



| | |
|------------------|---|
| Title | Zubov法によるLiapunov関数構成のための計算機プログラム |
| Author(s) | 伊藤, 輝美; Itoh, Terumi; 西谷, 健一 他 |
| Citation | 北海道大學工学部研究報告, 73, 35-46 |
| Issue Date | 1974-12-25 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41247 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 73_35-46.pdf |



Zubov 法による Liapunov 関数構成の ための計算機プログラム

伊藤輝美* 西谷健一**
長谷川 淳** 小池東一郎**
(昭和49年6月29日受理)

On Computer Program Generating the Liapunov Function by Means of Zubov's Method

Terumi ITOH, Ken-ichi NISHIYA,
Jun HASEGAWA, Toichiro KOIKE
(Received June 29, 1974)

Abstract

Liapunov's direct method is highly useful for stability analyses in non-linear systems, and Zubov's systematic construction procedure of the Liapunov function is also quite useful.

In this paper, computational programs generating the Liapunov function by means of Zubov's method as the system equation given in a form of power series, are discussed.

An ordering scheme, which gives a one to one correspondence between a series number of a homogeneous polynomial (L) and its exponents (K_i) by means of new parameters (J_i), was introduced and used by the authors.

In this paper, computational programs to determine an asymptotic stability region were also discussed.

As examples, model systems of two and three state variables, modeling simple power systems, were considered, and Liapunov functions and stability regions are shown.

1. 緒 言

近年、非線形システムの安定判別の研究に対して Liapunov の直接法^{1),2)}が注目されており、多くの研究者により用いられ、成功している。Liapunov の直接法は、与えられたシステム方程式に対して Liapunov 関数と呼ばれるある特別な性質をもった関数を構成し、その関数の性質を利用してシステムの安定性を論じるものである。この方法はエネルギーの概念の一般化であると考えられ、非常に一般性があると同時に、システム方程式の解それ自体に関する完全な知識を必要とせず、システムの安定性に関する情報を得ることができる。

Liapunov の直接法はこのように強力なものであるが、しかし、次の2つの難点を持っていることも指摘しなければならない。第一は、Liapunov の安定定理は十分条件を与えるものであ

* 電源開発株式会社

** 電気工学科 電力工学講座

るから、ある Liapunov 関数が安定条件を満足しないからといって実際にシステムが不安定になるとは限らず、別な Liapunov 関数により安定条件を満足することがあることである。第二は、Liapunov の直接法は真の安定領域を与える Liapunov 関数をいかにすれば見出し得るかについて何の示唆も与えていないという点である。これらの難点を克服しようと、様々な構成法がこの分野の研究者によって提案されてきているが、その中で Zubov の構成法³⁾は、計算機によって Systematic に Liapunov 関数を構成することができると同時に、漸近安定領域の推定を与えるという優れた特徴をもっている。

本論文は、Zubov の方法による Liapunov 関数構成のための計算機プログラム^{4),5)}について述べている。本研究は特に電力システムの安定度解析に使用する Liapunov 関数の構成を指向して行ったが、この計算機プログラムは、電力システムに限らず、任意のシステムを取扱い得るように考えられた一般的なものである。

2. Zubov 法による Liapunov 関数の構成

2.1 Zubov の理論

V. I. Zubov は、システム方程式が、 \mathbf{X} を n 次の状態変数ベクトルとして

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

で与えられたとき、任意に与えられる正定値関数 $U(\mathbf{X})$ に対して、次の偏微分方程式を解くことにより、真の安定領域を与える Liapunov 関数 $V(\mathbf{X})$ を求めうることを示した⁶⁾。

$$\left\{ \nabla V(\mathbf{X}) \right\}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}) = -U(\mathbf{X}) \{1 - V(\mathbf{X})\} \quad (2)$$

上式を解析的に閉じた形で解くことが出来れば、真の安定領域を与える Liapunov 関数が求まったことになると同時に、その安定境界は $V(\mathbf{X})=1$ という超平面により与えられる。しかし、(2) 式が解析的に閉じた形で解かれることは非常にまれであり、一般には以下に述べる様に、べき級数法により解かれることになる。実際には、べき級数を有限次の項で打ち切らざるをえないため、Liapunov 関数の近似解 $V_n(\mathbf{X})$ のみが得られることになる。

$V(\mathbf{X})$, $U(\mathbf{X})$, $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ をべき級数に展開すると次式が得られる。

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{I=2}^{\infty} V_I(\mathbf{X}), \quad U(\mathbf{X}) = \sum_{I=2}^{\infty} U_I(\mathbf{X}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{\infty} \mathbf{f}_I(\mathbf{X}) \quad (3)$$

$V_I(\mathbf{X})$, $U_I(\mathbf{X})$, $\mathbf{f}_I(\mathbf{X})$ は I 次の斉次式を示し、例えば次の様に書ける。

$$V_I(\mathbf{X}) = \sum_I a_{K_1 K_2 \dots K_n} x_1^{K_1} x_2^{K_2} \dots x_n^{K_n} \quad (4)$$

この総和は次式を満足するすべての組み合わせについてとられる。

$$K_i = 0, 1, 2, \dots, I \quad i = 1, 2, \dots, n \quad K_1 + K_2 + \dots + K_n = I \quad (5)$$

