



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	自己帰還性を有する原子炉の最適出力変更 : 炉周期および出力のオーバーシュートに制限を設けた場合
Author(s)	秋本, 正; Akimoto, Tadashi; 小川, 雄一 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 75, 161-167
Issue Date	1975-07-26
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41272
Type	departmental bulletin paper
File Information	75_161-168.pdf



自己帰還性を有する原子炉の最適出力変更

— 炉周期および出力のオーバーシュートに制限を設けた場合 —

秋本 正* 小川 雄一* 安武 泰三*

(昭和49年9月28日受理)

Optimal Power Change of a Reactor Having Internal Feedback

— Imposing Restrictions on the Reactor Period and on the
Maximum Overshoot of Reactor Power —

Tadashi AKIMOTO, Yuichi OGAWA and Taizo YASUTAKE

(Received September 28, 1974)

Abstract

Optimal control of a reactor having an internal feedback, which brings the system from the initial equilibrium state to the objective equilibrium state in minimum time, was obtained, this imposed restrictions on the reactor period and on the maximum overshoot of the reactor power, as well as on the externally applied reactivity and its rate.

The controllability of the nonlinear system is rigorously satisfied if the effective lifetime of the reactor is adopted and the delayed neutrons are ignored, and even when the delayed neutrons are taken into account the system can be optimally controlled for practical purposes.

The reactor power is raised temporarily over the objecting value and then dropped to the objecting power level. This operation enables the density of the delayed neutron precursor to rise quickly and the system is transferred to the final equilibrium state at an extremely rapid rate.

This study may be useful for the optimal power change of a practical power reactor for electric power generation or for propulsion purposes.

1. 緒 言

負荷調整用の発電炉やロケットなどの推進用動力炉の起動や出力変更は、その役割上極力短時間に行う必要がある。このような原子炉の最短時間制御の研究はいくつか報告されている。例えば、Mohler¹⁾により制御棒駆動速度と制御棒による反応度の両者に制限を設けた場合、Monta²⁻⁴⁾によりさらに出力のオーバーシュートに制限を加えた場合、秋本ら⁵⁾により自己帰還性を有する系において制御棒駆動速度と反応度に制限を設けた場合、などが報告されている。しかし反応度に関する状態量と出力に関する状態量の両方に同時に制限を設けた系についての研究は未だ報告されていない。

本研究では、自己帰還性を有する系を遅発中性子1組モデルで表わし、即発跳躍近似の適用によらず、Pontryaginの最大原理⁶⁾を利用して、外部印加反応度とその変化速度、出力のオーバー

* 原子工学科 原子炉工学講座

シュート, さらに原子炉の出力上昇時において特に留意しなければならない炉周期に工学的, 物理的な制限を設け, 初期出力平衡点から目標の終端平衡点に状態点を最短時間で移行させる制御を求める。

2. 自己帰還性を有する原子炉の動特性

等価1組による遅発中性子と出力による自己帰還性を考慮し, 次の原子炉動特性方程式を得る。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{l} n(t) + \lambda C(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{l} n(t) - \lambda C(t) \quad (2)$$

$$\rho(t) = \rho_c(t) - Fn(t) \quad (3)$$

ここで l は中性子寿命, β は遅発中性子生成比率, λ は遅発中性子先行核の崩壊定数, F は自己帰還係数, $n(t)$ は時刻 t における中性子密度, $C(t)$ は遅発中性子先行核濃度, $\rho(t)$ は原子炉反応度, $\rho_c(t)$ は原子炉外部印加反応度である。

外部印加反応度 $\rho_c(t)$ の変化速度を制御関数 $u(t)$ とすれば,

$$\frac{d\rho_c(t)}{dt} = u(t) \quad (4)$$

となる。ここで ρ_c および $\dot{\rho}_c$ に次の制限を設ける。

$$\zeta \leq \rho_c \leq \hat{\zeta}, \quad (5)$$

$$|\dot{\rho}_c| \leq \eta \quad (6)$$

ここで $\zeta, \hat{\zeta}, \eta$ は定数である。また炉周期および出力のオーバーシュートに対する制限を,

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \leq \omega_0, \quad (7)$$

$$n \leq n_i Q \quad (8)$$

とする。ここで ω_0, Q は定数であり, n_i は n の初期値である。

(3) 式より, 初期平衡点 $P_i(n_i, C_i, \rho_{c_i})$ においては $\rho=0$ であるので

$$\rho_{c_i} = Fn_i \quad (9)$$

の関係が得られる。

次に, この n, C, ρ_c をそれぞれ初期平衡値 n_i, C_i, ρ_{c_i} で規格化して得られる次の変数

$$x_1(t) = \frac{n(t)}{n_i}, \quad x_2(t) = \frac{C(t)}{C_i}, \quad x_3(t) = \frac{\rho_c(t)}{\rho_{c_i}} \quad (10)$$

