



Title	表面弾性波の非調和減衰（第2報）：一般論
Author(s)	中山, 恒義; Nakayama, Tsuneyoshi; 佐久間, 哲郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 73, 123-132
Issue Date	1974-12-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41251">https://hdl.handle.net/2115/41251</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	73_123-132.pdf



## 表面弾性波の非調和減衰 (第2報)

— 一般論 —

中山恒義\* 佐久間哲郎\*

(昭和49年6月29日受理)

### Anharmonic Damping of Surface Elastic Waves (II)

— General Theory —

Tsuneyoshi NAKAYAMA Tetsuro SAKUMA

Department of Engineering Science, Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, Sapporo

(Received June 29, 1974)

#### Abstract

Based on the theory of surfons, we present a formalism to calculate the attenuation rate of elastic surface waves at low temperatures in a high frequency region. A general formula for the attenuation rate due to the cubic anharmonic terms in the elastic energy of an isotropic elastic continuum is given by means of a temperature-dependent Green's function. In a frequency region between 20 and 40 GHz at  $T=1^\circ\text{K}$ , our results show quite different frequency and temperature dependence  $\omega^{1+n} T^{4-n}$  ( $1.9 \lesssim n \lesssim 2.2$ ) from that obtained in a low frequency region.

#### 1. 序 論

論文<sup>1)</sup>において述べたように、表面弾性波は固体エレクトロニクスの分野において重要であることが認められ、最近この分野の研究が急速に発展してきた。表面弾性波とは、その速度がバルク波のそれよりおそく固体表面から一波長以内にそのエネルギーを集中させて伝播するモードの波のことである。これは入力パワーが比較的小さくてもエネルギー密度が非常に大きくなり非調和減衰がocこりやすいことを意味している。勿論絶縁体における表面弾性波の減衰の要因としては、非調和減衰のほかに固体表面における結晶の欠陥<sup>2)</sup>、表面に接している空気や液体によるもの<sup>3)</sup>等も考えられるが、ここでは非調和減衰のみをあつかうことにする。

弾性波の非調和減衰を考察するにあたり、まず弾性波の周波数を $\omega$ 、熱フォノンの緩和時間を $\tau$ とすると、 $\omega$ と $\tau$ の間に $\omega\tau < 1$ なる条件が成立する場合と $\omega\tau > 1$ なる場合に分けて考えなくてはならない。前者においては、熱フォノン量子としては扱ふことが出来ず、フォノン粘性模型の考えに従って考察しなければならない。この条件のもとで有効な表面弾性波の非調和減衰の理論は、Maris<sup>4)</sup>およびKingとSheard<sup>5)</sup>により独立に与えられた。一方、 $\omega\tau > 1$ なる条件が成立する領域においては、熱フォノン量子としてあつかわなければならない。Maradudinと

\* 工業数学講座

Mills<sup>6)</sup>, King と Sheard<sup>7)</sup> および第 1 報<sup>1)</sup> においては, それぞれ異なる方法に従い, この条件が成立し, 且つ表面弾性波の波長が熱フォノンのそれに比べて充分長い場合をみつかった。このような場合は, 熱フォノンの平均エネルギー  $k_B T$  に比べて表面弾性波の量子のエネルギー  $\hbar\omega_R$  は, 充分小さく  $\hbar\omega_R \ll k_B T$  の条件が成立する。したがって, 表面弾性波の波長  $\lambda_R$  と表面熱フォノンの波長  $\lambda_{th}$  の間には,  $\lambda_R \gg \lambda_{th}$  という関係が成立するので表面熱フォノンの量子は, 表面弾性波の量子に比べて固体表面のごく近傍に局在していることになる。第 1 報において議論されたように, このような場合においては, 表面弾性波の量子は直接バルクフォノンと相互作用するものとしてよかった。ところが表面弾性波の周波数がより高くなり, また実験温度が低くなる場合には表面弾性波の波長が熱フォノンの波長と同程度になる。このような場合は, 表面弾性波と表面熱フォノンとの直接の相互作用を考慮しなければならない。

本論文においては, Ezawa<sup>8)</sup> によって与えられた表面フォノンすなわちサーフォンの理論にもとづいて, 温度グリーン関数の方法<sup>9)</sup> を用いて, 表面弾性波の非調和減衰に関して高周波領域まで取り扱い得る一般論を展開し, 高周波領域での非調和減衰の周波数依存性および温度依存性を導びくことを目的としている。

## 2. 表面弾性波の量子化と相互作用ハミルトニアン

### 2.1 サーフォン場

弾性体中を伝播する弾性波は, よく知られているように二つの横波, 一つの縦波よりなり, バルク波と言われる。ところで自由表面を有するような半無限の均質で等方的な弾性体を考えよう。このような場合, 互いに独立な五個のモードの弾性波が存在する。そのうちの一つは, よく知られている Rayleigh 波であり, 地震学の分野で重要である。Ezawa<sup>8)</sup> は, この半無限弾性体中の弾性波を量子化してサーフォンと呼んだ。いま, 空間座標  $\mathbf{r}$ , 時刻  $t$  での平衡位置からの変位ベクトルを, サーフォンの固有モードで展開する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_J \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega_J}} \varphi(t) \mathbf{u}^{(J)}(\mathbf{z}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

