73, 85-94
Issue Date	1974-12-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41246">https://hdl.handle.net/2115/41246</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	73_85-94.pdf



# 単軸異方性プラズマにおける マイクロ波ホログラフィ

永井啓之亮\* 鈴木道雄\*  
(昭和49年6月28日受理)

## Microwave Holography in a Uniaxial Anisotropic Plasma

Keinosuke NAGAI Michio SUZUKI  
(Received June 28, 1974)

### Abstract

Properties of a hologram constructed in a uniaxial anisotropic medium, namely in a gyro-plasma were investigated theoretically. We considered the interference patterns of ordinary waves and extraordinary waves from a source such as a hologram. An element of permittivity tensor can be measured by the reconstruction process from this hologram.

### 1. ま え が き

マイクロ波ホログラフィは物質の内部探査, 非破壊試験など, 計測の手段としての用途が考えられ<sup>1)</sup> 研究が進められている。光ホログラフィもまた媒質の定数測定(たとえばプラズマ診断<sup>2)</sup>)などの測定関係の応用がひろく考えられている。一方, 異方性媒質中での電磁波は一般に正常波と異常波に対応する2つの伝播定数をもつ波動に分解されることが知られている。これらの2つの波動は媒質の情報を持ち, また互いに可干渉であるにもかかわらず, これらの波動を積極的にホログラフィックに利用して媒質定数の測定を行なうという研究はこれまでのところ行なわれていないようである。本報告は, 異方性媒質よりなる物体にマイクロ波を照射し, 複屈折によって生じる干渉パターンをホログラムとして利用することを提案するものである。例として軸方向に極めて強い静磁界が印加された半無限プラズマ空間にマイクロ波を照射し, 正常波と異常波の干渉パターン(ホログラム)より, 波源の像を再生し, プラズマ定数が測定できることを解析的に示している。

ここで述べられている議論は, 波源としてレーザを使用し, 一般の単軸異方性結晶(方解石, 水晶等)の場合にも適用できる。そのとき実験を仮定すれば, 異方性媒質空間は半無限でなくて, 少なくとも両側を自由空間ではさまれた層状をなしていなければならない。しかしながら, ダイポールから単軸異方性媒質空間への放射の問題は, まだ全空間が均質に満たされている場合のみ解が求められているだけである<sup>3)</sup>。それゆえ, 半無限空間への放射はアンテナの問題としても興味あると思われる。

\* 工学部電子工学科電波応用工学講座

## 2. 磁気，または電気ダイポールからのプラズマ 無限空間への放射電磁界

プラズマの無限空間  $(x, y, z)$  において，これに印加された静磁界の方向を  $z$  軸とし，静磁界がきわめて強い（無限大とみなせる）場合には，電磁界の時間依存性を  $e^{j\omega t}$  として，プラズマの比誘電率テンソル  $\epsilon$  は次式で与えられる。

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで， $\epsilon_3 = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$  であり， $\omega_p$  はプラズマ角周波数である。この  $\epsilon$  を使い Maxwell の方程式は，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} - j\omega\mathbf{M}_0\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon\mathbf{E} + j\omega\mathbf{P}_0\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (3)$$

となる。ここで  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$  はそれぞれ原点にある磁気ダイポール，電気ダイポールのモーメントである。

ここで， $Z$  軸を伝播方向とする伝送線路表示<sup>4)</sup>を行なうために，電磁界の横  $(x, y)$  方向成分をそれぞれ  $E_t$ ,  $H_t$  とすると，これらは次式のように記述できる。すなわち，

$$E_t = E_{t1} + E_{t2} \quad (4)$$

$$H_t = H_{t1} + H_{t2} \quad (5)$$

とおき，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{ti} \\ \mathbf{H}_{ti} \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \begin{pmatrix} V_i(\alpha, \beta, z) f_i \\ I_i(\alpha, \beta, z) g_i \end{pmatrix} d\alpha d\beta \quad (i=1, 2) \quad (6)$$

となる。 $i=1, 2$  はそれぞれ  $TM_z$  波， $TE_z$  波に相当し，モード関数  $f_i$ ,  $g_i$  は，

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_2 = \frac{j}{k_t} (\alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{y}_0) e^{-j(\alpha x + \beta y)} \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{z}_0 \quad (8)$$

である。 $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  はそれぞれ， $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の単位ベクトルである。