によって (1)~(4) 式を変換し, (9) 式の関係を用いると次の状態方程式を得る。

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\rho_{c_i}}{l} x_1 x_3 - \frac{\rho_{c_i}}{l} x_1^2 - \frac{\beta}{l} x_1 + \frac{\beta}{l} x_2 \quad (11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda x_1 - \lambda x_2 \quad (12)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{\rho_{c_i}} u \quad (13)$$

また, (5)~(8) 式の制限は次のようになる。

$$\frac{\zeta}{\rho_{c_i}} \leq x_3 \leq \frac{\hat{\zeta}}{\rho_{c_i}} \quad (14)$$

$$|\dot{x}_3| \leq \frac{\eta}{\rho_{c_i}} \quad (15)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} \leq \omega_0 \quad (16)$$

$$x_1 \leq Q \quad (17)$$

3. 最適制御

系の状態を初期平衡点 $P_i(n_i, C_i, \rho_{ci})$ から、目標の終端平衡点 $P_f(n_f, C_f, \rho_{cf})$ へ最短時間で移行する制御を求める。ただし、 $n_i < n_f$ とし、また振動的挙動を行わない系を扱う。

(14)~(17) 式のように状態変数に制限が設けられたので、系には次の制限不等式が付加される。

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} - \omega_0 \leq 0 \quad (18)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_3 - \frac{\xi}{\rho_{ci}} \leq 0 \quad (19)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = x_1 - Q \leq 0 \quad (20)$$

このように状態変数に制限のある問題を扱うので、最適軌跡は一般に次の4つの Segment から構成されるものと考えられる。

Segment I: 状態点が (14), (16), (17) 式の制限を受けない区間

Segment II: (16) 式の制限境界面を移行する区間

Segment III: (14) 式の制限境界面を移行する区間

Segment IV: (17) 式の制限境界面を移行する区間

したがって最適制御の形式は実用的には表1のように12通り考えられる。表1において、I→IIとは状態点が Seg. I の区間から Seg. II の区間に移行されるように制御されることを意味する。表1の Pattern L の制御形式を図に示すと Fig. 1 のようになる。各 Seg. の接合点を P_a, P_b, P_c, P_d, P_e とし、各接合点を状態点が通過する時刻をそれぞれ、 t_a, t_b, t_c, t_d, t_e またその時の状態量を x_a, x_b, x_c, x_d, x_e とする。また終端時刻を t_f とする。

評価関数 J を求めると、最短時間制御であるので Lagrangian は1であるから

$$J = \mu_1 g_1(t_a) + \mu_2 g_2(t_c) + \mu_3^T g_3(t_d) + \int_0^{t_f} (H - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (21)$$

Pattern	Segment
A	I → I
B	I → III → I
C	I → II → I
D	I → II → I → I
E	I → II → III → I
F	I → II → I → III → I
G	I → IV → I
H	I → III → IV → I
I	I → II → IV → I
J	I → II → I → IV → I
K	I → II → III → IV → I
L	I → II → I → III → IV → I

