



Title	密度ゆらぎによる表面弾性波の減衰理論（第1報）
Author(s)	中山, 恒義; Nakayama, Tuneyoshi; 佐久間, 哲郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 76, 139-145
Issue Date	1975-08-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41292
Type	departmental bulletin paper
File Information	76_139-146.pdf



密度ゆらぎによる表面弾性波の減衰理論 (第1報)

中山 恒 義 佐久間 哲 郎

(昭和49年12月26日受理)

Theory of Damping of Elastic Surface Waves by Density Fluctuation (I)

Tuneyoshi NAKAYAMA Tetsuro SAKUMA

(Received December 26, 1974)

Abstract

The purpose of this paper is to investigate theoretically the damping rate of elastic surface waves due to density fluctuations on solid surfaces. A formula for the damping rate is presented by means of Green's function method. The frequency and correlation length dependence of the rate is calculated from the formula. The results show a quite different frequency and correlation length dependence from that of the bulk phonon case investigated previously by Ziman.

1. 序 論

表面弾性波の励起素子の進歩にともない、最近その減衰に関する基本的な問題に興味がもたれるようになってきた。ここで弾性表面波というのは、主に Rayleigh 波を意味しており、その特徴は固体表面から一波長の深さに、そのほとんどのエネルギーを集中させて伝播することである。従って、特に絶縁体においては表面波が伝播するとき固体表面に存在する欠陥の効果をうけやすい。また入力パワーが比較的小さくともエネルギー密度が大きくなり、弾性エネルギーの非調和項の効果をうけやすいことがその特長といえる。この非調和項による弾性表面波の減衰の問題は、古典論が成立する $\omega\tau < 1$ の領域で Maris¹⁾ および King と Sheard²⁾ により独立に与えられた。一方、量子論が成立する $\omega\varepsilon > 1$ なる領域で、しかも入射してやる表面波の波長 λ_R と熱フォノンこの波長 λ_n との間に $\lambda_R \gg \lambda_n$ が成立する条件のもとでは Maradudin と Mills³⁾ および King と Sheard⁴⁾ により与えられた。また著者らは Maradudin と Mills³⁾ および King と Sheard⁴⁾ による結果をも、特殊例として含むような一般論を展開した⁵⁾。

ところで、一般的に固体表面は決してなめらかなものではなくて、不純物が吸着していたり、また固体表面の凹凸等による密度の不均一さが存在する。これに起因する表面波の減衰の問題も弾性エネルギーの非調和項にもとづくものに劣らず重要である。独立な散乱体として考えられるほど希薄に固体表面に分布した質量欠陥による表面波の散乱の理論的研究は、最低次の摂動を考慮することにより Steg と Klemens⁶⁾、高次の摂動項を含み Rayleigh モードだけを考慮することにより Nakayama と Sakuma⁷⁾、またすべて固有モードを考慮することにより Sakuma⁸⁾ によ

でこれまで報告されてきた。しかしながら、このような現実には質量欠陥が希薄に固体表面に分布している確率は小さく、むしろクラスターを作りながらお互いに強い相関関係をもって分布しているモデルが必要となる。本論文であつかうのは、このような強い相関関係をもって密度ゆらぎが存在する媒質の中を、表面弾性波が伝播するときの減衰に関する理論的問題である。絶縁体における表面波の減衰の理論的問題は、著者らの一連の報告⁵⁾および本論文で完成される。以下 Ezawa⁹⁾によって与えられた表面フォノンすなわちサーフォンの理論にもとづいて Green 関数の方法を用いることにより議論を進めていこう。

2. 密度関数と相互作用ハミルトニアン

等方的な弾性体と真空が二分して作る無限平面の境界上を表面波が伝播する場合を考えよう。これから問題とするのは、吸着原子などにより固体表面に密度の不均一がある場合である。1 GHz の表面波の波長が約 10^4 \AA であること、また現在までに得られている表面超音波の最高周波数が数 GHz であることから考えて、これらの波長からみた密度の変化は位置に関する連続関数であることに注意しておこう。いま半空間における弾性体のエネルギー密度は、つぎのようにあらわされる。

$$w = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\mu}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.1)$$

ここで $\rho(\mathbf{r})$ は密度関数で、 λ と μ は Lamè の定数である。 \mathbf{u} は変位ベクトルで、Ezawa⁹⁾ のサーフォンの固有関数でつぎのように展開される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_J \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega_J}} \varphi_J(t) \mathbf{u}^J(\mathbf{z}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