ここで

$$\varphi_J(t) = a_J e^{-i\omega_J t} + a_J^\dagger e^{i\omega_J t} \quad (2.2)$$

また  $J$  は, サーフォンの量子数をあらわし,  $\mathbf{k}$  は  $x-y$  平面での 2 次元波数ベクトル,  $\rho$  は固体の密度,  $\omega_J$  は  $J$  モード・サーフォンの周波数,  $\rho$  は  $x-y$  平面の座標ベクトルである。  $a_J$  および  $a_J^\dagger$  は, つぎのような Bose タイプの交換関係をみたす  $J$  モード・サーフォンの消滅, 生成演算子である。

$$[a_J, a_{J'}^\dagger] = \delta_{J,J'}, \quad [a_J, a_J] = 0, \quad [a_J^\dagger, a_J^\dagger] = 0 \quad (2.3)$$

つぎに  $m$  よって指定される五個のサーフォンの波動関数  $\mathbf{u}^{(J)}(\mathbf{z})$  を示すことにする。

#### A. Rayleigh モード ( $m=R$ )

Rayleigh モードは, 代表的な表面モードであってその振幅は, 表面から指数関数的に減衰する。またその速度  $c_R$  は, 点スペクトルをとりつぎの方程式の解として与えられる。

$$4 \left[ \left( 1 - (c_N/c_t)^2 \right) \left( 1 - (c_R/c_t)^2 \right) \right]^{1/2} = \left[ 2 - (c_N/c_t)^2 \right] \quad (2.4)$$

ここで,  $c_t$  および  $c_l$  はそれぞれバルク波の横波, 縦波の音速をあらわす。この方程式の解は  $c_t$  よりも小さな 1 つの正根  $c_R$  をもち, すべての  $c_t, c_l$  の組合わせにたいしてつぎの関係をみたす。

$$0.874 < c_R/c_t < 0.955 \quad (2.5)$$

Rayleigh 波の波動関数  $\mathbf{u}^{(R)}(z)$  は

$$\begin{aligned} u_x^{(R)}(z) &= i \frac{k_x}{k} \left( \frac{k}{K} \right)^{1/2} \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\nu kz} \right), \\ u_y^{(R)}(z) &= i \frac{k_y}{k} \left( \frac{k}{K} \right)^{1/2} \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2\gamma\eta}{1+\gamma^2} e^{-\nu kz} \right), \\ u_z^{(R)}(z) &= -\gamma \left( \frac{k}{K} \right)^{1/2} \left( e^{-\gamma kz} - \frac{2}{1+\gamma^2} e^{-\nu kz} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで

$$\gamma = \left[ 1 - (c_R/c_t)^2 \right]^{1/2}, \quad \eta = \left[ 1 - (c_R/c_t)^2 \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

および

$$K = (\gamma - \eta)(\gamma + \eta + 2\gamma\eta^2)/2\gamma\eta^2 \quad (2.8)$$

このモードにおいて  $J$  は、2次元波数ベクトル  $\mathbf{k}$ 、伝播速度  $c_R$  およびモード指標  $m=R$  をとる。

### B. Total Reflection モード ( $m=TR$ )

このモードは、縦波と横波の混成であり、縦波の部分は Rayleigh モードと同じように、表面近くに局在している。また、速度  $c$  は連続スペクトル

$$c_t < c < c_l \quad (2.9)$$

をとる。その波動関数  $\mathbf{u}^{TR}(z)$  は

$$\begin{aligned} u_x^{(TR)}(z) &= i \frac{k_x}{k} \sqrt{\frac{k}{2\pi c\beta}} \left[ C e^{-\alpha kz} + \beta (e^{-i\beta kz} + A e^{i\beta kz}) \right] \\ u_y^{(TR)}(z) &= i \frac{k_y}{k} \sqrt{\frac{k}{2\pi c\beta}} \left[ C e^{-\alpha kz} + \beta (e^{-i\beta kz} + A e^{i\beta kz}) \right] \\ u_z^{(TR)}(z) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi c\beta}} \left[ -\alpha C e^{-\alpha kz} + i (e^{-i\beta kz} - A e^{i\beta kz}) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[ 1 - (c/c_t)^2 \right]^{1/2}, \quad \beta = \left[ (c/c_t)^2 - 1 \right]^{1/2}, \\ A &= \frac{(\beta^2 - 1)^2 - 4i\alpha\beta}{(\beta^2 - 1)^2 + 4i\alpha\beta} \\ C &= \frac{4\beta(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^2 + 4i\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで、上式における指数部分において、第一項は表面からの深さ  $z$  とともに減少する性質をそなえている。しかしながら減衰パラメータ  $\alpha$  は、Rモードの  $\gamma$  にくらべて小さいことに注意する必要がある。