表1 制御形式

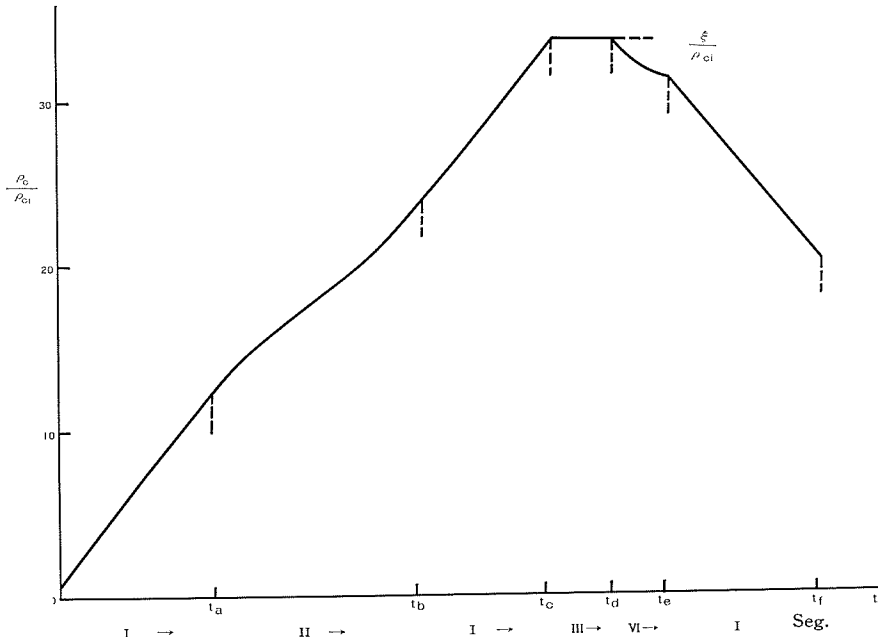


Fig. 1 Optimal Control pattern

となる。またハミルトニアン H は

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} \\
 &= p_1 \left(\frac{\rho_{c1}}{l} x_1 x_3 - \frac{\rho_{c1}}{l} x_1^2 - \frac{\beta}{l} x_1 + \frac{\beta}{l} x_2 \right) + p_2 (\lambda x_1 - \lambda x_2) + p_3 \frac{1}{\rho_{c1}} u
 \end{aligned} \tag{22}$$

となる。ここで μ は Lagrange 乗係数、 p は随伴変数で $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ である。

さて、状態点がそれぞれ制限境界面 Seg. II., III., IV に存在するためには $g(\mathbf{x})$ および $\dot{g}(\mathbf{x})$ のすべての階数の時間微分はゼロでなければならない^{7,8)}。ところで g_1, g_2 は制御関数 u が最初に陽にあらわれるのは1階微分でスカラーであり、 g_3 は2階微分でありベクトルとなる。また対応する μ_s^T もベクトルであるので、それぞれの Seg. における最適制御 u^0 は次のようになる^{5,9)}。Seg. II においては $\dot{g}_1 = 0$ より

$$u^0 = \rho_{c1} \omega_0 x_1 - \beta \lambda + \beta (\omega_0 + \lambda) \frac{x_2}{x_1} \tag{23}$$

となり、Seg. III においては $\dot{g}_2 = 0$ より

$$u^0 = 0 \tag{24}$$

となる。また Seg. IV においては $\ddot{g}_2 = 0$ より

$$u^0 = -\beta \lambda \left(1 - \frac{x_2 d}{x_1 d} \right) e^{-\lambda(t-t_d)} \tag{25}$$

となる。

また各 Seg. の接合点 (状態点の通過時刻を t_i とする) においては、次のような Corner Condition を満足しなければならない^{5-8), 10)}。

$$H(t_{i+}) = H(t_{i-}) + \mu^T \frac{\partial g}{\partial t_i} \tag{26}$$

$$p(t_{i+}) = p(t_{i-}) - \mu^T \frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{27}$$

さらに随伴方程式は各 Seg. とも同じでつぎのように求まる^{5,10)}。

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\rho_{ci}}{l}x_3p_1 + \frac{2\rho_{ci}}{l}x_1p_1 + \frac{\beta}{l}p_1 - \lambda p_2 \quad (28)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\beta}{l}p_1 + \lambda p_2 \quad (29)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -\frac{\rho_{ci}}{l}x_1p_1 \quad (30)$$

したがって、最適制御 u^0 は Seg. I においては、 u に関して H が最大になるように決定され、また Seg. II, III, IV に関しては (23)~(25) 式のようになるので最適制御は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Seg. I: } u^0 &= \eta \operatorname{sgn} p_3 \\ \text{Seg. II: } u^0 &= \rho_{ci}\omega_0x_1 - \beta\lambda + \beta(\omega_0 + \lambda)\frac{x_2}{x_1} \\ \text{Seg. III: } u^0 &= 0 \\ \text{Seg. IV: } u^0 &= -\beta\lambda \left(1 - \frac{x_2d}{x_1d}\right) e^{-\lambda(t-t_d)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ここで最適軌跡は未知時刻 t_i の決定により求められるが、未知時刻 t_i における状態量 $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ の連続性および Corner Condition より、適宜 p の仮定により、(11)~(13) 式、(28)~(30) 式を順時間方向、逆時間方向に解き、解が求まる。このようにして最適制御および軌跡が求まる。