以上より，伝送方程式は，

$$-\frac{\partial}{\partial z} V_1 = \left( j\omega\mu_0 + \frac{k_t^2}{j\omega\epsilon_0\epsilon_3} \right) I_1 + v_1\delta(z) \quad (9)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} I_1 = j\omega\epsilon_0 V_1 + i_1\delta(z) \quad (10)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} V_2 = j\omega\mu_0 I_2 + v_2\delta(z) \quad (11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} I_2 = \left( j\omega\epsilon_0 + \frac{k_t^2}{j\omega\mu_0} \right) V_2 + i_2\delta(z) \quad (12)$$

となる。ここで，

$$v_1 = -\frac{k_t}{\epsilon_0\epsilon_3} P_z - \frac{\omega}{k_t} (M_x\beta - \alpha M_y) \quad (13)$$

$$i_1 = \frac{\omega}{k_t} (\alpha P_x + \beta P_y) \quad (14)$$

$$v_2 = \frac{\omega}{k_t} (M_x \alpha + M_y \beta) \quad (15)$$

$$i_2 = -\frac{k_t}{\mu_0} M_z + \frac{\omega}{k_t} (\beta P_x - \alpha P_y) \quad (16)$$

であり,  $(P_x, P_y, P_z), (M_x, M_y, M_z)$  はそれぞれ,  $\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0$  の各座標成分である。

式(9)~(12)より  $TM_z$  波,  $TE_z$  波はそれぞれ独立に存在し, また, 前者がいわゆるプラズマ中の異常波 (Extraordinary Wave), 後者が正常波 (Ordinary Wave) に対応していることがわかる。

### 1) 正常波 ( $TE_z$ 波)

式(11), (12), (15), (16)より, 伝播定数を  $\kappa_0$  とすると,

$$\kappa_0 = k_0^2 - k_t^2 \quad (17)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega \mu_0}{\kappa_0} i_2 + v_2 \right) e^{-j\kappa_0 z} \quad (18)$$

となる。ここで  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  である。この式は自由空間でのダイポールからの放射の式となるので, 式(6)に相当する積分は容易に求まる。すなわち, 式(18), (8)を式(6)に代入し, さらに

$$\alpha = k_t \cos \phi, \quad \beta = k_t \sin \phi \quad (19)$$

$$x = t \cos \phi, \quad y = t \sin \phi \quad (20)$$

と変数変換し,  $\phi$  に関する積分を行なえば,  $|k_t t| \gg 1$  するとき文献3)と同様にして,

$$E_{t2} = \frac{j}{8\pi^2} \left\{ \frac{\omega \mu_0}{\kappa_0} \left( -\frac{k_t}{\mu} M_z + \omega P_x \sin \phi - \omega P_y \cos \phi \right) + \omega M_x \cos \phi + \omega M_y \sin \phi \right\} \\ \times (x_0 \sin \phi - y_0 \cos \phi) \sqrt{\frac{2\pi}{k_t t}} \exp \left\{ -j \left( k_t t + \kappa_0 z - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} k_t dk_t \quad (21)$$

となり, さらに

$$k_t = k_0 \sin \theta, \quad \kappa_0 = k_0 \cos \theta \quad (22)$$

$$t = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (23)$$

と変数変換して  $\theta$  に関する積分を行なえば,  $|k_0 r| \gg 1$  なるときは, 鞍部点法が容易に適用できる。鞍部点は,

$$\theta = 0 \quad (24)$$

であり, その結果, 次式が求まる。

$$E_{t2} = -\frac{\omega \mu_0}{4\pi r} \left\{ \omega (P_x \sin \phi - P_y \cos \phi) - \frac{k_0 \sin \theta}{\mu_0} M_z + \omega (M_x \cos \phi + M_y \sin \phi) k_0 \cos \theta \right\} \\ \times (x_0 \sin \phi - y_0 \cos \phi) \exp(-jk_0 r) \quad (26)$$

### 2) 異常波 ( $TM_z$ 波)

式(9), (10), (13), (14)より, 伝播定数を  $\kappa_1$  とすると,

$$\kappa_1^2 = k_0^2 - \frac{1}{\epsilon_3} k_t^2 \quad (26)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa_1}{\omega \epsilon_0} i_1 + v_1 \right) e^{-j\kappa_1 z} \quad (27)$$