ここで

$$\varphi_J(t) = a_J e^{-i\omega_J t} + a_{-J}^* e^{i\omega_J t} \quad (2.3)$$

また J は、サーフォンの量子数をあらわし、 \mathbf{k} は x - y 平面での 2 次元波数ベクトル、 $\bar{\rho}$ は固体の平均密度、 ω_J は J モード・サーフォンの周波数、 $\boldsymbol{\rho}$ は x - y 平面の座標ベクトルである。 a_J および a_J^* は Bose 粒子の交換関係をみたす J モード・サーフォンの消滅、生成演算子である。

吸着原子による密度ゆらぎ、あるいは結晶成長の初期における密度ゆらぎは、固体表面に局在していると考えてよいので、我々は密度関数 $\rho(\boldsymbol{\rho})$ をつぎのように選ぶ。

$$\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho} + \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \delta(\mathbf{z}) \quad (2.4)$$

ここで、 $\Delta\rho(\boldsymbol{\rho})$ は平均密度からのずれであり、デルタ関数により、それは固体表面に局在していることを示している。これは考えている表面波の波長にくらべて、密度ゆらぎが存在する深さが充分小さい場合に適用される。また $\Delta\rho(\boldsymbol{\rho})$ は位置ベクトル $\boldsymbol{\rho}$ に依存した確率変数であり、つぎのような性質を持っているとする。

$$\langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \rangle = 0, \quad \langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}') \rangle = \bar{\Delta\rho}^2 W\left(\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}{l_c}\right) \quad (2.5)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は確率変数 $\Delta\rho(\boldsymbol{\rho})$ に対する集団平均をあらわし、 $\bar{\Delta\rho}$ は密度ゆらぎの幅、 l_c は相関長である。ゆらぎの相関関数 $W\left(\frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}{l_c}\right)$ は、つぎのような性質を二つの極限で持っている。すなわち $l_c \rightarrow 0$ 、いわゆる白色雑音となる場合に $W(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|/l_c) = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ となる。また $l_c \rightarrow \infty$ のときには $W(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|/l_c) = 0$ となる性質を持っている。すなわち、相関長が充分長くて $W(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|/l_c)$ が 1 より充分小さくなる時、あるいは $\bar{\Delta\rho}^2$ が $\bar{\rho}$ にくらべて充分小さいときは $\langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}') \rangle$ は

小さくなり、この項を摂動としてあつかうことが出来ることを示している。

いま(2.4)と(2.2)を(2.1)に代入し、半空間で積分すると $\bar{\rho}$ からなる無摂動ハミルトニアンと $\Delta\rho(\theta)$ からなる摂動ハミルトニアンをつぎのように得る。

$$H_0 = \sum_J \hbar\omega_J \left(a_J^\dagger a_J + \frac{1}{2} \right) \quad (2.6)$$

$$H_1 = \sum_{J,J'} V_{J,J'} (a_J e^{-\omega_J \tau} - a_{-J}^\dagger e^{\omega_J \tau}) (a_{J'} e^{-\omega_{J'} \tau} - a_{-J'}^\dagger e^{\omega_{J'} \tau}) \quad (2.7)$$

ここで τ は虚の時間で、結節関数 $V_{J,J'}$ は

$$V_{J,J'} = \frac{\sqrt{\omega_J \omega_{J'}}}{2\bar{\rho}} \iint d\theta dz \mathbf{u}^J(z) \cdot \mathbf{u}^{J'}(z) e^{i(k+k') \cdot \rho} \Delta\rho(\theta) \delta(z) \quad (2.8)$$

となる。また、 J についての和はつぎのように定義される。

$$\sum_J f(\mathbf{k}, c, m) = \int d\mathbf{k} \left(f(\mathbf{k}, c_R, R) + \sum_{m \neq R} \int_{\Gamma_m} dc f(\mathbf{k}, c, m) \right) \quad (2.9)$$