3.1 遅発中性子を無視した系

この場合は解析的にすべての Seg. における最適制御および軌跡が求まる。表 1 の Pattern E における 1 例を示すと最適軌跡および制御の切換え時刻は次のように求まる。

$0 \leq t \leq t_a$ において

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\exp\left(\frac{\eta}{2l}t^2 + \frac{\rho_{ci}}{l}t\right)}{1 + I_1(t)} \\ x_3(t) &= \frac{\eta}{\rho_{ci}}t + 1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$t_a \leq t \leq t_b$ において

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{1a}e^{\omega_0(t-t_a)} \\ x_3(t) &= x_{1a}e^{\omega_0(t-t_a)} + \frac{\eta}{\rho_{ci}}t_a + 1 \\ t_b &= t_a + \frac{1}{\omega_0} \ln\left(\frac{\xi - \omega_0 l}{\rho_{ci}x_{1a}} - 1\right) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$t_b \leq t \leq t_e$ において

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\exp\left(\frac{\xi}{l}t\right)}{\frac{\rho_{ci}}{\xi} \exp\left(\frac{\xi}{l}t\right)\Big|_{t_b}^t + \frac{1}{x_{1b}} \exp\left(\frac{\xi}{l}t_b\right)} \\ x_3(t) &= \frac{\xi}{\rho_{ci}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$t_e \leq t \leq t_f$ において

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_{1f} \exp\left[-\left\{\frac{\eta}{2l}(t_f-t)^2 + \frac{\rho_{c_i}}{l}x_{3f}(t_f-t)\right\}\right]}{1 - I_2(t)} \\ x_3(t) &= \frac{\eta}{\rho_{c_i}}(t_f-t) + x_{3f} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで $I_1(t)$, $I_2(t)$ は次のようである。

$$I_1(t) = \frac{\rho_{c_i}}{l} \exp\left(-\frac{\rho_{c_i}^2}{2l\eta}\right) \int_0^t \exp\left[\frac{\eta}{2l}\left(t' + \frac{\rho_{c_i}}{\eta}\right)^2\right] dt' \quad (36)$$

$$I_2(t) = \frac{\rho_{c_i}}{l} x_{1f} \exp\left(\frac{\rho_{c_i}^2 x_{3f}^2}{2l\eta}\right) \int_t^{t_f} \exp\left[-\frac{\eta}{2l}\left(t' + \frac{\rho_{c_i} x_{3f}}{\eta}\right)^2\right] dt' \quad (37)$$

3.2 遅発中性子を考慮した系

この場合、最適制御は Bang-Bang 制御であることは得られるが、制御切換えの時刻および最適軌跡などは 3.1 項のように解析的に求めることは非常にむずかしく、Seg. II および IV においてだけが解析的に求まる。

非線形系の 2 点境界値問題においては可制御性が満たされないことも多く、この系の制御においても同様であろうと類推される。しかし適当な制御切換え時刻の選定により、 x_1 , x_2 , x_3 を同一時刻に目標値近傍に到達させうる可能性が生ずる⁵⁾。種々の原子炉モデルの数値解析の結果、3 変数 x_1 , x_2 , x_3 を同一時刻に実用上ほぼ目標平衡点とみなしうる固定域に移行させうるということがわかった。制御切換え時刻の決定にあたっては、遅発中性子を考慮した系においては準最適系である性質上試行錯誤で求めねばならず、逆時間方向で解く優位性はなくなり、順時間方向に試行錯誤で求める方が容易である。