となり, 式(27), (7)を式(6)に代入し, 式(21)を得たのと同様にして, 異常波の横方向成分  $E_{t1}$  を得ることができる。

$$E_{t1} = \frac{1}{8\pi^2} \int \left\{ \frac{\kappa_1}{\epsilon_0} (P_x \cos \phi + P_y \sin \phi) - \frac{k_t}{\epsilon_0 \epsilon_3} P_z - \omega (M_x \sin \phi - M_y \cos \phi) \right\} \\ \times (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi) \sqrt{\frac{2\pi}{k_t t}} \exp \left\{ -j \left( k_t t + \kappa_1 z - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} k_t dk_t \quad (28)$$

ここで、鞍部点法を適用するために、式(23)、(26)より

$$t = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (29)$$

$$\kappa_1 = k_0 \cos \theta, \quad k_t = \sqrt{\epsilon_3} k_0 \sin \theta \quad (30)$$

とおけば、exponentialの中の関数を  $-jP(\theta)$  として、

$$P(\theta) = k_t t + \kappa_1 z - \frac{1}{4} \pi \quad (31) \\ = k_0 r (\sqrt{\epsilon_3} \sin \theta \sin \theta + \cos \theta \cos \theta)$$

となる。鞍部点は  $P'(\theta) = 0$  より、

$$\tan \theta = \sqrt{\epsilon_3} \tan \theta \quad (32)$$

の解である。このとき式(30)から、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{k_0 \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta}} \\ k_t &= \frac{\epsilon_3 k_0 \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。この式から明らかなように、このとき、波源  $(0, 0)$  から観測点  $(t, z)$  に到達する波の phase front の進む方向は、この2点を結ぶ直線から図1に示すような「ずれ」を示すことに注意する必要がある。なお、正常波の phase front の進む方向はこの2点を結ぶ直線であることは言うまでもない(式(24)参照)。

結局、式(28)は

$$E_{t1} = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{k_0 \cos \theta}{\epsilon_0} (P_x \cos \phi + P_y \sin \phi) - \frac{k_0 \sin \theta}{\epsilon_0} P_z - \omega (M_x \sin \phi - M_y \cos \phi) \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta} \right\} \\ \times (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi) \frac{k_0 \epsilon_3 \cos \theta \exp \left\{ -jk_0 r \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta} \right\}}{(\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (34)$$

となる。

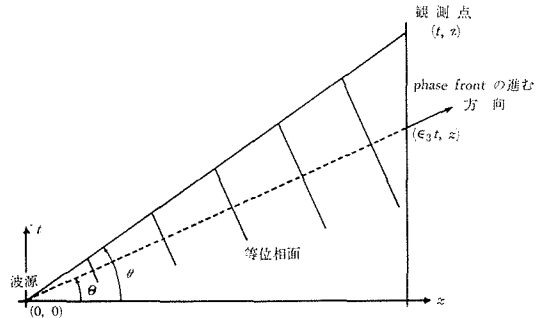


図1 観測点  $(t, z)$  に到達する異常波の進む方向  
( $\tan \theta = \epsilon_3 \tan \theta_0$ )

### 3. プラズマ空間でのホログラフィ結像公式

ホログラムを作製するということは、参照波、および物体波の振幅(スカラー)の和を(自乗して記録することである。マイクロ波などのベクトル波を利用する場合には、波動のある一方向成分(たとえば  $E_x$ )だけを検出するように検波プローブ、またはホーンアンテナの開口面の向きを調整しておけば、参照波と物体波のスカラー和を得ることができる。無限大磁化プラズマ中の電磁波については、式(25)および(34)から明らかなように正常波(の電界)と異常波(の電界)は互いに直交しているので、一方の波の電界方向に検波プローブの向きを一致させれば、他方の波の影響をうけない。それゆえ、この場合には物体波、参照波ともに、たとえば正常波(異常波)だ

けを考えれば良いので、正常波（または異常波）の一方だけしかないと  
 言う意味で通常の等方性媒質中での  
 ホログラム作製と等価である。しかし  
 ながら、検波プローブの向きを任意  
 とすると、物体波、参照波のそれ  
 ぞれについて正常波および異常波の  
 その方向成分が共に検出されること  
 になり、異方性媒質特有の現象が生  
 じることになる。