(1) 式のシステムが漸近安定であるためには、平衡点のまわりでの線形近似方程式

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{F}\mathbf{X} \quad (6)$$

が漸近安定であらねばならないので、Zubov 法を適用する前に確認しておく必要がある。

(3) 式を (2) 式に代入することにより次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \nabla V_2(\mathbf{X}) \right\}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) &= -U_2(\mathbf{X}) \\ \left\{ \nabla V_3(\mathbf{X}) \right\}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) + \left\{ \nabla V_2(\mathbf{X}) \right\}^T \mathbf{f}_2(\mathbf{X}) &= -U_3(\mathbf{X}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \left[\nabla V_I(\mathbf{X}) \right]^T \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) + \sum_{k=2}^{I-1} \left\{ \left[\nabla V_{I-k+1}(\mathbf{X}) \right]^T \mathbf{f}_k(\mathbf{X}) \right. \right. \\ & \left. \left. = -U_I(\mathbf{X}) + \sum_{k=2}^{I-2} V_{I-k}(\mathbf{X}) U_k(\mathbf{X}) \quad I=4, 5, \dots, N \right. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

すべての $\mathbf{f}_I(\mathbf{X})$ は既知であり、 $U_I(\mathbf{X})$ は任意に与えうる関数であるから、上式を順次解くことにより、 $V_2(\mathbf{X}), V_3(\mathbf{X}), \dots, V_N(\mathbf{X})$ を求めることができる。ここで N は考える最大のべき級数の次数を示している。

電子計算機による処理が容易になる様に、次の様なベクトル・マトリクス表示を用いる。

$$\left. \begin{aligned} & V_I(\mathbf{X}) = \mathbf{A}_I^T \mathbf{X}^I, \quad U_I(\mathbf{X}) = \mathbf{E}_I \mathbf{X}^I \\ & \left\{ \left[\nabla V_{I-k+1}(\mathbf{X}) \right]^T \mathbf{f}_k(\mathbf{X}) = \mathbf{A}_{I-k+1}^T \mathbf{B}_{I-k+1, I} \mathbf{X}^I \right. \\ & \left. V_{I-k}(\mathbf{X}) U_k(\mathbf{X}) = \mathbf{A}_{I-k}^T \mathbf{C}_{I-k, I} \mathbf{X}^I \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで $\mathbf{A}_I, \mathbf{E}_I, \mathbf{X}^I$ はいずれも (5) 式を満足するすべての組合わせの数 ($MAX(I)$ によりあらわすものとする) に等しいだけの要素を持つ次の様なベクトルである。

$$\mathbf{A}_I = [a_{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n}], \quad \mathbf{E}_I = [e_{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n}], \quad \mathbf{X}^I = [x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \dots x_n^{\kappa_n}] \quad (9)$$

$$MAX(I) = {}_{N+I-1}C_I = \binom{N+I-1}{I} \quad (10)$$

また $\mathbf{B}_{p,q}, \mathbf{C}_{p,q}$ は同様に、その行および列の数が $MAX(p), MAX(q)$ に等しいマトリクスを意味している。これらのベクトル、マトリクスのうち、 \mathbf{A}_I は未知のベクトルであるが、 $\mathbf{E}_I, \mathbf{B}_{p,q}, \mathbf{C}_{p,q}$ は $\mathbf{f}(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})$ から決定できる既知のものである。

(8) 式を (7) 式に代入すると、次の様なベクトル・マトリクス関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{B}_{22} = -\mathbf{E}_2^T, \quad \mathbf{A}_3^T \mathbf{B}_{33} + \mathbf{A}_2^T \mathbf{B}_{23} = -\mathbf{E}_3^T \\ & \left\{ \mathbf{A}_I^T \mathbf{B}_{II} + \sum_{k=2}^{I-1} \mathbf{A}_{I-k+1}^T \mathbf{B}_{I-k+1, I} = -\mathbf{E}_I^T + \sum_{k=2}^{I-2} \mathbf{A}_{I-k}^T \mathbf{C}_{I-k, I} \quad I=4, 5, \dots, N \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

結局、(7) 式を解く問題 (すなわち (2) 式の $V(\mathbf{X})$ の近似解 $V_a(\mathbf{X})$ を得る事) は、(11) 式という線形代数方程式を解き $V_2(\mathbf{X}), V_3(\mathbf{X}), \dots, V_N(\mathbf{X})$ の係数ベクトル $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_N$ を求める問題へと変換された訳である。

2.2 開発すべきプログラム

電子計算機を用いて Zubov 法により Liapunov 関数を構成し、実際に使用するためには、2 つのプログラムを開発する必要がある。1 つは Liapunov 関数の近似解 $V_a(\mathbf{X})$ を決定するために、係数ベクトル $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_N$ を求めるプログラムである。これに関連する種々の問題が第 3 章において述べられている。今 1 つは、近似解 $V_a(\mathbf{X})$ に対して、安定領域 $V_a(\mathbf{X}) \leq C_{\min}$ を決定するためのプログラムである。Zubov 法により厳密な Liapunov 関数が見い出されれば、 $V(\mathbf{X}) \leq 1$ により安定領域が決定できるが、実際には近似解 $V_a(\mathbf{X})$ しか得られず、 $V_a(\mathbf{X}) \leq 1$ では安定領域とはならない。これについては第 4 章で述べている。