### C. Mixed Pressure-Shear-Wave モード ( $m=\pm$ )

これらのモードは、表面に垂直な偏極をもつ shear wave と pressure wave よりなる。これらのモードの合成は二個の固有モードをつくる。すなわちモード指標で書くと  $m=\pm$  となる。また速度  $c$  は、 $c_t$  よりも大きい連続スペクトルをとる。Mixed P-SV モードに対する波動関数  $\mathbf{u}^{(\pm)}(z)$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 u_x^{(\pm)}(z) &= \frac{k_x}{k} \sqrt{\frac{k}{4\pi c}} \left[ \mp \frac{1}{\delta^{1/2}} (e^{-i\delta kz} - \zeta_{\pm} e^{i\delta kz}) + i\beta^{1/2} (e^{-i\beta kz} + \zeta_{\pm} e^{i\beta kz}) \right], \\
 u_y^{(\pm)}(z) &= \frac{k_y}{k} \sqrt{\frac{k}{4\pi c}} \left[ \mp \frac{1}{\delta^{1/2}} (e^{-i\delta kz} - \zeta_{\pm} e^{i\delta kz}) + i\beta^{1/2} (e^{-i\beta kz} + \zeta_{\pm} e^{i\beta kz}) \right], \\
 u_z^{(\pm)}(z) &= \sqrt{\frac{k}{4\pi c}} \left[ \pm \delta^{1/2} (e^{-i\delta kz} + \zeta_{\pm} e^{i\delta kz}) + \frac{i}{\beta^{1/2}} (e^{-i\beta kz} - \zeta_{\pm} e^{i\beta kz}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \delta &= \left[ (c/c_l)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad \zeta_{\pm} = D \pm iB \\
 D &= \frac{(\beta^2 - 1)^2 - 4\delta\beta}{(\beta^2 - 1)^2 + 4\delta\beta} \\
 B &= \frac{4\sqrt{\delta\beta}(\beta^2 - 1)}{(\beta^2 - 1)^2 + 4\delta\beta}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

#### D. Shear Wave with Horizontal Polarization $\Xi - \text{SH}$

このモードは、表面に水平な偏極をもつ shear wave である。すなわちモード指標で書くと  $m = \text{SH}$  となる。 $c$  は  $c_l$  より大きい連続スペクトルをとる。SH モードの波動関数は

$$\begin{aligned}
 u_x^{(SH)}(z) &= -\frac{k_y}{k} \sqrt{\frac{2ck}{\pi^2 c_l^2 \beta}} \cos \beta kz \\
 u_y^{(SH)}(z) &= \frac{k_x}{k} \sqrt{\frac{2ck}{\pi^2 c_l^2 \beta}} \cos \beta kz \\
 u_z^{(SH)}(z) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.3) においてサーフォンの速度  $c$  および  $c'$  が、連続スペクトルをとるときは

$$\delta_{J,J'} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(c - c') \delta_{m,m'} \tag{2.15}$$

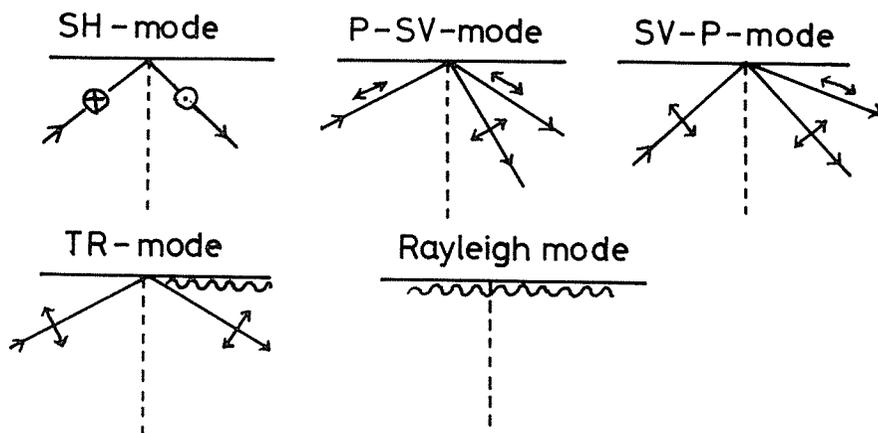
および  $c$  および  $c'$  のどちらか一方が、点スペクトルをとるときは

$$\delta_{J,J'} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{m,m'} \delta_{c,c'}$$

(2.1) における和はつぎのように定義される。

$$\sum_j f(\mathbf{k}, c, m) = \int d\mathbf{k} \left( \sum_{m \neq R} \int_{\Gamma_m} dc f(\mathbf{k}, c, m) + f(\mathbf{k}, c_R, R) \right), \tag{2.17}$$