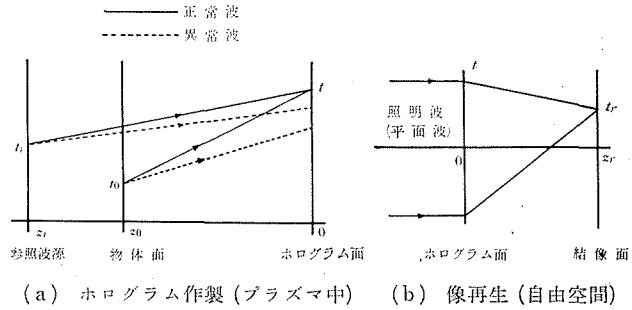


図2 ホログラム結像公式を求めるための構成

ここで、プラズマ中図2(a)の構成でホログラムを作製すると考える。Meierは自由空間での  
 ホログラフィ結像公式を求める際に、文献7)で物体を一点で代表させ、そこからの波面と、参照  
 波の点波源からの波面との干渉だけを考慮した。ここでもその方法に準じて結像公式を求める。  
 いま、参照波、および物体波の点波源は前節で考慮した電気、または磁気ダイポールと考えられ  
 るので、そこからの異常波  $E_e$ 、および正常波  $E_0$  はそれぞれ式(34)、(25)より

$$E_e = \frac{1}{4\pi r} P_1(\phi, \theta) \exp \left\{ -jk_0 r \sqrt{\cos^2 \theta + \epsilon_3 \sin^2 \theta} \right\} \quad (35)$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi r} P_2(\phi, \theta) \exp \{-jk_0 r\} \quad (36)$$

と書ける。ここで、 $P_1(\phi, \theta)$ 、 $P_2(\phi, \theta)$  はともに、いわゆる指向性を与える関数である。ホログラ  
 フィにおいて、アンテナの指向性の効果のホログラム作製面の有効開口を制限し、したがって再  
 生像の画質を悪化させるが<sup>5),6)</sup>、それを補正することもでき、いまの場合あまり重要ではない。減  
 衰をあらわす因子  $1/(4\pi r)$  も同様である。いま、参照波および物体波をそれぞれ添字  $i, o$  であら  
 わし、それぞれの異常波と正常波を  $E_{ie}$ 、 $E_{io}$  および  $E_{oe}$ 、 $E_{oo}$  とすれば、ホログラム作製面での検  
 波出力は

$$\begin{aligned} |E_i + E_o|^2 &= |E_{io} + E_{ie} + E_{oo} + E_{oe}|^2 \\ &= |E_{oo}|^2 + |E_{ie}|^2 + |E_{io}|^2 + |E_{oe}|^2 \dots\dots\dots \text{第 00 グループ} \\ &+ E_{oo} E_{oe}^* + E_{oo}^* E_{oe} + E_{io}^* E_{ie} + E_{io} E_{ie}^* \dots\dots \text{第 01 グループ} \\ &+ E_{oo} E_{io}^* + E_{oo}^* E_{io} \dots\dots\dots \text{第 1 グループ} \\ &+ E_{oe} E_{ie}^* + E_{oe}^* E_{ie} \dots\dots\dots \text{第 2 グループ} \\ &+ E_{oo} E_{ie}^* + E_{oo}^* E_{ie} \dots\dots\dots \text{第 3 グループ} \\ &+ E_{oe} E_{io}^* + E_{oe}^* E_{io} \dots\dots\dots \text{第 4 グループ} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。これらの各項はここに示したような6個のグループに分けることができる。各グループ  
 の性質を簡単に説明すると、まず第00グループは自由空間ホログラムにおける back ground  
 noise に相当するものである。第01グループもノイズと考えられるが、参照波(または物体波)の  
 正常波、および異常波が互いに干渉していることを示す異方性媒質におけるホログラム特有の項  
 であり、これを利用して媒質定数を測定することが出来る。次節にその方法を示した。第1グ  
 ループは、参照波源および物体波源からの正常波間の干渉による項であり、自由空間ホログラム  
 での物体の情報をもつ項と同じものである。同様に、第2、第3、第4グループはそれぞれ、物体  
 と参照波源からの異常波間の、物体の正常波と参照の異常波間の、および物体の異常波と参照  
 の正常波間の干渉を示している。それゆえ、この場合には、第1グループだけでなく、第2~4グ