3. 係数ベクトル $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_N$ の作成

3.1 計算のメインフローと ORDERING SCHEME

第 1 図は $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_N$ を順次決定する計算の流れを示したものである。 $\mathbf{B}_{I,I}, \mathbf{E}_I$ の作成手順や、 $\mathbf{A}_{I-k+1}^T \mathbf{B}_{I-k+1, I} (k \neq 1), \mathbf{A}_{I-k}^T \mathbf{C}_{I-k, I}$ の演算手順については後述するが、これらの計算を能率良く実行するために以下に述べる様な ORDERING SCHEME を導入する。

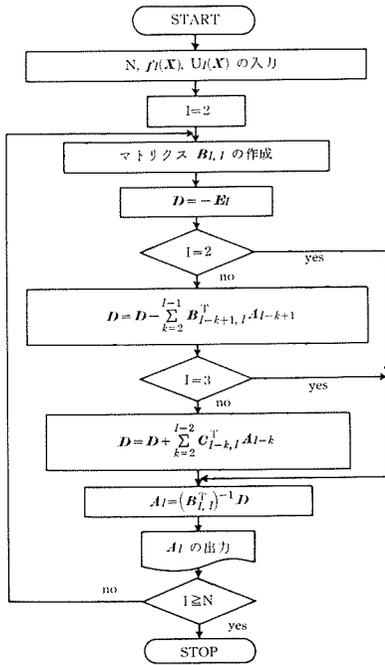
この SCHEME は、ある固定した I に対して、(5) 式を満足するすべての組み合わせにつけた通し番号 L と指数部 K_1, K_2, \dots, K_n とを 1 対 1 で容易に対応づけられる様にしたものである。この作業は新しく導入するパラメータ J_1, J_2, \dots, J_{n-1} を介して行なわれるが、この J_i と指数部 K_i との間には次の様な関係式が成立する。

$$K_1 = I - J_1, \quad K_i = J_{i-1} - J_i \quad (2 \leq i \leq n-1), \quad K_n = J_{n-1} \quad (12)$$

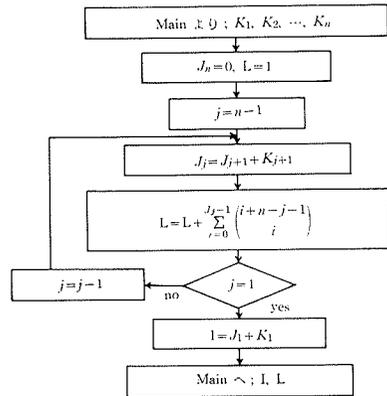
また通し番号 L とパラメータ J_i との間には次の関係式が成立している。

$$L = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{J_j-1} \binom{i+n-j-1}{i} \quad (13)$$

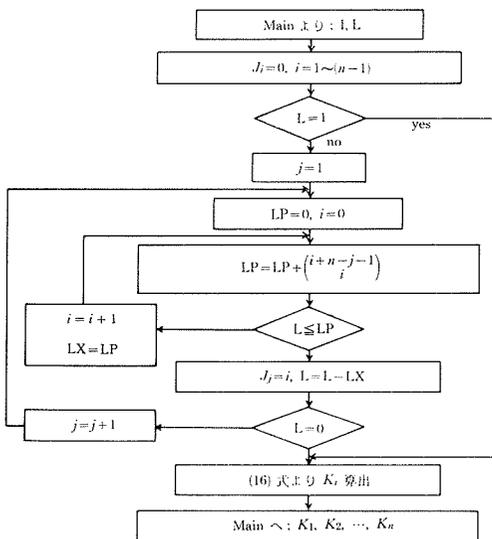
従って、パラメータ J_i を媒介として、① ある指定した I, L に対して対応する指数部 K_i を発生させること (サブルーチン SKY), ② ある指定した指数部 K_i に対して対応する I, L を決定すること (サブルーチン SEA), ができる。これらのサブルーチンを第 2 図, 第 3 図に示している。また参考のために、 $n=4, I=2$ の場合の ORDERING SCHEME を第 1 表に示した。



第 1 図 A_I 算出のためのフローチャート



第 3 図 サブルーチン SEA



第 2 図 サブルーチン SKY

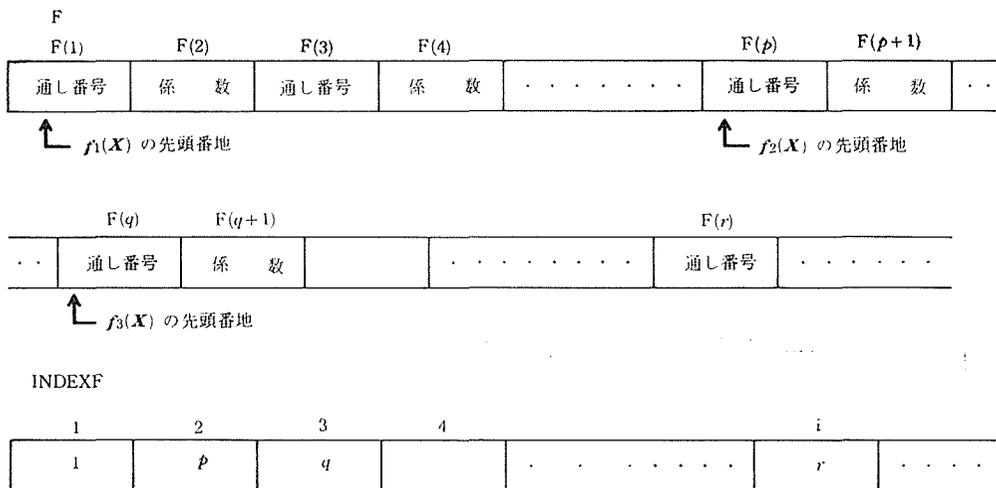
第 1 表 ORDERING SCHEME の例 ($n=4, I=2$ の場合)

| L | J_1 | J_2 | J_3 | K_1 | K_2 | K_3 | K_4 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 9 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |

