



Title	スペックル強度一次確率密度分布と表面あらさ
Author(s)	高井, 信勝; Takai, Nobukatsu
Citation	北海道大學工学部研究報告, 74, 27-34
Issue Date	1975-03-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41262
Type	departmental bulletin paper
File Information	74_27-34.pdf



スペckル強度一次確率密度分布と表面あらさ

高井 信勝

(昭和49年7月26日受理)

Statistical Properties of Speckle Intensity in Relation to Rough Surfaces

Nobukatsu TAKAI

(Received July 26, 1974)

Abstract

Statistical properties of rough surfaces were studied in connection with the first-order probability density distribution with respect to speckle intensity. First, it was shown that the first-order probability density is given by the negative exponential distribution with a first-order approximation for the results derived from the rigorous mathematical-analysis. Second, the relation between the averaged intensity of speckles and the statistical quantities of rough surfaces was investigated in the Fraunhofer diffraction field. It was finally shown by experiments that the averaged slopes of surface roughness for various ground glasses were determined by using the averaged intensities calculated from the first-order probability density of the speckle intensity. The experimental results obtained here agree fairly well with the data measured directly by employing a mechanical profilometer.

1. ま え が き

研摩、切削等の加工による材料表面の微細構造は、その加工方法に依存する不規則な形状を呈している。このような粗面の性質は、表面のあらさ自体が確率過程にあることから統計量によって特徴づけられることが要請される¹⁻³⁾。触針式表面あらさ計測は、手段が直接的であることによって広く普及しているが、確率変数として検出される粗面の形状は、一次元走査によって得られるもので、検査領域が局所的で粗面全体の性質を必ずしも反映していない。粗面の統計的性質の探索に光学的手段を適用する試みは、無接触計測という大きな利点とともに、方法自体が二次元的であるために早くから注目されている^{4),5)}。しかし、インコヒーレントな光源を使用すると、光源自体の確率的な性質が粗面の確率的な状態に重畳し、容易に粗面と光自体の統計量を分離できない結果になる。コヒーレントなレーザー光源の出源によってこの点が克服された。

コヒーレント光によって照射された粗面からの透過光あるいは反射光は、その回折界あるいは像界において図1に見られるようなはん点模様(スペckルパターン)を呈する。このパターンは、コヒーレントな入射光が粗面において確率的な変調を受け、線形な光学系を伝播して検出面で干渉し合った結果で、その不規則さは、粗面の不規則な状態にのみ起因している。スペck

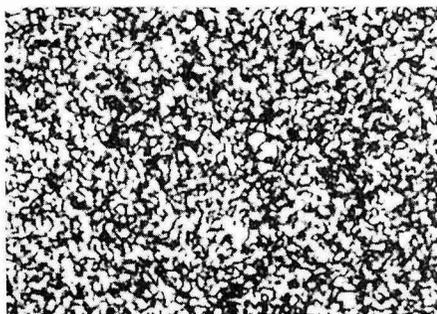


図1 スペックルパターン (#120, $\sigma_p=48$)

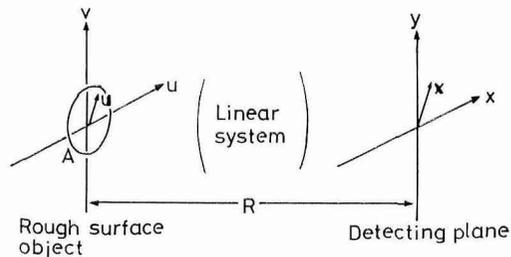


図2 粗面の回折をあらわす座標系

リング現象の統計的性質に関しては多くの研究⁶⁾があるにもかかわらず、必ずしも粗面の統計的性質と検出されるスペックルパターンの統計的性質との関連は明らかではない。

本報では、回折界におけるスペックル強度の一次確率密度分布から得られる統計量と表面あらしの統計量との関連が解析される。理論的解析の結果は、フラウンホーファー回折領域の中心近傍の平均強度が粗面の平均的傾斜度の二乗に逆比例することを示す。実験は各種のスリガラスに対して実行され、検出強度の一次確率密度分布から計算される平均強度から表面あらしの平均的傾斜角が決められる。実験結果は、触針式表面あらし計から得られた結果とほぼ一致することが示される。