ここで  $\Gamma_m$  は、それぞれのサーフォンのモードで定義された速度  $c$  の領域で積分を行なうこ



第1図 サーフォンのモード

とを意味する。

## 2.2 弾性エネルギーの非調和項による相互作用ハミルトニアン

均質で等方的な連続弾性体の弾性波のエネルギー密度は、Lamè の定数  $\lambda, \mu$  によりつぎのようにならわされる。

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 \quad (2.18)$$

$(i, j = x, y, z)$

ここで密度は  $\rho$  であらわされ、 $u_i$  は変位ベクトルの成分である。いま (2.18) に (2.1) の展開式を代入し、空間について積分すると、弾性体のハミルトニアンがつぎのように求まる。

$$H_0 = \sum_J \hbar \omega_J \left( a_J^\dagger a_J + \frac{1}{2} \right) \quad (2.19)$$

いま、弾性体のエネルギーの非調和項は、変位に関して三次まで考慮すればつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \left( \nu_3 + \frac{\mu}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{4} (2\nu_2 + \lambda) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{12} (4\nu_3 - 3\mu) \\ & \times \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{1}{4} (2\nu_2 - \lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\nu_1}{6} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  は三次の Lamè の定数である。(2.19) を得たときと同様の手続きによって、(2.20) に (2.1) の展開式を代入し、半空間について積分すると、相互作用ハミルトニアンを得、それを形式的につぎのように書く。

$$H' = \sum_{J, J', J''} V_{JJ'J''} \varphi_J(t) \varphi_{J'}(t) \varphi_{J''}(t) \quad (2.21)$$

ここで  $\varphi_J(t)$  は、(2.2) で与えられる  $J$  モード・サーフォンの生成、消滅演算子の関数である。また  $V_{JJ'J''}$  は結節関数である。(2.21) は弾性エネルギーの非調和項によるサーフォンの相互作用をあらわすハミルトニアンで、以下の展開で主要な役割をはたす。 $V_{JJ'J''}$  は、考えているモードの波動関数、および Lamè の定数に依存する。具体的な形は、3.2 節で与えることにする。

## 3. 温度グリーン関数による表面弾性波の非調和減衰

### 3.1 温度グリーン関数による減衰の一般的取り扱い

ここでは温度グリーン関数の方法を用いて表面弾性波の減衰率に関する一般公式を導びいておこう。 $\mathbf{k}$  空間における  $J$  モードのサーフォンに対するグリーン関数は、摂動の最低次を考えると

$$\mathfrak{D}^{(2)}(J, i\omega_l) = \mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_l) \Pi^{(1)}(J, i\omega_l) \mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_l) \quad (3.1)$$

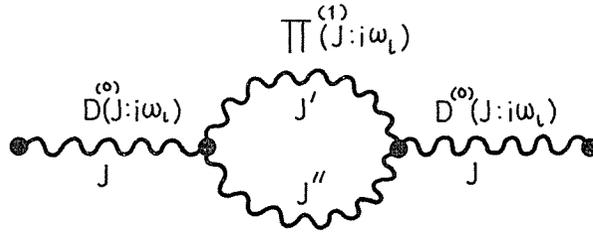
ここで

$$\omega_l = \frac{2\pi l}{\beta}, \quad \beta = (k_B T)^{-1} \quad (3.2)$$

であり  $l$  は整数、 $k_B$  は Boltzmann 定数である。 $\mathfrak{D}^{(0)}(J)$  は自由な  $J$  モードサーフォンのグリーン関数であり、 $\Pi^{(1)}(J; i\omega_l)$  は  $J$  モードサーフォンの自己エネルギー関数である。(3.1) を Feynmann ダイアグラムで示したのが第2図である。また自己エネルギー関数  $\Pi^{(1)}(J; i\omega_l)$  は

$$\Pi^{(1)}(J; i\omega_l) = \frac{2}{\beta} \sum_{J', J''} |V_{JJ'J''}|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}^{(0)}(J', i\omega_n) \mathfrak{D}^{(0)}(J'', i\omega_l - i\omega_n) \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで自由な  $J$  モードのグリーン関数は



第2図 Jモード・サーフォンの2次の温度グリーン関数(運動量表示)

$$\mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_n) = -\frac{2\omega}{\omega_n^2 + \omega^2} \quad (3.4)$$

で与えられる。(3.4)を(3.3)に代入して  $n$  についての和をとれば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}^{(0)}(J', i\omega_l - i\omega_n) \mathfrak{D}^{(0)}(J'', i\omega_n) = -\beta \left[ 2 \left\{ 1 + n(\omega') + n(\omega'') \right\} \cdot \frac{\omega' + \omega''}{(i\omega_l)^2 + (\omega' + \omega'')^2} - 2 \left\{ n(\omega') - n(\omega'') \right\} \cdot \frac{\omega' - \omega''}{(i\omega_l)^2 + (\omega' - \omega'')^2} \right] \quad (3.5)$$