ここで m はモード指標、 c は速度をあらわし、 Γ_m はそれぞれサーフォンのモードで定義された速度 c の領域で積分することを意味している。

3. 密度ゆらぎによる表面弾性波の減衰の Green 関数による取扱い

3.1 Green 関数による減衰の一般論

ここでは Green 関数の方法¹⁰⁾を用いて表面弾性波の減衰率に関する一般公式を導びくことにする。 \mathbf{k} -空間における J モード・サーフォンに対する二次のグリーン関数は、摂動の最低次を考える

$$\mathfrak{D}^{(2)}(J, i\omega_l) = \mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_l) \langle \Pi^{(1)}(J, i\omega_l) \rangle \mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_l) \quad (3.1)$$

ここで

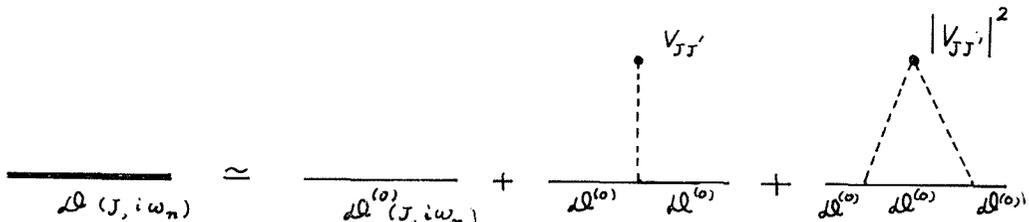
$$\omega_l = \frac{2\pi l}{\beta} \quad \beta = (k_B T)^{-1} \quad (3.2)$$

であり、 l は整数、 k_B は Boltzmann 定数である。 $\mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_l)$ は自由な J モード・サーフォンの Green 関数であり $\langle \Pi^{(1)}(J, i\omega_l) \rangle$ は、 J モード・サーフォンの自己エネルギー関数で、確率変数 $\Delta\rho(\mathbf{r})$ で集団平均をとったものである。二次の摂動まで考慮した Green 関数を第1図に示しておく。第1図で第一項のグラフは、エネルギーシフトだけにきいてくる。第二項は、つぎのような自己エネルギー関数を含んでいる。

$$\langle \Pi^{(1)}(J, i\omega_l) \rangle = -4 \left\langle \sum_{J'} |V_{JJ'}|^2 \mathfrak{D}^{(0)}(J', i\omega_l) \right\rangle \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで自由な J モードの Green 関数は

$$\mathfrak{D}^{(0)}(J, i\omega_n) = -\frac{2\omega}{\omega_n^2 + \omega^2} \quad (3.4)$$



第1図 2次の補正まで考慮した Green 関数 (運動量表示)

で与えられる。

いま、集団平均をとった自己エネルギー関数 $\langle H^{(1)}(J, i\omega_i) \rangle$ において虚軸上に存在する離散的な点 $i\omega_i$ を z でおきかえることにより、第2図のように z 平面へ解析接続すれば、実変数 ω に対してつぎの公式を得る。

$$\langle H^{(1)}(J, \omega + i\varepsilon) \rangle = \Delta_J(\omega) + i\Gamma_J(\omega) \quad (3.5)$$

ここで $\Gamma_J(\omega)$ は J モード・サーフオンの減衰係数であり、 $\Delta_J(\omega)$ はそのエネルギーシフトである。

(3.3), (3.4) および (3.5) から減衰率 $\Gamma_J(\omega)$ に対してつぎのような関係式を得る。

$$\Gamma_J(\omega) = \sum_J' \left\langle \frac{\pi}{\rho^2} \delta(\omega_J^2 - \omega'^2) \omega_J \omega_J' \left| \mathbf{u}^J(0) \cdot \mathbf{u}^{J'}(0) \right|^2 \cdot \left| \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right|^2 \right\rangle \quad (3.6)$$

(3.6) において、密度相関関数の Fourier 変換 $\rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ は、つぎのように定義される。

$$\left\langle \left| \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right|^2 \right\rangle = \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}' e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}') \rangle \quad (3.7)$$

ここで $\langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \cdot \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}') \rangle$ は差 $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$ のみの関数であるので $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' \Rightarrow \boldsymbol{\rho}$ および $\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}' \Rightarrow 2\mathbf{R}$ とおいて積分してやると

$$\left\langle \left| \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right|^2 \right\rangle = S \int d\boldsymbol{\rho} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \boldsymbol{\rho}} \langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \Delta\rho(0) \rangle \quad (3.8)$$

となる。 S は \mathbf{R} に関する積分により生ずる規格化面積である。以下、我々は公式 (3.6) を用いて意味のある物理的考察によって、波動関数 $\mathbf{u}^J(0)$ および相関関数 W を選ぶことにより減衰率を計算できることになる。