2. スペックル強度の一次確率密度分布

粗面の微細構造の平均的な大きさは、あらしの空間的相関長によって表わされる。この相関長と比べて十分大きい面積をもつ開口 A によるコヒーレント入射光の回折を取り扱う (図2)。いま、入射光は振幅に無関係に位相のみが不規則に変化を受けるときを考え、開口 A を相関のおよぶ範囲の大きさをもつ M 個のコヒーレントな要素に分割する。各要素において、入射光の受ける位相の変動は独立で、かつ粗面が確率的に定常状態にあれば、確率変数である位相の変動は、各要素で同程度の分散をもつと考えてよい。このような状況のもとで、回折され、線形な光学系を通して得られる検出面上の光の複素振幅は、同程度の分散をもつ M 個の独立な光波の重ね合せとなる。したがって、 M が十分大きい場合には中心極限定理が適用され、検出面上の光の複素振幅 $U=U_1+iU_2$ はガウス過程に従う。この結果 U_1, U_2 に対して次の結合確率密度分布が与えられる。

$$p(U_1, U_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{U_1^2+U_2^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

ここで、

$$\sigma^2 \equiv \langle U_1^2 \rangle \equiv \langle U_2^2 \rangle \quad (2)$$

である。なお、 $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。さらに、確率変数 U_1, U_2 が独立で、かつ同一の正規分布に従うことから、確率変数

$$\chi^2 \equiv I/\sigma^2 = (U_1^2+U_2^2)/\sigma^2 \quad (3)$$

は、自由度2の χ^2 分布に従う。したがって、その定義から、検出強度 I の確率密度分布

$$p(I) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right), & I \geq 0 \\ = 0 & , \quad I < 0 \end{cases} \quad (4)$$

が得られ、負指数の指数分布で与えられる。このとき、 n 次のモーメントは、

$$\langle I^n \rangle = \int_0^{\infty} I^n p(I) dI = (2\sigma^2)^n n! \quad (5)$$

となる。特に、

$$\left. \begin{aligned} \langle I \rangle &= 2\sigma^2 \\ \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle &= 4\sigma^4 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が成立し、強度ゆらぎの分散が平均強度の二乗に等しいことがわかる。

ここで、式(4)で得られた確率密度に関して次のことに留意する必要がある。検出強度 I は検出位置 \mathbf{x} の関数であり、理想的に無限小の大きさの点 \mathbf{x} での強度である。しかし、現実到我々が強度を検出する際には、有限の大きさをもつ開口 B を通してのみ可能である。すなわち、現実には観測される強度は開口 B にわたる次の積分強度 I' である。

$$I' = \int_B I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7)$$

この場合、積分強度 I' の分布は一般には I の分布とは異なり、次の指数分布の重ね合わせで表わされることが、付録で与えられる数学的解析から知られる。

$$p(I') = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\sigma_n^2} c_n \exp\left(-\frac{I'}{2\sigma_n^2}\right) \quad (8)$$

ここで、

$$c_n \equiv \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \left(1 - \frac{\sigma_l^2}{\sigma_n^2}\right)^{-1} \quad (9)$$

であり、 N は検出開口を記述する状態関数の固有値の数で、 $2\sigma_n^2$ が各状態の分散である。したがって、式(4)は式(8)の1次近似で与えられることがわかる。

3. 粗面の統計量とスペックル平均強度

前章において、粗面の確率的状態に起因するスペックル強度の一次確率密度分布が得られた。この章では、検出位置 \mathbf{x} における平均強度 $\langle I(\mathbf{x}) \rangle$ と粗面の統計量との関連が、フラウンホーファー回折領域で考察される。

入射光のコヒーレンス関数を考慮した検出点 \mathbf{x} での平均強度は次式で与えられる。(なお、以下特に意味をもたない比例定数は省略する。)

$$\langle I(\mathbf{x}) \rangle = \iint \Gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) A(\mathbf{u}_1) A^*(\mathbf{u}_2) G(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \exp\left\{-\frac{i2\pi}{\lambda R}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \mathbf{x}\right\} d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2. \quad (10)$$

ここで、平均操作は粗物体直後の複素振幅 $U(\mathbf{u})$ に関して施こされ、空間的定常性を仮定して

$$G(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \equiv \langle U(\mathbf{u}_1) U^*(\mathbf{u}_2) \rangle \quad (11)$$