ここで

$$n(\omega) = \left( \exp(\beta\omega) - 1 \right)^{-1} \quad (3.6)$$

いま、自己エネルギー関数  $H^{(1)}(J; i\omega_l)$  において虚軸上に存在する離散的な点  $i\omega_l$  を  $z$  で置きかえることにより  $z$  平面へ解析接続すれば実変数  $\omega$  に対してつぎの公式を得る。

$$H^{(1)}(J; \omega + i\varepsilon) = A_J(\omega) + i\Gamma_J(\omega) \quad (3.7)$$

ここで  $\Gamma_J(\omega)$  は  $J$  モード・サーフォンの減衰係数であり、 $A_J(\omega)$  はそのエネルギーシフトである。(3.1), (3.4), (3.5) から  $\Gamma_J(\omega)$  に対してつぎのような関係を得る。

$$\Gamma_J(\omega) = 2\pi \sum_{J', J''} |V_{-JJ', J''}|^2 \cdot \left[ \left\{ 1 + n(\omega') + n(\omega'') \right\} \cdot \left\{ \delta(\omega - \omega' - \omega'') - \delta(\omega + \omega' + \omega'') \right\} + 2 \left\{ n(\omega') - n(\omega'') \right\} \cdot \delta(\omega + \omega' - \omega'') \right] \quad (3.8)$$

これが温度  $T$  における周波数  $\omega$  の  $J$  モード・サーフォンの減衰をあらわす式である。(3.8)において  $J', J''$  は、 $J$  モード・サーフォンと相互作用するサーフォンの量子数をあらわす。形式上は  $J', J''$  は完全系をつくる五個のサーフォン・モードのすべての組をとるが、以下の節の議論において示されるようにいろいろな温度、周波数領域において、 $J$  モード・サーフォンと相互作用しうるモードは限定される。

### 3.2 低温・高周波領域での表面弾性波の減衰機構

第1報においては、表面弾性波の周波数  $\omega$  と熱フォノンの緩和時間  $\tau$  との間に  $\omega\tau > 1$  なる関係が成立する条件のもとで、しかも表面弾性波の波長が熱フォノンのそれにくらべて充分長い場合をみつかった。熱フォノンの速度を近似的に  $5 \times 10^5$  cm/sec とすると、熱フォノンの平均周波数  $\nu$  (GHz) と温度  $T$  ( $^{\circ}$ K) の間には、 $\nu \approx 20 T$  GHz なる関係が成立し、 $10^{\circ}$ K では周波数 200 GHz の熱フォノンが励起されていることになる。このような条件のもとでは、表面弾性波は、その表面近くの局在性のためにバルクフォノンとの相互作用により減衰するものと考えることが出来た。このことから、第1報においては摂動論の第一項を考えることにより低周波の Rayleigh 波が、バルクフォノンにより散乱される過程を計算したが、この結果はもちろんここでの減衰率の一般的な公式 (3.8) において  $J$  を Rayleigh モード、 $J'$  と  $J''$  をそれぞれバルクフォノンと

ることにより容易に導出できる。

ところで、より低温のもとで、より高周波の表面弾性波の減衰においては表面熱フォノンとの直接の相互作用を考えなくてはならない。いま、1°K で 20 GHz の Rayleigh モードの表面弾性波を入力として用いる場合を考えよう。1°K においては、平均的に 20 GHz の熱フォノンが励起されているので、Rayleigh モードと相互作用する確率の大きいサーフォンは、その振幅の表面からの指数関数的減衰の特性が Rayleigh モードほど急激でないモードが、大きな寄与を与えるであろう。(2.1) で述べたように Total Reflection モードがその条件をみたす、唯一のサーフォンである。したがって  $J$  モード・サーフォンの減衰をあらわす公式 (3.8) において、 $J$  は R モード、 $J'$  と  $J''$  は TR モードとして結節関数  $V_{-JJ'J''}$  を求めて、 $\Gamma_J(\omega)$  を計算すればよい。この場合の  $V_{-JJ'J''}$  の具体的な形は、付録に与えられる。(3.8) において、周波数  $\omega$ 、 $\omega'$  および  $\omega''$  はすべて正であり、また  $\omega'$ 、 $\omega'' \geq \omega$  であるから最後の項しか減衰にきいてこないことになる。したがって  $\Gamma_J(\omega)$  はつぎの関係式で与えられる。

$$\Gamma_R(\omega) \sim \omega \beta^{-3} \int_{c_t}^{c_t} dc' \int_{c_t}^{c_t} dc'' \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy f(x, y, c', c'') \quad (3.9)$$

ここで

$$f(x, y, c', c'') = |V_{-JJ'J''}|^2 \left[ n(y) - n(x+y) \right] \cdot \frac{y^2}{x+y} \cdot \frac{1}{|\sin \theta|} \quad (3.10)$$