3.2 入力データ $f(X)$, $U(X)$ および係数ベクトル A_I について

$f(X)$, $U(X)$ は (3) 式の様なべき級数の形で与える。これらのデータは第 4 図に示す様に、通し番号 L と対応する係数とを 1 組にして配列 F , U として入力し、それらが何次の斉次式のデータであるかは変数 $INDEXF(J)$, $INDEXU(J)$ で J 次の斉次式の先頭番地を指示することにより与える。この先頭番地が -5000 のときにはその次数のデータが全く無いことを意味し、また通し番号が -7000 のときには、 U にあってはその次数のデータの終了を意味し、 F にあってはその次数のその行のデータの終了を意味する。

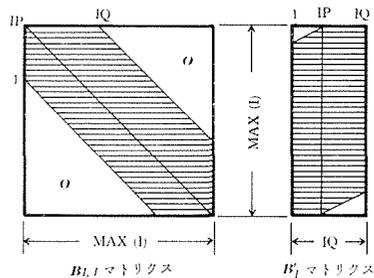
係数ベクトルは一本のベクトル A に記憶するものとし、 I 次の係数ベクトル A_I の先頭番地を $INDEXA(I)$ によりあらわす。 A_I の要素の数は (10) 式で与えられる。



第 4 図 入力データの与え方

3.3 $B_{I,I}$ マトリクスの構造についてのコメント

システム方程式 $f(X)$ の線形項 $f_1(X)$ の性質により決定されるのであるが、一般には $B_{I,I}$ マトリクスはスパースとなり、また適当な順序づけをすることでその非零要素を対角付近に集中させることができる。筆者等に特に興味のある電力系統の場合にはまさしくこの様な性質を有している。この様な性質を有するときには、計算時間とメモリの節約のために、第 5 図の様なバンド構造マトリクス B'_I として記憶しておく方が得策である。



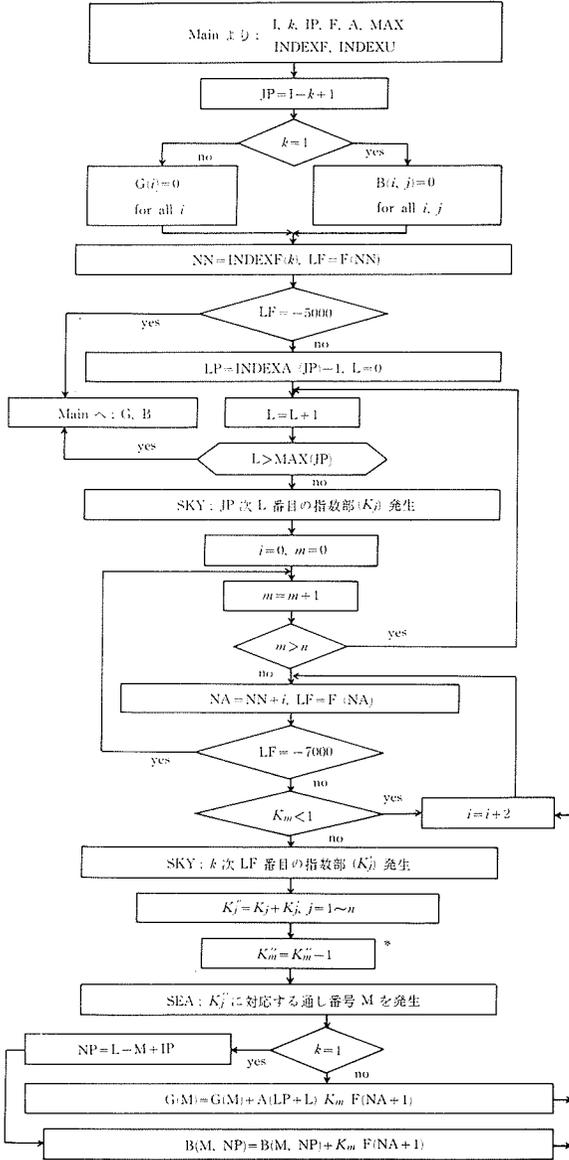
第 5 図 $B_{I,I}$ マトリクスの構造

$B_{I,I}$ の要素 b_{ij} と B'_I の要素 $b'_{p,q}$ との間には、次の関係式が成立している。

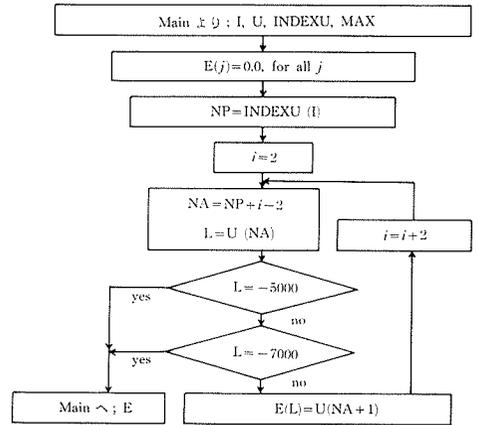
$$b_{ij} = b'_{p,q} = b'_{i,(j-i+1P)} \tag{14}$$