とおかれる。また $\Gamma(\mathbf{u})$ は入射光の空間的コヒーレンス関数で、 $A(\mathbf{u})$ は入射光の開口関数、 λ は入射光の波長、 R は粗物体から検出面までの距離で、 $*$ は複素共役を表わす。前述したように、入射光が部分的コヒーレンス状態にあるときには、 $\Gamma(\mathbf{u})$ が $G(\mathbf{u})$ に重畳して、粗面の統計量に関係する $G(\mathbf{u})$ の項だけを抽出することを困難にする。特に $\Gamma(\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u})$ で与えられる完全インコヒーレント照明の場合には、 $G(\mathbf{u})$ は事実上消失する。すなわち、あらさの情報を反映するスペックルパターンは形成されない。以下では、スペックルが現われる完全コヒーレント照明 $\Gamma(\mathbf{u})=1$ の場合のみを扱う。

いま、粗面が入射光の位相のみをその形状に従って不規則に変化させる場合を考えると、位相 θ を確率変数として

$$U(\mathbf{u}) = \exp\{i\theta(\mathbf{u})\} \quad (12)$$

とおける。ここで、粗面がガウス過程にあり、 θ の二次の確率分布が、

$$P(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^2\sqrt{1-\rho}} \exp\left\{-\frac{\theta_1^2 - 2\rho\theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{2\sigma_p^2(1-\rho^2)}\right\} \quad (13)$$

で与えられるとき、式 (11) は $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ とおいて、

$$G(\mathbf{a}) = \exp\left[-\sigma_p^2\{1-\rho(\mathbf{a})\}\right] \quad (14)$$

となる。ここで、 σ_p^2 および $\rho(\mathbf{a})$ は位相変動の分散および相関係数で、透過物体の場合には粗面の形状 $h(\mathbf{u})$ と次の関係にある。

$$\sigma_p \equiv \sqrt{\langle \theta^2(\mathbf{u}) \rangle} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) \sqrt{\langle h^2(\mathbf{u}) \rangle}, \quad (15)$$

$$\rho(\mathbf{a}) \equiv \frac{\langle \theta(\mathbf{u}) \theta^*(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \rangle}{\sigma_p^2} = \frac{\langle h(\mathbf{u}) h^*(\mathbf{u} + \mathbf{a}) \rangle}{\sigma_h^2}. \quad (16)$$

ここで、 n_1, n_2 は粗物体およびその周囲の媒質の屈折率で、 σ_h^2 は $h(\mathbf{u})$ の分散である。

次に、 $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ の変数変換と、 $I(\mathbf{u}) = 1$ の条件のもとで、式 (10) は次式に書き換えられる。

$$\langle I(\mathbf{x}) \rangle = \int C(\mathbf{a}) G(\mathbf{a}) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda R} \mathbf{a} \mathbf{x}\right) d\mathbf{a}, \quad (17)$$

ここで、

$$C(\mathbf{a}) = \int A(\mathbf{u}_1) A^*(\mathbf{u}_1 - \mathbf{a}) d\mathbf{u}_1 \quad (18)$$

である。式 (17) は入射光の開口関数 $A(\mathbf{u})$ で決まる $C(\mathbf{a})$ と、粗面の統計量で決まる $G(\mathbf{a})$ の積のフーリエ変換である。したがって $\mathcal{F}[\dots]$ でフーリエ変換、および \otimes でたたみこみ積分を表わせば、

$$\langle I(\mathbf{x}) \rangle = \mathcal{F}[C(\mathbf{a})] \otimes \mathcal{F}[G(\mathbf{a})] \quad (19)$$

となり、式 (18) より

$$\mathcal{F}[C(\mathbf{a})] = \left| \mathcal{F}[A(\mathbf{a})] \right|^2 \quad (20)$$

である。通常、 $G(\mathbf{a})$ の拡がりは数 $10 \mu\text{m}$ 以下であり、實際上開口 $A(\mathbf{a})$ を適当に大きく設定すれば、十分良い近似をもって、式 (20) は、

$$\mathcal{F}[C(\mathbf{a})] \approx \delta(\mathbf{x}) \quad (21)$$

とおける。この結果、式 (19) は

$$\langle I(\mathbf{x}) \rangle = \mathcal{F}[G(\mathbf{a})] \quad (22)$$

となる。式 (22) の結果は、一般的な $G(\mathbf{a})$ に対して成立するけれども、式 (14) で得た $G(\mathbf{a})$ はフーリエ変換が可能ではない。すなわち、式 (14) は、 \mathbf{a} とともに単調に減少する偶関数であるけれども、 \mathbf{a} が無限大で $\exp(-\sigma_p^2)$ の漸近値をもつ関数である。しかし、理論解折の適用範囲を $\sigma_p \geq \pi$ に限定すれば、 $\exp(-\sigma_p^2)$ の値は無視できる程に小さい (たとえば $\sigma_p = \pi$ では 0.000052 である)。