また

$$n(x) = (e^x - 1)^{-1} \quad (3.11)$$

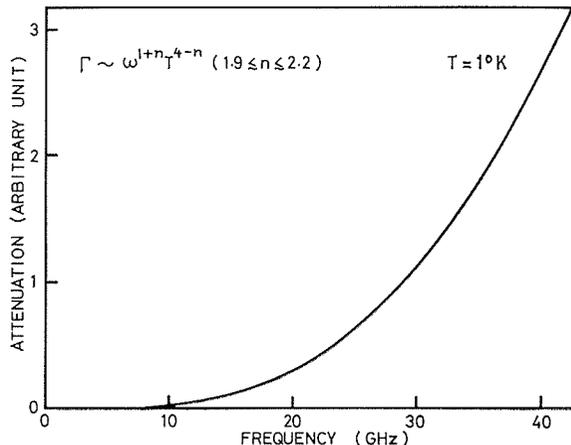
$$|\sin \theta| = \left[ 1 - \left( \frac{u}{2xy} \right)^2 \cdot \left\{ x^2 + \left( \frac{y}{u} \right)^2 - \left( \frac{x+y}{v} \right)^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

であり

$$x = \beta \omega \quad y = \beta \omega', \quad u = c'/c_R, \quad v = c''/c_R.$$

である。

ここで積分の上限と下限は、表面弾性波の周波数  $\omega$  に依存していることに注意しよう。関数  $f(x, y, c', c'')$  は 11×9 項の和よりなっていて、解析的には積分が実行できないので三重積分のうち速度  $c'$ 、 $c''$  に関する積分はその平均値でおきかえて数値積分を行なった。その結果を第3図に示す。第3図より減衰率の周波数、温度依存性として次の表式を得る。



第3図 表面弾性波の減衰率の周波数依存性

$$\Gamma_R \sim \omega \beta^{-4} (\omega \beta)^n \sim \omega^{1+n} T^{4-n}, \quad (3.13)$$

$$1.9 \lesssim n \lesssim 2.2$$

#### 4. おわりに

表面フォノンすなわちサーフォンの理論にもとづき表面弾性波の非調和減衰の一般論を展開した。この理論により、原理的に  $\omega\tau > 1$  の条件のもとで、表面弾性波のすべての周波数、すべての温度領域において物理的な考案によって相互作用するサーフォンを選びだすことにより減衰率の周波数、温度依存性を導びくことができる。第1報においては、摂動論をもちいて Rayleigh モードとバルクフォノンとの相互作用を考慮することにより減衰率の周波数、温度依存性を導びいた。しかしながら、高周波、低温領域では Rayleigh モードとバルクフォノンの相互作用は意味をもたなくなる。3.2節で考察されたように、高周波表面弾性波の減衰は、温度 1°K、周波数 20 GHz~40 GHz の領域においては、TR モードのサーフォンが主役をはたすことになる。その結果、減衰率  $\Gamma_R(\omega)$  の周波数依存性は、 $\omega^{1+n}$ 、また温度依存性は  $T^{4-n}$  ( $1.9 \lesssim n \lesssim 2.2$ ) に従うことが示された。これはこれまでに得られた低周波表面波の減衰率の周波数および温度依存性といちじるしく異なっており、固体表面の近傍に励起させているサーフォンの特性があらわれた結果にほかならない。さらに興味深いことは  $\omega$  のべきと  $T$  のべきが指数  $n \approx 2$  で連動していることである。また温度がより低い条件のもとでは、たとえば 0.1°K では Rayleigh モードと Total Reflection モードの波動関数のかさなりが温度 1°K の場合のそれと等しくなる周波数領域は 2~4 GHz であって、この領域で (3.13) は式と同じ周波数依存性が実現される。現在まで得られている表面弾性波 (表面超音波) の最高周波数は、著者らの知る限りでは約 3.5 GHz で、バルク超音波のそれが約 114 GHz<sup>10)</sup> であることにくらべるとかなり低い。従って現在のところ本論文で得られた理論的結果を検証する実験報告はまだなされていないが、実験技術の進歩によりこの理論の結果が検証されることが望まれる。

おわりに著者の1人(中山)は、財団法人作行会の研究助成金を与えられていることに感謝する。また本研究の数値計算の部分は、北海道大学大型計算センター FACOM 230-60 を使用した。

#### 文 献

- 1) 佐久間哲郎, 中山恒義: 北海道大学工学部研究報告, 第70号, 昭和49年2月, p. 63.
- 2) R. G. Steg and P. G. Klemens: Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 381.  
A. J. DeVries and R. L. Miller: Appl. Phys. Lett. **20** (1972) 210.  
T. Nakayama and T. Sakuma: Lett. Nuovo Cimento **2** (1971) 1104.  
T. Sakuma: Phys. Rev. Lett. **29** (1972).  
T. Sakuma: Phys. Rev. B **8** (1973) 1433.
- 3) K. Dransfeld and E. Saltzmann: Physical Acoustics ed. W. P. Mason and R. N. Thurston (Academic Press, New York, 1970) Vol. VII, p. 219.
- 4) H. J. Maris: Phys. Rev. **188** (1969) 1308.
- 5) P. J. King and F. W. Sheard: J. appl. Phys. **40** (1969) 5189.
- 6) A. A. Maradudin and D. L. Mills: Phys. Rev. **173** (1968) 881.
- 7) P. J. King and F. W. Sheard: Proc. Roy. Soc. London A **320** (1970) 175.
- 8) H. Ezawa: Ann. of Physics **67** (1971) 438.
- 9) T. Matsubara: Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351.  
See also A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. Ye. Dzyaloshinskii: Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. translated by D.E. Brown (Pergamon Press, 1965).