Fig. 2 に表 1 の Pattern L に該当する、出力を初期出力の 21 倍にする制御および軌跡の計算例を示す。

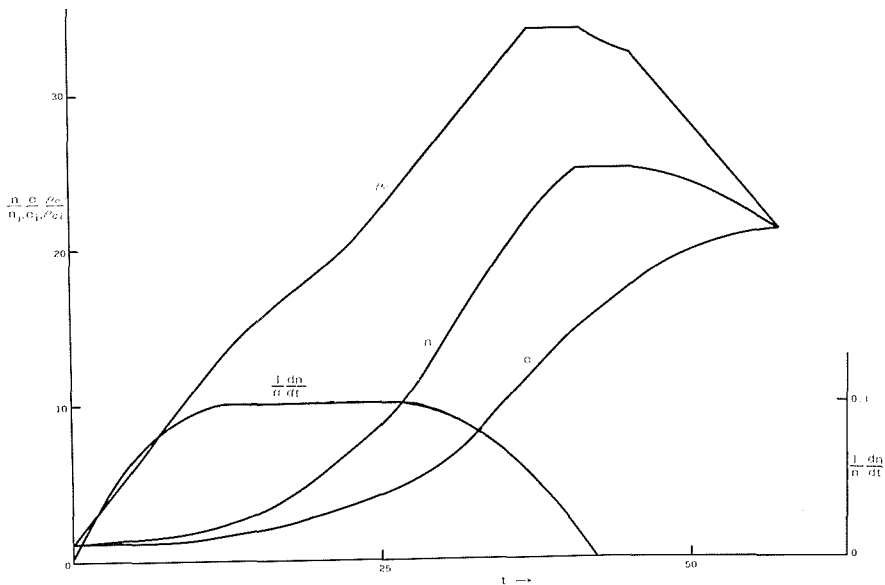


Fig. 2 Optimal control and corresponding trajectories

$$l=10^{-3} \text{ sec}, \beta=0,0065, \lambda=0,08 \text{ sec}^{-1}$$

$$\eta=4 \text{ \& sec}^{-1}, \xi=1,4 \text{ \$}, \rho_{c_i}=4 \text{ \&}$$

$$\omega_0=0,1 \text{ sec}^{-1}, Q=25$$

Seg. II および Seg. IV の解析解は次のように得られた。

Seg. II において

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{1a} e^{\omega_0(t-t_a)} \\ x_2 &= \left(x_{2a} - \frac{\lambda}{\omega_0 + \lambda} \right) e^{-\lambda(t-t_a)} + \frac{\lambda x_{1a}}{\omega_0 + \lambda} e^{\omega_0(t-t_a)} \\ x_3 &= \left(x_{3a} - x_{1a} - \frac{2\omega_0 + \lambda}{\omega_0 + \lambda} \right) e^{-(\omega_0 + \lambda)(t-t_a)} + x_{1a} e^{\omega_0(t-t_a)} + \frac{2\omega_0 + \lambda}{\omega_0 + \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Seg. IV において

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{1d} = Q \\ x_2 &= x_{1d} + (x_{2d} - x_{1d}) e^{-\lambda(t-t_d)} \\ x_3 &= x_{1d} + \frac{\beta}{\rho c_i} \left(1 - \frac{x_{2d}}{x_{1d}} \right) e^{-\lambda(t-t_d)} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

4. 結 言

本研究は、自己帰還性を有する原子炉において、最初出力平衡点から目標の出力平衡点へ到達させる制御を求めたもので、工学的、物理的見地から外部印加反応度およびその変化速度、出力のオーバーシュート、さらに炉周期に制限を設けることにより、より実用的な最適制御が得られた。

遅発中性子を無視した系においては、 l を実効寿命と考え、解析的に最適制御および軌跡は求まる。

遅発中性子を考慮した系においては、平衡点から平衡点へ移行させる制御は厳密な意味では得られなかったが、実質的な見地からは可能であることが得られた。この際 Fig. 2 に示すように、一般に出力 x_1 を目標値 x_{1f} より一旦上昇させ、その後目標値に下げるとは、応答の緩慢な遅発中性子先行核濃度を速やかに目標値に上昇させ、系の応答性を改善することになる。また自己帰還係数が大になれば、一般に系の応答性が低下することになり、外部印加反応度に対する制限値 ξ を大にする必要がある。

参 考 文 献

- 1) Mohler, R. R.: LA-3257-MS, (1965).
- 2) Monta, K: J. Nucl. Sci. Technol., 3 (1966), 6, p. 227.
- 3) Monta, K: ibid., 3 (1966), 10, p. 418.
- 4) Monta, K: ibid., 4 (1967), 2, p. 51.
- 5) 秋本 正, 小川雄一: 日本原子力学会誌, 13 (1971), 9, p. 500.
- 6) Pontryagin, L. S., et al: The Mathematical Theory of Optimal Process, (1962), Intersci. Publ. Co.
- 7) Bryson, A. E., Jr., et al: AIAAJ, 1 (1963), 11, p. 2544.
- 8) Weaber, L. E.: Reactor Dynamics and Control, (1968), Elsevier Publ. Co.
- 9) 秋本 正他: 日本原子力学会炉物理・炉工学分科会予稿集, (1971), C 15.
- 10) 安武泰三: 卒業論文, (1974).