3.2 密度ゆらぎによる表面弾性波の減衰

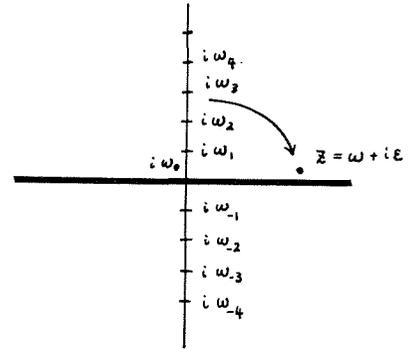
この節では前節で求めた公式 (3.6) に実際の波動関数を用いて表面弾性波の減衰率を、解析的に求めることを目的とする。いま相関関数 $W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/l_c)$ として第2章で述べた極限の性質を同時に含み、最も一般性のあるものとして Gauss 型の相関関数を選ぶことにする。他にも Exponential 型、Lorentz 型等も相関関数の候補として考えられるが、減衰率 $\Gamma_J(\omega)$ の周波数依存性および相関長依存性を問題にするかぎりにおいて本質的でない。密度相関関数としてつぎのようなものを用いる。

$$\langle \Delta\rho(\boldsymbol{\rho}) \Delta\rho(0) \rangle = \frac{b^2}{\pi l_c^2} e^{-a^2 \frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{l_c^2}} \quad (3.9)$$

ここで $\boldsymbol{\rho}$ は二次元位置ベクトル、 l_c は相関長、 a, b はディメンションをあわせるパラメーターとして選ぶことにする。(3.9) を (3.8) に代入することにより、その二次元 Fourier 変換はつぎのようになる。

$$\left\langle \left| \rho(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \right|^2 \right\rangle = \frac{(\Delta\rho)^2 S b^2}{(2\pi)^4 a^2} e^{-l_c^2 \frac{|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|^2}{4a^2}} \quad (3.10)$$

以上のような相関関数を用いて表面波すなわち Rayleigh モードの減衰率をもとめることにする。従って公式 (3.6) において J は Rayleigh モードをあらわし、また密度ゆらぎは固体表面に局在するので (3.6) における J' は、独立な5個の固有モードのうち Rayleigh モードだけを考慮



第2図 自己エネルギー関数 $\Pi(J, i\omega_n)$ から $\Pi(J, \omega + i\varepsilon)$ への解析接続

すれば充分である。Rayleigh モードの波動関数 $\mathbf{u}^{(R)}(z)$ は

$$\begin{aligned} u_x^{(R)}(z) &= i \frac{k_x}{k} \left(\frac{k}{K} \right)^{1/2} \left(e^{-\gamma kz} - \frac{2r\gamma}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right), \\ u_y^{(R)}(z) &= i \frac{k_y}{k} \left(\frac{k}{K} \right)^{1/2} \left(e^{-\gamma kz} - \frac{2r\gamma}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right), \\ u_z^{(R)}(z) &= -\gamma \left(\frac{k}{K} \right)^{1/2} \left(e^{-\gamma kz} - \frac{2}{1+\gamma^2} e^{-\eta kz} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここで

$$\tilde{r} = \left[1 - (c_R/c_l)^2 \right]^{1/2}, \quad \eta = \left[1 - (c_R/c_t)^2 \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

および

$$K = (\tilde{r} - \eta)(r - \eta + 2r\gamma^2)/2r\gamma^2 \quad (3.13)$$

ここで \tilde{r} および η は弾性定数によって定まる正の数 ($\tilde{r}=0.86$, $\eta=0.38$) である。 c_l と c_t はバルク波の縦波と横波の速度であり、 c_R は Rayleigh 波の速度で次式の解として定められる。

$$(2 - c_R^2/c_l^2)^4 = 16(1 - c_R^2/c_t^2)(1 - c_R^2/c_l^2) \quad (3.14)$$

(3.11) より高周波の Rayleigh 波は指数関数のためにその振幅が固体内部に入るに従い急激に減少することに注意しよう。(3.11) を用いて公式 (3.6) にあらわれるスカラー積 $|\mathbf{u}^{(R)}(0) \cdot \mathbf{u}^{(R')}(0)|$ は、つぎのようになる。

$$|\mathbf{u}^{(R)}(0) \cdot \mathbf{u}^{(R')}(0)| = k_R k_{R'} (-\cos \theta \cdot f_1 + \tilde{r}^2 f_2)^2 \quad (3.15)$$