10) J. Ilukor and E. H. Jacobsen: Science 153 (1966) 1113.

### 付 録

ここでは結節関数  $V_{-JJ'J''}$  の具体的な表式を与える。すなわち

$$V_{-JJ'J''} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \sqrt{\frac{kk'k''}{c'c''\beta'\beta''K}} \cdot \sum_{i=1}^{11} S_i \quad (\text{A. 1})$$

であり、 $S_i$  はつぎのように定義される。

$$S_1 = -4H_1\nu_3 \left\{ G_1 + \beta''(G_2 + G_3) + \beta'(G_4 + G_7) + \beta'\beta''(G_5 + G_6 + G_7 + G_9) \right\} \quad (\text{A. 2})$$

$$\begin{aligned} S_2 = H_2 & \left[ 4\nu_3\alpha'\alpha''G_1 + \left\{ (\nu_3 + \mu/4)(1 - \beta'^2)(1 - \beta''^2) - \mu\beta' \right\} (-G_5 + G_6 + G_8 - G_9) \right] \\ & - iH_2 \left[ \left\{ -2\nu_3(1 - \beta''^2) + \mu(1 + \beta''^2)/2 \right\} (G_2 - G_3)\alpha' + \left\{ 2\nu_3(1 - \beta'^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu(1 + \beta'^2)/2 \right\} (-G_4 + G_7)\alpha'' \right] \quad (\text{A. 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 = 4i' H_3\nu_3\alpha'' & \left\{ G_1 + \beta'(G_4 + G_7) \right\} + i'' H_3 \left\{ 2\nu_3(1 - \beta'^2) + \mu(1 + \beta'^2)/2 \right\} \\ & \times (-G_2 + G_3 - \beta'G_5 + G_6 - \beta'G_8 + \beta'G_9) \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 = 4i' H_4\nu_3\alpha' & \left\{ G_1 + \beta''(G_2 + G_3) \right\} + i'' H_4 \left\{ (1 - \beta'^2) + \mu(1 + \beta'^2)/2 \right\} \\ & \times \left\{ G_4 - G_7 + \beta''(G_5 + G_6 - G_8 - G_9) \right\} \quad (\text{A. 5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5 = H_5\alpha'\alpha'' & \left\{ -4\nu_3\gamma^2 + 2\nu_2(1 - \gamma^2) \right\} G_1 + H_5 \left[ \left\{ \gamma^2(\nu_3 + \mu/4)(1 - \beta'^2)(1 - \beta''^2) + \mu\beta'^2 \right\} \right. \\ & \left. - (1 - \gamma^2)/2 \left\{ \nu_2(1 - \beta'^2)(1 - \beta''^2) + \lambda/2 \cdot (1 + \beta'^2)(1 + \beta''^2) \right\} \right] (G_5 - G_6 - G_8 + G_9) \\ & + iH_5 \left[ \alpha' \left\{ 2\gamma^2 \left( \nu_3(1 - \beta''^2) + \mu/4(1 + \beta''^2) \right) - \nu_2(1 - \gamma^2)(1 - \beta''^2) \right\} (G_2 - G_3) \right. \\ & \left. + \alpha'' \left\{ 2\gamma^2 \left( \nu_3(1 - \beta'^2) - \mu/4 \cdot (1 + \beta'^2) - \nu_2(1 - \gamma^2)(1 - \beta'^2) \right) \right\} (G_4 - G_7) \right] \quad (\text{A. 6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 = 4H_6i'\nu_3 & \left\{ -\alpha'\alpha''G_1 - \alpha''\beta'(G_4 + G_7) \right\} + iH_6i' \left[ 2\alpha'^2 \left\{ \nu_3(1 - \beta''^2) - \mu/4 \cdot (1 + \beta''^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - (\nu_2 + \lambda/2)(1 - \alpha'^2)(1 + \beta''^2) \right\} (G_2 - G_3) + \beta' \left\{ 2\nu_3(1 + \beta''^2) - \mu/2 \cdot (1 + \beta''^2) \right\} \right. \\ & \left. \times (G_5 - G_6 + G_8 - G_9) \right] \quad (\text{A. 7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_7 = H_7i' & \left[ \alpha' \left\{ -4\nu_3\alpha''^2 + 2(\nu_2 - \lambda/2)(1 - \alpha''^2) \right\} G_1 + \alpha'\beta''4\nu_3(-G_2 - G_3) \right] \\ & + iH_7i' \left[ \left\{ 2\alpha''(\nu_3(1 - \beta'^2) + \mu/4 \cdot (1 + \beta'^2) - (\nu_2 - \lambda/2)(1 - \beta'^2)(1 - \alpha''^2)) \right\} (G_4 - G_7) \right. \\ & \left. + \beta'' \left\{ 2\nu_3(1 - \beta'^2) + \mu/2(1 + \beta'^2) \right\} (G_5 + G_6 - G_8 - G_9) \right] \quad (\text{A. 8}) \end{aligned}$$