いま、相関係数 $\rho(\mathbf{a})$ が相関長 α_0 をもつガウス関数

$$\rho(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{a}|^2}{\alpha_0^2}\right) \quad (23)$$

与えられるとき、 $G(\mathbf{a})$ は上述の適用限界において、次式で良く近似される⁷⁾。

$$G(\mathbf{a}) = \exp\left(-\sigma_p^2 \frac{|\mathbf{a}|^2}{\alpha_0^2}\right), \quad \sigma_p \geq \pi. \quad (24)$$

このとき、 $G(\mathbf{a})$ はフーリエ変換可能で、最終的に次式を得る。

$$\langle I(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma_p^2} \exp\left\{-\frac{\alpha_0^2}{\sigma_p^2} \frac{\pi^2}{\lambda^2 R^2} |\mathbf{x}|^2\right\}. \quad (25)$$

この結果は、粗面の相関長 α_0 と、粗面の *rms* 値に比例する位相の *rms* 値 σ_p の比である α_0/σ_p に依存してスペックル平均強度が得られることを意味している。物理的には、 α_0/σ_p は粗面の形状の平均的な傾斜度に逆比例しており、平均的な傾斜度が小さい (α_0/σ_p が大きい) 粗面ほど、中心付近 ($\mathbf{x} \approx 0$) の平均的度は大きく、空間的な拡がりは小さい。したがって、この場合拡散性は小さい。特に、中心強度は、

$$\langle I(0) \rangle = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma_p^2} \quad (26)$$

与えられ、平均的傾斜度の二乗に逆比例する。

4. 実 験

各種のト粒で研磨されたスリガラスを粗物体として使用した。用いられたト粒は、エメリー番号 #120, #600, #1000, #2000, #3000 の五種類である。

単一モードで発振する He-Ne レーザー ($\lambda = 0.633 \mu\text{m}$) を平行移動しつつ回転するスリガラスに入射させ、そのフラウンホーファー領域での動的なスペックル強度を光電子増倍管で検出した。その出力を 1 msec 毎にサンプルし、 10^5 個のパルス波高値を統計解折装置によって 512 チャンネルに分類した。こうして得られたスペックル強度の確率密度分布 $p(I)$ から平均強度 $\langle I \rangle$ を算出した。なお、 $1 \text{ msec} \times 10^5 = 10^2 \text{ sec}$ の間に検査された粗物体の領域は、 5 cm^2 以上におよんだ。

図3には、#600のスリガラスを用い、検出位置を変化させた場合の確率密度分布 $p(I)$ が、散乱角 $\beta = |\mathbf{x}|/R$ をパラメーターとして示されている。また、図4は各種のスリガラスで得られた確率密度分布である。いずれも、横座標 I および縦座標 $p(I)$ は任意尺度であるが、全確率は

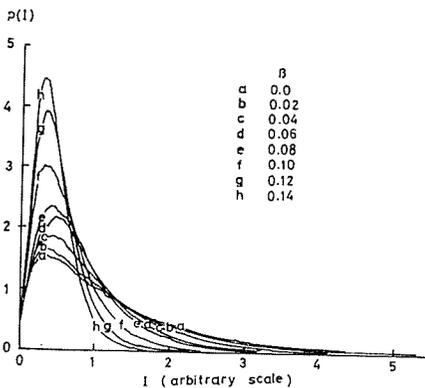


図3 スペックル強度一次確率密度分布の散乱角依存 (#600)

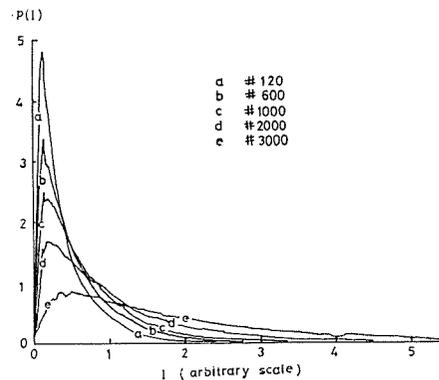


図4 スペックル強度一次確率密度分布の各種スリガラスによる変化 ($\beta = 0.02$)