ループにも物体（と参照波）の情報が含まれていて、通常の自由空間での像再生のための光学系（図2(b)参照）を用いれば、それぞれ再生像が得られることになる。なお、第1～4の各グループは2つの項からなっているが、前の項からは物体の虚像が、後の項からは実像が再生される。

つぎに各グループの結像公式を求めるが、前述したように結像位置を決定する要素は式(35)、(36)での位相項にあるので、ここでは位相項だけを問題とし、 $E_{00}$ 、 $E_{0e}$ 、 $E_{i0}$ 、 $E_{ie}$ の位相項をそれぞれ $\varphi_{00}$ 、 $\varphi_{0e}$ 、 $\varphi_{i0}$ 、 $\varphi_{ie}$ とする。図2(a)のように、参照波源、および物体の点波源の位置をそれぞれ $(t_i, z_i)$ 、 $(t_0, z_0)$ とし、ホログラム作製面上の点を $(t, 0)$ とすると、各位相項は式(35)、(36)を参照し、近軸光近似、つまり $|z_i|, |z_0| \gg |t_i|, |t_0|, |t|$ のもとでの近似を使うと、それぞれつぎのようになる。

$$\varphi_{00} = k_0 z_0 + \frac{k_0}{2z_0} (t - t_0)^2 \quad (38)$$

$$\varphi_{0e} = k_0 z_0 + \frac{k_0 \epsilon_3}{2z_0} (t - t_0)^2 \quad (39)$$

$$\varphi_{i0} = k_0 z_i + \frac{k_0}{2z_i} (t - t_i)^2 \quad (40)$$

$$\varphi_{ie} = k_0 z_i + \frac{k_0 \epsilon_3}{2z_i} (t - t_i)^2 \quad (41)$$

このようにして作製されたホログラムを自由空間で図2(b)の構成で波長 $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ の平面波を照射することによって再生像を得ることとする。このとき、ホログラム上の1点 $(t, 0)$ から出た光が点 $(t_r, z_r)$ に到達するまでに変化する位相量 $\varphi_c$ は、同じく近軸光近似を用いて、

$$\varphi_c = k_1 z_r + \frac{k_1}{z_r} (t_r - t)^2 \quad (42)$$

となる。通常、像再生の前にホログラムの縮小が行なわれるが、縮尺比を $m$ とすると、式(38)～(41)の $t$ を $mt$ に書き換える必要がある。これらのことを考慮し、ホログラムの第1グループの寄与を得た光の像再生面でのtotalの位相量を $\varphi_I$ とすると、

$$\varphi_I = \pm(\varphi_{00} - \varphi_{i0}) + \varphi_c \quad (43)$$

となる。ここで複号は、虚像、実像に対応している（今後も同じ）。式(43)に式(38)、(40)、(42)を代入し、使用したマイクロ波と光の自由空間での波長の比を $\mu$ 、すなわち、

$$\mu = \frac{k_0}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (44)$$

とすると、

$$\varphi_I = \pm k_1 \left\{ \mu z_0 + \frac{\mu}{2z_0} (mt - t_0)^2 - \mu z_i - \frac{\mu}{2z_i} (mt - t_i)^2 \right\} + k_1 \left\{ z_{r1} + \frac{(t_{r1} - t)^2}{2z_{r1}} \right\} \quad (45)$$

となる。再生像点の位置はこの値が $t$ によらない、ということであるから、 $t^2$ および $t$ の係数をそれぞれ0とおいて、

$$z_{r1} = \frac{\mp 1}{\mu m^2 \left( \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_i} \right)}, \quad t_{r1} = \frac{\mp z_{r1}}{\mu m \left( \frac{t_0}{z_0} - \frac{t_i}{z_i} \right)} \quad (46)$$

を得る。当然のことながら、この式はMeierの結果<sup>7)</sup>と一致する。

同様に第2グループの結像位置は、

$$z_{r2} = \frac{\mp 1}{\epsilon_3 \mu m^2 \left( \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_i} \right)}, \quad t_{r3} = \frac{\mp z_{r2}}{\epsilon_3 \mu m^2 \left( \frac{t_0}{z_0} - \frac{t_i}{z_i} \right)} \quad (47)$$

第3グループは

$$z_{r3} = \frac{\mp 1}{\mu m^2 \left( \frac{1}{z_0} - \frac{\epsilon_3}{z_i} \right)}, \quad t_{r3} = \frac{\mp z_{r3}}{\mu m \left( \frac{t_0}{z_0} - \frac{\epsilon_3 t_i}{z_i} \right)} \quad (48)$$