$$S_8 = H_8(1 - \gamma^2)\mu \left\{ -G_1 - \beta''(G_2 + G_3) - \beta'(G_4 + G_7) - \beta'\beta''(G_5 + G_6 + G_7 + G_8 + G_9) \right\} \quad (\text{A. 9})$$

$$S_9 = H_9(\nu_2 + \lambda/2)(1 - \alpha'^2) \left\{ -G_1 - \beta''(G_2 + G_3) \right\} \quad (\text{A. 10})$$

$$S_{10} = H_{10}(\nu_2 + \lambda/2)(1 - \alpha''^2) \left\{ -G_1 - \beta''(G_4 + G_7) \right\} \quad (\text{A. 11})$$

$$\begin{aligned}
S_{11} = H_{11} & \left[ G_1 \left\{ 4\nu_3 \alpha'^2 \alpha''^2 \tilde{\gamma}^2 - \nu_2 (\alpha'^2 + \alpha''^2) + \alpha'^2 \alpha''^2 (1 - 3\tilde{\gamma}^2) \nu_2 + \lambda/2 \cdot \tilde{\gamma}^2 (\alpha'^2 - \alpha''^2) \right. \right. \\
& - \left. \nu_1 (1 - \tilde{\gamma}^2) (1 - \alpha'^2) (1 - \alpha'')/2 \right\} + \beta'' (G_2 + G_3) \cdot \left\{ 4\nu_3 \alpha'^2 \tilde{\gamma}^2 - (\nu_2 + \lambda/2) \tilde{\gamma}^2 (1 - \alpha'^2) \right. \\
& - \left. \nu_2 (1 - \tilde{\gamma}^2) \alpha'^2 \right\} + \beta' (G_4 + G_7) \left\{ 4\nu_3 \alpha''^2 \tilde{\gamma}^2 - (\nu_2 + \lambda/2) \tilde{\gamma}^2 (1 - \alpha''^2) - \nu_2 (1 - \tilde{\gamma}^2) \alpha''^2 \right\} \\
& \left. + \beta' \beta'' \left\{ 4\nu_3 \tilde{\gamma}^2 - \nu_2 (1 - \tilde{\gamma}^2) \right\} (G_5 + G_6 + G_8 + G_9) \right] \tag{A. 12}
\end{aligned}$$

なお、ここであらわれる係数  $G_1 \sim G_9$  および  $H_1 \sim H_{11}$  は、つぎのような関係で表面弾性波の波動関数の係数  $\alpha, \beta$  および  $\tilde{\gamma}$  と結ばれている。

$$G_1 = (\tilde{\gamma}k + \alpha'k' + \alpha''k'')^{-1} \tag{A. 13}$$

$$G_2 = (\tilde{\gamma}k + \alpha'k' + i\beta'k'')^{-1} \tag{A. 14}$$

$$G_3 = C'A''(\tilde{\gamma}k + \alpha'k' - i\beta'k'')^{-1} \tag{A. 15}$$

$$G_4 = C''(\tilde{\gamma}k + i\beta'k' + \alpha''k'')^{-1} \tag{A. 16}$$

$$G_5 = (\tilde{\gamma}k + i\beta'k' + i\beta''k'')^{-1} \tag{A. 17}$$

$$G_6 = A''(\tilde{\gamma}k + i\beta'k' - i\beta''k'')^{-1} \tag{A. 18}$$

$$G_7 = A'C''(\tilde{\gamma}k - i\beta'k' + \alpha''k'')^{-1} \tag{A. 19}$$

$$G_8 = A'(\tilde{\gamma}k - i\beta'k' + i\beta''k'')^{-1} \tag{A. 20}$$

$$G_9 = A'A''(\tilde{\gamma}k - i\beta'k' - i\beta''k'')^{-1} \tag{A. 21}$$

$$H_1 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'')}{kk'k''} \tag{A. 22}$$

$$H_2 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')}{k} \tag{A. 23}$$

$$H_3 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')}{k'} \tag{A. 24}$$

$$H_4 = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'')}{k''} \tag{A. 25}$$

$$H_5 = k(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'') \tag{A. 26}$$

$$H_6 = k'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'') \tag{A. 27}$$

$$H_7 = k''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \tag{A. 28}$$

$$H_8 = \frac{k(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'')}{k'k''} \tag{A. 29}$$

$$H_9 = \frac{k'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'')^2}{kk''} \tag{A. 30}$$

$$H_{10} = \frac{k(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'')^2}{k'k''} \tag{A. 31}$$

$$H_{11} = kk'k'' \tag{A. 32}$$