表 I #600 のスリガラスによるスペククル平均強度の散乱角依存

β	$\langle I(\beta) \rangle / \langle I(0) \rangle$
0.0	1.0
0.02	0.935
0.04	0.782
0.06	0.671
0.08	0.621
0.10	0.484
0.12	0.403
0.14	0.355

表 II #600 のスリガラスの平均強度で規格化した各種スリガラスの平均強度および式 (30) から計算される α_0/σ_p の値 ($\beta=0.02$)

	$\langle I(0) \rangle / \langle I(0) \rangle_{\#600}$	α_0/σ_p (μm)
# 120	0.72	1.23
# 600	1.0	1.45
# 1000	1.23	1.61
# 2000	1.77	1.93
# 3000	3.41	2.65

表 III スペククル平均強度から得られた平均傾斜角 $\tilde{\gamma}_s$ と、触媒式表面あらさ計から得られた平均傾斜角 $\tilde{\gamma}_p$ の比較

	$\tilde{\gamma}_s$	$\tilde{\gamma}_p$
# 120	8.92°	12.65°
# 600	7.63°	9.00°
# 1000	6.84°	8.22°
# 2000	5.71°	4.42°
# 3000	4.13°	4.15°

一定に保たれてある。図 3 の分布から計算された平均強度が $\langle I(0) \rangle$ で規格化されて表 I に示される。

表 I の平均強度の空間依存から、粗面の統計量が次のようにして決められた。理論式 (25) で、 $a = \frac{\alpha_0^2}{\sigma_p^2} \frac{\pi^2}{\lambda^2}$, $y = \ln \langle I(\beta) \rangle$, $c = \ln \langle I(0) \rangle$ とおくと、

$$y = -a\beta^2 + c \quad (27)$$

となる。表 I から得られる 8 組のデータ $\{y_i, \beta_i\}$ を用いて、最小二乗法を適用すると、最も確からしい値として、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^8 \beta_i^2 \sum_{i=1}^8 y_i - 8 \sum_{i=1}^8 \beta_i^2 y_i}{8 \sum_{i=1}^8 \beta_i^4 - \left(\sum_{i=1}^8 \beta_i^2 \right)^2} = 51.85 \quad (28)$$

を得た。これから

$$\alpha_0/\sigma_p = 1.46 \text{ } (\mu\text{m}), \quad (\# 600) \quad (29)$$

得られる。以下、# 600 におけるこの値を基準として各種のスリガラスの状態が調べられた。

式 (26) を用いると、 $\beta=0$ の近傍では、

$$\alpha_0/\sigma_p \propto \langle I(\beta \approx 0) \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

である。表 II は、 $\beta=0.02$ において # 600 のスリガラスの平均強度で規格化した各種のスリガラスの実験から得られた平均強度と、式 (29) での値を基準とした α_0/σ_p の値を示す。 α_0/σ_p の値は、物理的には式 (15), (16) の関係から粗面の平均的な傾斜度に逆比例している。表 III には、表 II の α_0/σ_p の値からあらさの平均的傾斜角に変換された値 $\tilde{\gamma}_s$ が示されており、直接触針式表面あらさ計で得られた平均的傾斜角 $\tilde{\gamma}_p$ と比較されている。いずれも、# 120 から # 3000 のスリガラスにおいて、平均的傾斜角が、およそ 4°~10° の間で変化しており定性的にはほぼ一致している。

最後に留意すべきこととして次のことがある。実験において、スペククルパターンは $R=50$ cm の検出面で、およそ 200~300 μm 程度の平均的な大きさをもっていることが観測された。使用された検出開口 B は直径 99 μm の円形開口であった。このような状況で得られたスペククル強度の確率密度分布は、図 3, 図 4 に見られるように理想的に無限小の開口による検出強度の分布とは異っており、必ずしも完全な指数分布にはなっていない。したがって、厳密には検出開口の大きさを考慮した式 (8) の確率密度分布 $p(I)$ で議論する必要がある。これに関する検討は

Dainty⁸⁾ および Barakat⁹⁾ によって理論的になされている。ここでの評価はその一次近似と考えるべきである。

5. あとがき

スペckル強度の一次確率密度分布から得られる平均強度と、粗面のあらさの関係が、位相変動の *rms* 値 σ_p が π 程度以上のあらさに対して明らかにされた。より微細な構造のあらさに関しては今後の課題として残されている。