第4グループは

$$z_{r4} = \frac{\mp 1}{\mu m^2 \left( \frac{\epsilon_3}{z_0} - \frac{1}{z_i} \right)}, \quad t_{r4} = \frac{\mp z_{r4}}{\mu m \left( \frac{\epsilon_3 t_0}{z_0} - \frac{t_i}{z_i} \right)} \quad (49)$$

となる。ここで再度強調するが、以上求めた結像位置は一般の場合について示したのであって、正常波と異常波の電磁界は直交しているから、たとえば受波ホーンの開口の向きを調整することによって、そのどちらかの影響を取り除くことができる。その場合には、自由空間でのホログラフィと同様に2つの再生像、つまり第1グループかまたは第2グループの実像と虚像だけが得られることになる。

#### 4. 正常波と異常波の干渉を利用したプラズマ周波数の測定

前節で述べたように式(37)の第01グループの各項は物体の再生像を得るという観点からはノイズとみなされる。しかしながら、このグループは同一波源からの正常波と異常波の干渉を示しているのだから、波の伝播して来た媒質の情報を含んでおり、この項を利用することによって媒質定数を測定できる。

構成を前節と変えて、プラズマの半無限空間が自由空間と  $z=l$  で接している(図3参照)とする。電気(または磁気)ダイポールを自由空間におき、ここを  $(0, 0, z)$  とする。無限大磁界は  $z$  軸方向に印加されているとし、 $z=0$  平面の電磁界を検出する。このとき、伝送方程式は  $TE_z$  波(正常波)に関してはプラズマの有無に関係なく式(11)、(12)が成り立つ。 $TM_z$ (異常波)に関してはプラズマ中での式(9)において、自由空間では  $\epsilon_3=1$  とすれば良い。また、 $z=l$  で電磁界の横成分が連続するという境界条件が新たに加わる。以上より、

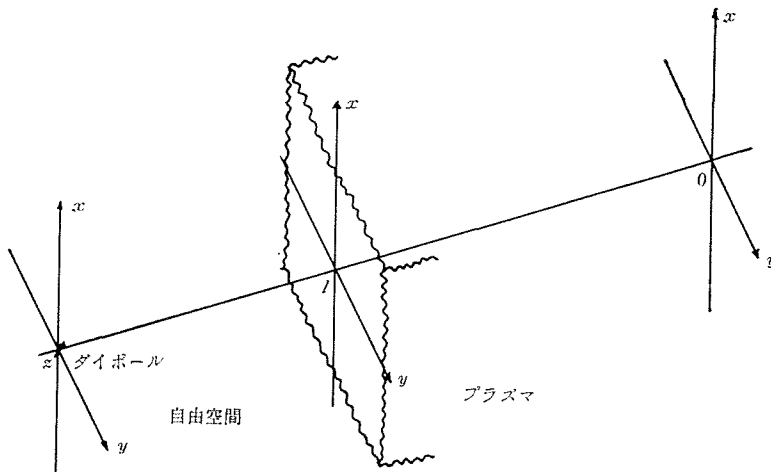


図3 電気または磁気ダイポールからの半無限プラズマ空間への電磁波の放射

$$V_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa_0}{\omega \in_0} i_1 + v_1 \right\} \left( 1 - \frac{\kappa_0 - \kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_0} \right) e^{-j(\kappa_0(z-l) + \kappa_1 z)} \quad (50)$$

これを式(6)に代入し、式(28)を得たのと同様にして、

$$E_{t1} = \frac{j}{8\pi^2} \left\{ \frac{\kappa_0}{\in_0} (P_x \cos \phi + P_y \sin \phi) - \frac{k_t}{\in_0} P_z - \omega (M_x \sin \phi - M_y \cos \phi) \right\} \\ \times (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi) \frac{2\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_0} \sqrt{\frac{2\pi}{k_t t}} \exp \left\{ -j \left( k_t t + \kappa_0(z-l) + \kappa_1 l - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} k_t dk_t \quad (51)$$