3.4 マトリクス B'_I およびベクトル E_r , $A_{I-k+1,I}^T B_{I-k+1,I} (k \neq 1)$, $A_{I-k}^T C_{I-k,I}$ の作成 (サブルーチン)

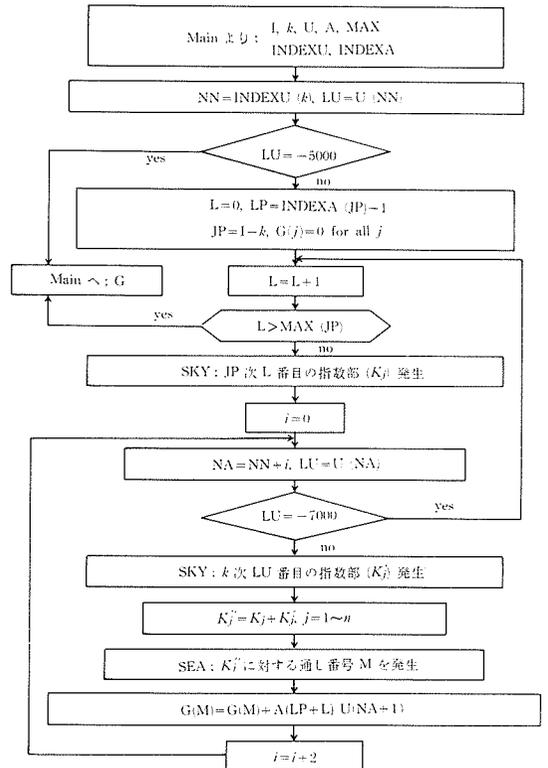
マトリクス B'_I とベクトル $A_{I-k+1,I}^T B_{I-k+1,I}$ の作成は同一のサブルーチン (第 6 図) により行なわれる。このサブルーチンにおいて、 $k=1$ の場合に B'_I の作成が行なわれ、それ以外に $A_{I-k+1,I}^T B_{I-k+1,I}$ の計算が行なわれる。また * 印のあるブロックは偏微分の操作を行なうために必要なものである。



第6図 B'_{I-k+1} , $A^T_{I-k+1} B_{I-k+1, I}$ の計算のためのサブルーチン



第7図 E_I を作成するサブルーチン



第8図 $A^T_{I-k} C_{I-k, I}$ の計算のためのサブルーチン

第7図は E_I を作成するサブルーチンのフローチャートである。 $A^T_{I-k} C_{I-k, I}$ の計算は $A^T_{I-k+1} B_{I-k+1, I}$ の計算と非常に似た方法で行なうことができるが、偏微分の入ってこない。第8図はこの計算を行なうサブルーチンのフローチャートである。

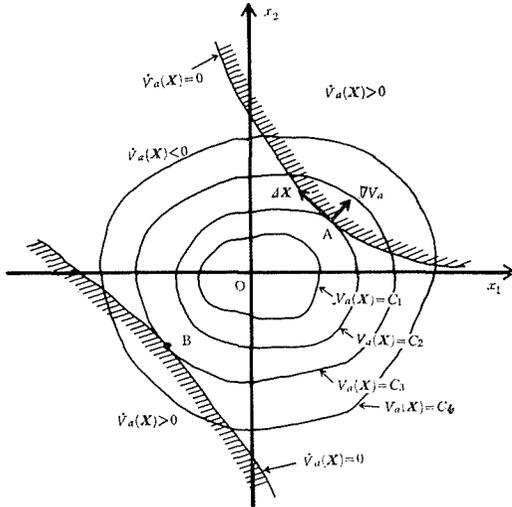
4. 漸近安定領域 $V_a(X) \leq C_{\min}$ の決定

前述のごとく、Zubov 方程式の厳密解が得られる場合には $V(X) \leq 1$ により漸近安定領域を

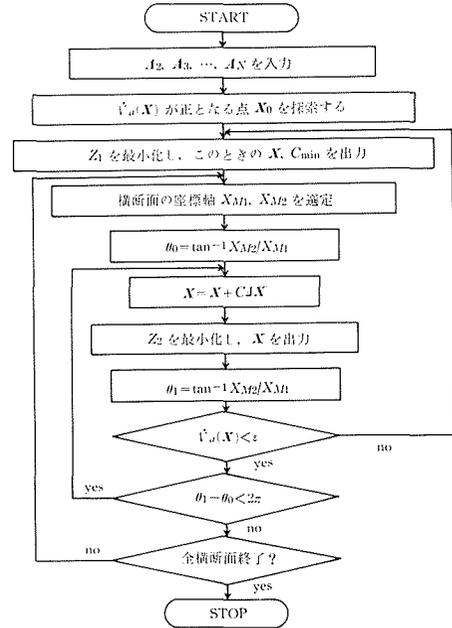
決定することができるが、近似解しか得られない場合に対しては $V_a(\mathbf{X}) \leq 1$ によっては漸近安定領域を求めることはできない。この場合には漸近安定領域 $V_a(\mathbf{X}) \leq C_{\min}$ を規定する C_{\min} を求めるというやっかいな問題が存在する。ここで C_{\min} は

$$C_{\min} = \text{Min}_{\mathbf{X} \neq \mathbf{0}} \left\{ V_a(\mathbf{X}) \mid \dot{V}_a(\mathbf{X}) = 0 \right\} \quad (15)$$