最後に、本研究の遂行にあたって有益な議論と、統計解析装置を提供していただいた応用電気研究所電波応用部門の諸氏、および触針式表面あらさ計の使用に際して御世話いただいた当学部精密工学科三好隆志氏に感謝いたします。また、終始親切な御助言をいただいた井戸川徹教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 蓮沼 宏：精密機械, **31**, 5 (1965), 336.
- 2) 奈良治郎：精密機械, **33**, 2 (1967), 124.
- 3) 磯部 孝編：“相関関数およびスペckトル”, p. 352, 東京大学出版会.
- 4) H. Hasunuma and J. Nara: J. Phys. Soc. Japan, **11** (1959), 69.
- 5) P. Beckmann: Proc. IEEE **53** (1965), 1012.
- 6) たとえば, L. I. Goldfischer: J. Opt. Soc. Amer. **55** (1965), 247.
I. Yamaguchi: Optick **35** (1972), 591; **36** (1972), 173, 241.
山口一郎：光学, **3** (1974), 75.
- 7) N. Takai: Japan. J. Appl. Phys. **13**, 12 (1974), 2025.
- 8) J. C. Dainty: Optica Acta, **18**, 5 (1971), 327.
- 9) R. Barakat: Optica Acta, **20**, 9 (1973), 729.

付録 確率密度分布 $p(\mathbf{I}')$ の導出

検出される光の複素振幅 $U(\mathbf{x})$ を、検出開口 B 内で直交する関数列 $\{\psi_l(\mathbf{x})\}$ で展開する。

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l \psi_l(\mathbf{x}), \quad (\text{A-1})$$

ここで、

$$\int_B \psi_l(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{lk} \quad (\text{A-2})$$

が成立する。このとき、 $U(\mathbf{x})$ の相関 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は、

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle U(\mathbf{x}) U^*(\mathbf{x}') \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_l U_k^* \psi_l(\mathbf{x}) \psi_k^*(\mathbf{x}') \right\rangle \quad (\text{A-3})$$

となる。いま、次の状態方程式を満足する固有値 λ_l を考える。

$$\lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) = \int_B \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_l(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (\text{A-4})$$

これに式 (A-3) を代入し、式 (A-2) の関係を用いることによって、

$$\lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) = \sum_k \langle U_l U_k^* \rangle \psi_k(\mathbf{x}) \quad (\text{A-5})$$

となり、

$$\lambda_l = \langle |U_l|^2 \rangle = \langle V_l^2 \rangle + \langle W_l^2 \rangle = 2 \langle V_l^2 \rangle \quad (\text{A-6})$$

が得られる。ここで $U_l = V_l + iW_l$ で $\langle V_l^2 \rangle = \langle W_l^2 \rangle$ とした。

次に、積分強度 I' を式 (A-1) を用いて書けば、

$$I' \equiv \int_B U(\mathbf{x}) U^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^{\infty} |U_l|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} (V_l^2 + W_l^2) \quad (\text{A-7})$$

となる。したがって、 I' の特性関数 $C_{I'}(z)$ は、

$$\begin{aligned} C_{I'}(z) &\equiv \langle \exp(i z I') \rangle = \prod_{l=1}^{\infty} \langle \exp(i z |U_l|^2) \rangle \\ &= \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \langle \exp(i z V_l^2) \rangle \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

となる。テーラー展開を用いれば、

$$\langle \exp(i z V_l^2) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i z)^n}{n!} \langle V_l^{2n} \rangle \quad (\text{A-9})$$

であるが、 V_l がガウス変数の場合には

$$\langle V_l^{2n} \rangle = (2n-1)!! \langle V_l^2 \rangle^n = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \lambda_l^n \quad (\text{A-10})$$

となるので、式 (A-9) は、

$$\langle \exp(i z V_l^2) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} (i z \lambda_l)^n \equiv (1 - i z \lambda_l)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A-11})$$

となる。これを式 (A-8) に代入し、

$$C_{I'}(z) = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - i z \lambda_l)^{-1} \quad (\text{A-12})$$

を得る。したがって I' の密度分布

$$p(I') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{I'}(z) e^{-i z I'} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i z I'}}{\prod_{l=1}^{\infty} (1 - i z \lambda_l)} dz \quad (\text{A-13})$$

を得る。特に λ_l が全て異なる N 個の場合には式 (A-13) の積分は直ちになされ、

$$p(I') = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} c_n \exp\left(-\frac{I'}{\lambda_n}\right) \quad (\text{A-14})$$

ここで、

$$c_n \equiv \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \left(1 - \frac{\lambda_l}{\lambda_n}\right)^{-1} \quad (\text{A-15})$$

である。