ここで鞍部点法を用いる。今回は一般の場合での鞍部点が前の録うに簡単には求まらないが、近軸領域にかざると付録に示すように簡単になり、結局、 $|t| \ll |l|$ ,  $|z|$  では

$$E_{t1} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\in_3}{z - (1 - \in_3)l} \left\{ \frac{\kappa_{0s}}{\in_0} (P_x \cos \phi + P_y \sin \phi) - \frac{k_{ts}}{\in_0} P_z - \omega (M_x \sin \phi - M_y \cos \phi) \right\} \\ \times (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi) \frac{2\kappa_{1s}}{\kappa_{1s} + \kappa_{0s}} \exp \left\{ -jk_0 \left( z + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \right) \right\} \quad (52)$$

ただし

$$\kappa_{1s} = k_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\in_3} \left( \frac{t}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \right)^2 \right\}, \quad k_{ts} = \frac{k_0 t}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \\ \kappa_{0s} = k_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \right)^2 \right\} \quad (53)$$

となる。

正常波に関しては式(25)がそのまま成り立つ。

いま  $z=0$  では、プラズマと自由空間の境界面から正常波と異常波が到達して干渉を起こす。この干渉縞をホログラムとすれば、これは式(37)の第01グループの後半の2項に相当する。前と同様に位相量を  $\varphi_{i0}$ ,  $\varphi_{ie}$  とすれば式(40), (52)より

$$\varphi_{i0} = k_0 \left( z + \frac{1}{2z} t^2 \right) \quad (53)$$

$$\varphi_{ie} = k_0 \left( z + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \right) \quad (54)$$

となり、このホログラムから図2(b)の構成で像再生を行なえば、波源の実像が  $z=z_r$ ,  $t=0$  に結像する。前回と同様に波長比  $\mu$ , 縮尺比  $m$  を用いれば、再生像面での位相量  $\varphi$  は、式(42), (53), (54)より

$$\varphi = \varphi_{ie} - \varphi_{i0} + \varphi_c \\ = \frac{k_0}{2} \left\{ -m^2 \mu \left( \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{l}{\in_3} + z - l} \right) t^2 + 2z_r + \frac{t^2}{z_r} \right\} \quad (55)$$

$t^2$  の係数 = 0 として

$$\in_3 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{\mu m^2} \cdot \frac{1}{z_r}} - z + l \quad (56)$$

を得る。式(56)より、 $z_r$  を測定することによって  $\in_3$  が、したがってプラズマ周波数が測定できる。

## 5. あとがき

異方性媒質のモデルとして、無限大磁化プラズマを選び、その中で作製されたホログラムの性質を調べた。さらに複雑な形式の（単軸でない）異方性媒質中のホログラフィについては定性的には本論文と同様なことがいえると考えられるが定式化は困難であり、今後の課題である。

日頃御討論戴いている電気工学科深井一郎助教授、電子工学科青木由直助教授はじめ電波応用講座の諸氏に感謝する。

## 参考文献

- 1) W. E. Kock: "Microwawe Hologaphy", *Microwaves*, 1968, pp. 46-54.
- 2) 宮本: "レーザによるプラズマ計測", *応用物理* 41 巻第 1 号 (1972), pp. 59-63.
- 3) G. F. Freire and R. R. Scarabuch: "Radiation from a Electric Dipole Immersed in a Lossy Anisotropic plasma", *INT. J. Electronics*, 1967, Vol. 22, No. 1, pp. 65-80.
- 4) 松本, 鈴木: "可変パラメータ異方性媒質を含む導波管内の電磁界", *信学誌* 45, 12 (昭 37-12).
- 5) 永井, 青木, 鈴木: "走査形マイクロ波ホログラフィの画質について", 昭 47 電子通信学会全国大会資料, No. 745.
- 6) K. Nagai, Y. Aoki and M. Suzuki: "On the Numerical Reconstruction of Images from a Microwave Hologram", *IEEE Trans. MTT-21*, No. 1, Jan. 1973, pp. 13-18.
- 7) R. W. Meier: "Magnification and Thirel-Order aberration in Holography", *J. Opt. Soc. Amee.* Vol. 55, pp. 987-992, Aug. 1965.
- 8) L. B. Felsen and S. Rosebaum: "Ray Optics for Radiation Problems in anisotropic Region with Boundaries, 1. Line Source Excitation", *Radio Science*, Vol. 2 (New Series), No. 8, Aug. pp. 769-791.