である。第9図は状態変数が2個の場合の例であり、 C_{\min} は C_2 となる。状態変数が n 個の場合にも状況は同じであると考えられる。



第9図 2状態変数の場合の漸近安定領域



第10図 C_{\min} 決定のためのフローチャート

(15) 式は制約条件式 $\dot{V}_a(\mathbf{X}) = 0$ のもとで $V_a(\mathbf{X})$ を最小化する非線形計画問題と考えることもでき、また目的関数を次式の様に選ぶことにより、いわゆる逐次無制約最適化法 (SUMT) を適用することもできる。しかしながら、単純にこれらの方法を適用すると解が原点に収束してしまい、 C_{\min} を決定することができない。

$$Z_1(\mathbf{X}, r_k) = V_a(\mathbf{X}) + r_k^{-1} \left\{ \dot{V}_a(\mathbf{X}) \right\}^2 \quad (16)$$

C_{\min} の決定のために、筆者等は次の様な手法 (第10図) を開発し、本論文の数値計算例において使用した。しかし残念ながら、この方法はまだ完全なものとはいえない。状態変数が2個の場合には容易に C_{\min} を決定できるが、状態変数が3個以上になると、後述のごとく、完全には解決されていない一面を残している。

手順1; \mathbf{X} を原点からある任意に選んだ方向に変化させ、 $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ がはじめて正になる点 \mathbf{X}_0 を探索する。この手順は、正の $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ が得られるまで、探索方向を自動的に変えて実行する。

手順2; \mathbf{X}_0 を初期値とし (16) 式の最小化計算を行なう。この結果得られた \mathbf{X} により $V_a(\mathbf{X})$ を計算し、 C_{\min} の候補とする。 r_k は適当な精度が得られる様な値をとる。

手順3; $V_a(\mathbf{X}) = C_{\min}$ という安定境界を追跡するため適当な横断面を選定する。この横断面をどの様に選ぶかという問題が2個の状態変数という自明の場合を除き未解決である。

手順4; $V_a(\mathbf{X})$ の傾き $\nabla V_a(\mathbf{X})$ に直交するベクトル $\Delta \mathbf{X}$ を決定し、この方向に微量だけ変化した後次式を最小化し、 $V_a(\mathbf{X}) = C_{\min}$ という超平面上の点を追跡する。

$$Z_2(\mathbf{X}) = \left\{ V_a(\mathbf{X}) - C_{\min} \right\}^2 \quad (17)$$

この追跡の過程では常に $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ の値がチェックされ、もし $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ が正の微小量 ε を超える場合には、この点を初期値として手順 2 にもどりより小さな C_{\min} を決定することになる。またこの追跡は、 $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ が負のまま横断面上を一周したときに、終了する。

5. 数値計算例

5.1 状態変数が 2 個のモデルシステム⁷⁾

簡単な 1 機無限大母線の電力システムをモデル化した次のシステムを考えるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= - \left\{ A \cos^2(x_1 + x_0) + B \sin^2(x_1 + x_0) \right\} x_2 \\ &\quad - \left\{ \sin(x_1 + x_0) - \sin x_0 \right\} - P_s \left\{ \sin 2(x_1 + x_0) - \sin 2x_0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで、 $A=0.04972$, $B=0.02468$, $P_s=-0.1291$ である。また、 $x_0=0.3872$ [rad.] である。

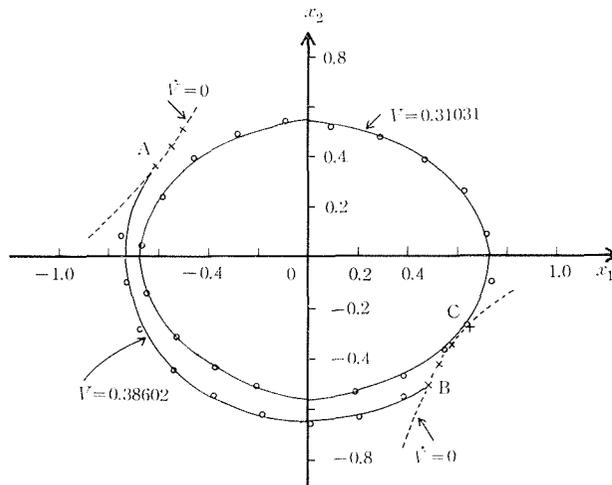
(18) 式を級数展開すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -R_1 x_1 - D_0 x_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_i(\mathbf{X}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -R_i x_1^i - D_{i-1} x_1^{i-1} x_2 \end{bmatrix}, \quad i \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