## 付録 式(52)の導出

式(51)の被積分項の exponential の中の関数を  $-jP(k_t)$  とすると

$$P(k_t) = k_t t + \kappa_0(z-l) + \kappa_1 l - \pi/4 \quad (\text{A } 1)$$

であり,

$$P'(k_t) = t + (z-l) \frac{d\kappa_0}{dk_t} + l \frac{d\kappa_1}{dk_t} \quad (\text{A } 2)$$

$$P''(k_t) = (z-l) \frac{d^2\kappa_0}{dk_t^2} + l \frac{d^2\kappa_1}{dk_t^2} \quad (\text{A } 3)$$

となる。鞍部点は

$$P'(k_t) = 0 \quad (\text{A } 4)$$

の根であるが簡単には求まらない。

ここで, Felsen らの提唱する Ray Optics の考え方<sup>8)</sup>を用いる。

式(17), (26)より

$$\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 - k_t^2} \quad (\text{A } 5)$$

$$\kappa_1 = \sqrt{k_0^2 - \frac{k_t^2}{\epsilon_3}} \quad (\text{A } 6)$$

であるから,  $(\kappa_0, k_t)$ ,  $(\kappa_1, k_t)$  を図示すれば, 図 A 1 のようになる。これらの曲線の法線がそこで

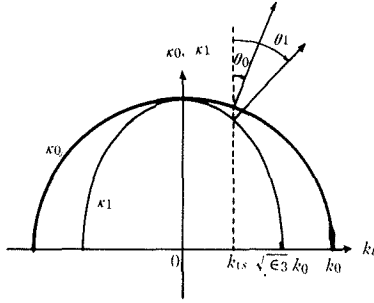
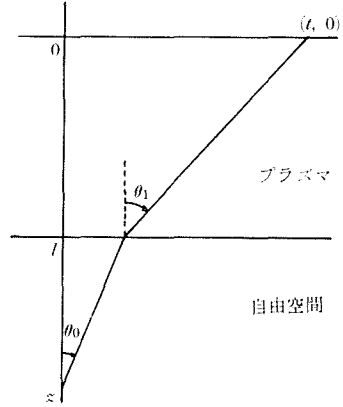
図 A 1  $\kappa_0, \kappa_1$  と  $k_x$  の関係

図 A 2 波のエネルギー伝搬路

の波のエネルギーの伝播方向を示しているが、今、法線と縦 ( $\kappa_0, \kappa_1$ ) 軸とのなす角を図 A 1 に示すようにそれぞれ  $\theta_0, \theta_1$  とすれば、

$$\frac{d\kappa_0}{dk_x} = -\tan \theta_0, \quad \frac{d\kappa_1}{dk_x} = -\tan \theta_1 \quad (\text{A } 7)$$

であるから、式 (A 4) は

$$t = (z-l) \tan \theta_0 + l \tan \theta_1 \quad (\text{A } 8)$$

となり、図 A 2 から明らかなように光路 (波のエネルギーの伝播路) を与えている。逆に言えば、鞍部点は図 A 2 の  $\theta_0, \theta_1$  を与えるような  $k_x$  の値である。いま、近軸領域  $|z| \gg |l|$  では、図 A 1 より明らかなように

$$|k_x| \ll k_0 \quad (\text{A } 9)$$

である。それゆえ、式 (A 5), (A 6) よりつぎの近似式が成り立つ。

$$\kappa_0 \simeq k_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{k_x}{k_0} \right)^2 \right\} \quad (\text{A } 10)$$

$$\frac{d\kappa_0}{dk_x} \simeq -\frac{k_x}{k_0} \quad (\text{A } 11)$$

$$\kappa_1 \simeq k_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\epsilon_3} \left( \frac{k_x}{k_0} \right)^2 \right\} \quad (\text{A } 12)$$

$$\frac{d\kappa_1}{dk_x} \simeq -\frac{1}{\epsilon_3} \frac{k_x}{k_0} \quad (\text{A } 13)$$

式 (A 10)~(A 13) を (A 4) に代入し、鞍部点  $k_x = k_{xs}$  は

$$k_{xs} = \frac{k_0 l}{\frac{l}{\epsilon_3} + z - l} \quad (\text{A } 14)$$

となり、このときの  $\kappa_0, \kappa_1$  をそれぞれ  $\kappa_{0s}, \kappa_{1s}$  とすれば、これらは式 (53) になり、pole, branch cut などの寄与を無視すれば、式 (51) の積分に鞍部点法が適用できて式 (52) を得る。