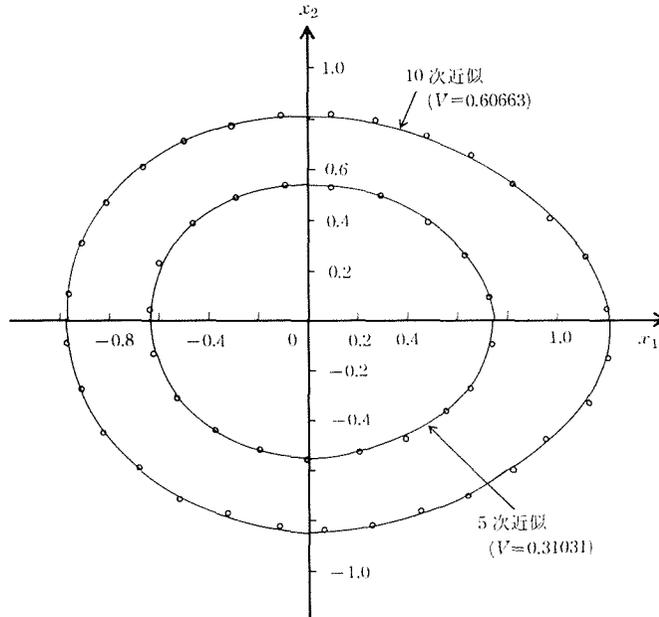
ここで、 D_0 , D_i , R_i は次のとおりである。

第 2 表 2 状態モデルにおける計算結果の例

| | | | | | | |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| A_5 | 5.36×10^{-2} | 5.45×10^{-3} | 1.13×10^{-1} | -3.38×10^{-2} | -5.28×10^{-3} | -3.83×10^{-2} |
| A_{10} | 1.19×10^{-2} | 1.05×10^{-3} | 4.69×10^{-2} | 6.70×10^{-3} | 8.71×10^{-2} | 1.51×10^{-2} |
| | 9.60×10^{-2} | 1.34×10^{-2} | 5.81×10^{-2} | 3.99×10^{-2} | 1.66×10^{-2} | |



第 11 図 5 次近似の安定領域



第12図 5次近似と10次近似との安定領域の比較

$$D_0 = (A+B)/2 + \left\{ (A-B)/2 \right\} \cos 2x_0$$

$$D_i = \left\{ 2^i (A-B)/2i! \right\} \cos (2x_0 + i\pi/2), \quad (i \geq 2)$$

$$R_i = \left[\cos \left\{ x_0 + (i-1)\pi/2 \right\} + 2^i P_i \cos \left\{ 2x_0 + (i-1)\pi/2 \right\} \right] / i!, \quad (i \geq 1)$$

$U(\mathbf{X}) = D_0(x_1^2 + x_2^2)$ として Liapunov 関数を求めると第2表の様な結果が得られる。ただし紙面の都合上 A_5, A_{10} のみを示した。また安定境界は、例えば第11図の様にも求められる。この図は5次までの項で近似した場合であり、A点より追跡をはじめ、途中B点で $\dot{V}_a(\mathbf{X})$ が正となり、C点より再び追跡をはじめている。第12図は5次近似と10次近似との安定領域の比較である。

5.2 状態変数が3個のモデルシステム⁸⁾

同じく電力システムの例であるが、次の様に3個の状態変数であらわされる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A - B(\dot{\gamma} + x_3) \sin(x_1 + \alpha) + C \sin 2(x_1 + \alpha) \\ &\quad - x_2 \left\{ L \sin^2(x_1 + \alpha) + K \cos^2(x_1 + \alpha) \right\} \\ \dot{x}_3 &= G - E(\dot{\gamma} + x_3) + F \cos(x_1 + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで、 $A = 28.61, B = 84.99, C = 21.53, G = 0.36, \alpha = 0.478, E = 0.621, F = 0.421, L = 1.04, K = 0.802, \dot{\gamma} = 1.18$ である。

$U(\mathbf{X}) = 0.01(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ とした場合の Liapunov 関数を計算すると、例えば A_5 は第3表の様な結果が得られる。要素の値はオーダー的にみてもさまざまであるが、この傾向は近似の次数を高めるとよりけんちよなものとなる。例えば A_{10} では66個の要素のうち 10^0 のオーダーのものが4個、 10^{-1} のオーダーのものが8個、 10^{-2} のオーダーのものが9個あり、残りの45個は 10^{-3} 以下のオーダーのものとなっている。

第3表 3状態モデルにおける計算結果の例

| | | | | | | |
|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| \mathbf{A}_5 | -3.27×10^{-2} | 1.58×10^{-3} | -2.50×10^{-1} | -1.14×10^{-4} | 2.56×10^{-3} | -3.63×10^{-1} |
| | 5.01×10^{-5} | -4.06×10^{-3} | -5.49×10^{-4} | -1.40×10^{-1} | 1.14×10^{-6} | 1.89×10^{-5} |
| | -2.62×10^{-3} | -2.29×10^{-3} | 2.52×10^{-1} | 3.49×10^{-7} | -1.43×10^{-5} | -1.17×10^{-4} |
| | 3.55×10^{-3} | -7.52×10^{-3} | 9.51×10^{-2} | | | |

第4表 \mathbf{A}_I の構成要素数

| N | n | | | | |
|----|----|-----|------|-------|---------|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
| 2 | 3 | 6 | 10 | 15 | 55 |
| 3 | 4 | 10 | 20 | 35 | 220 |
| 4 | 5 | 15 | 35 | 70 | 715 |
| 5 | 6 | 21 | 56 | 126 | 2002 |
| 6 | 7 | 28 | 84 | 210 | 5005 |
| 8 | 9 | 45 | 165 | 495 | 24310 |
| 10 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 92378 |
| 13 | 14 | 105 | 560 | 2380 | 497420 |
| 16 | 17 | 153 | 969 | 4845 | 2042975 |
| 20 | 21 | 231 | 1771 | 10626 | 5451679 |

6. 考察と結言

システム方程式がべき級数の形で与えられさえすれば、本論文で示したプログラムを使うことによって、Liapunov 関数の任意の次数までの近似式を計算することが可能である。状態変数の数があまり多くはなく、またあまり高次までの齊次式を考えなくとも十分な精度が得られる様な場合には（前述した漸近安定領域を決定するアルゴリズムでの未解決の部分を除いて）問題は解決したといえる。しかしながら、現実的な状況はそう単純ではない。(11)式により求めなければならない係数ベクトル \mathbf{A}_I の要素数は、第4表にみられるごとく、状態変数の数が増加するにつれて、また考える次数（これは近似の精度に深いつながりをもっている）を増加するにつれて、飛躍的に増大してくる。それ故、たとえ $\mathbf{B}_{I,I}$ マトリクスをバンド構造マトリクス \mathbf{B}'_I の形で記憶するとしても、必要とされる記憶容量が莫大となり、また計算時間も大幅に増加し、現在の大型の電子計算機をもってしても取扱いが困難となり、不可能とさえいえる。

システムティックに Liapunov 関数を決定できるという特徴から、Zubov 法は非常に魅力的であり、今後とも研究を行なう価値は非常に高いが、この時には上記の問題の解決がその中心課題となろう。この問題の解決に対して確かな idea を持っている訳ではないが、当面次の点について検討し、突破口を探したいと考えている。

(1) 第3表の計算結果例にみられる様に、求められた \mathbf{A}_I の値はオーダー的にもさまざまであり、中心的役割をもつ要素の数は非常に少ないと考えられる。そこで、この中心的役割を演ずる要素のみをとり出し、他の要素を無視する有効な方策 (\mathbf{A}_I を求めた後にオーダー的に無視し得るものを記憶しないという消極的な方策ではなく、 \mathbf{A}_I を求める過程ですでにこの点を考えるという積極的な方策) の有無

(2) (2)式の解を得るためにべき級数展開を利用しているが、べき級数展開以外の他の方策の可能性 (たとえば他の有用な級数展開を利用し得るかどうかなど)の有無

これまでの議論から明らかな様に、今後に残された課題のうち特に大きなものは、次の2つと考えられる。

(1) 取扱い得る範囲の拡大 (これはとりもなおさず上記の問題の解決である)

(2) 漸近安定領域を決定するアルゴリズムでの未解決部分の解決、あるいは漸近安定領域を決定する新しいアルゴリズムの開発

尚、本論文は筆者の1人伊藤が本研究科修士課程在学中に行なった研究と、その後長谷川が行なった検討の結果とをとりまとめたものである。

本論文の計算例はすべて本学大型電子計算機センター設置の FACOM 230-60 により計算したものであることを付記して、関係諸氏への謝辞にかえたい。

電気工学科演算工学講座御担当の津田孝夫教授には本研究の遂行に際し有益な御助言をいただいた。ここにこれを記して感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) W. Hahn: Theory and Application of Liapunov's Direct Method. (1963), Prentice Hall.
- 2) J. E. Gibson (編井武夫訳): 非線形自動制御 (昭43), コロナ社, pp. 334-390.
- 3) S. G. Margolis and W. G. Vogt: Control Engineering Applications of V. I. Zubov's Construction Procedure for Lyapunov Functions. IEEE Trans. Aut. Control, AC-8 (1963), pp. 104-113.
- 4) 伊藤, 西谷, 長谷川, 小池: 昭和48年電気四学会北海道支部連合大会 148 (昭48.10).
- 5) 伊藤, 西谷, 長谷川, 小池: 昭和49年電気学会全国大会 753 (昭49.3).
- 6) V. I. Zubov: Questions of the Theory of Liapunov's Second Method, Construction of a General Solution in the Region of Asymptotic Stability. (in Russian), Prikladnaga Matematika i Mekhanika, PMM-19 (1955), pp. 179-210.
- 7) 関根泰次: 電力系統解析理論 (昭46), 電気書院, pp. 179-210.
- 8) A. K. De Sarkar and N. D. Rao: Zubov's Method and Transient-Stability Problems of Power Systems. PIEE Vol. 118, No. 8 (1971), pp. 1035-1040.

付 録

$E_i, B_{p,q}, C_{p,q}$ 等の具体的な例を示すことにしよう。モデルシステムとしては、次に示される微分方程式により記述されるものを考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_1^2 x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

べき級数により書くものとすれば、 $f_1(\mathbf{X}) = [-x_1 + x_2, -x_1 - x_2]^T$, $f_3(\mathbf{X}) = [x_1^3 + x_1 x_2^2, x_1^2 x_2 + x_2^3]^T$, $f_i(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ ($i=2, i \geq 4$) となる。ただし $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T$ である。また $U(\mathbf{X}) = U_2(\mathbf{X}) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ とする。

このとき、以下の様な関係式が成立し、たとえば E_2, B_{22}, C_{24} 等が解る。

$$\begin{aligned}
U_2(\mathbf{X}) &= [2, 0, 2] [x_1^2, x_1 x_2, x_2^2]^\top = -\mathbf{E}_2^\top \mathbf{X}^2 \\
\left\{ \nabla V_2(\mathbf{X}) \right\}^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) &= \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \\
&= [a_{20}, a_{11}, a_{02}] \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} [x_1^2, x_1 x_2, x_2^2]^\top \\
&= \mathbf{A}_2^\top \mathbf{B}_{22} \mathbf{X}^2 \\
V_2(\mathbf{X}) U_2(\mathbf{X}) &= [a_{20}, a_{11}, a_{02}] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} [x_1^4, x_1^3 x_2, x_1^2 x_2^2, x_1 x_2^3, x_2^4]^\top \\
&= \mathbf{A}_2^\top \mathbf{C}_{24} \mathbf{X}^4
\end{aligned}$$