ここで

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{K} \left(1 - \frac{2\tilde{r}\eta}{1+\gamma^2} \right)^2 \\ f_2 &= \frac{1}{K} \left(1 - \frac{2}{1+\gamma^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

θ は波数ベクトル \mathbf{k}_R と $\mathbf{k}_{R'}$ との間の角度である。(3.6) と (3.10) および (3.15) により減衰率 $\Gamma_J(\omega)$ の解析解としてつぎの式を得る。

$$\Gamma_R(\omega) = \frac{(\Delta\rho)^2 b^2 \pi}{(2\pi)^4 c_R^3} \omega^5 e^{-x} \left[f_1^2 (I_0(x) + I_2(x)) - 4\tilde{r}^2 f_1 f_2 I_1(x) + 2\tilde{r}^4 f_2^2 I_0(x) \right] \quad (3.17)$$

ここで

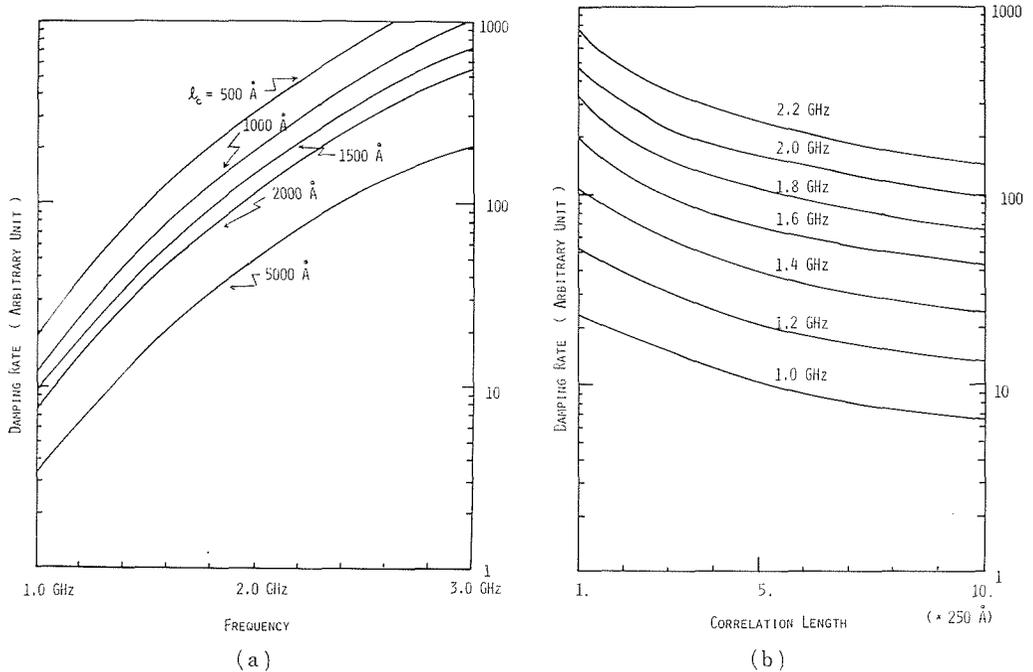
$$x = L_c^2 \omega^2 / 2c_R^2$$

でまた f_1, f_2 は (3.16) で与えられる。また $I_n(x)$ は n 次の変形 Bessel 関数で x が大きいところでの漸近形はつぎのようになる。

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\nu, n)}{(2x)^n} + \frac{e^{-x - (\nu + \frac{1}{2})\pi i}}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu, n)}{(2x)^n} \quad (3.18)$$

$$(\nu, n) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \cdots (4\nu^2 - (2n-1)^2)}{n! 2^{2n}} = \frac{\Gamma\left(\nu + n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\nu - n + \frac{1}{2}\right)} \quad (3.19)$$

このように x が大きいところでは (3.18) の第一項の指数部と (3.17) の指数部がお互いに消去しあうことに注意しよう。従って x が大きいところでは (3.18) においては第一項の分母が主な役割をはたすことになる。このように (3.17) により表面波の密度ゆらぎによる減衰率の解析解が得られ



第3図 (a) 表面弾性波の減衰率の周波数依存性
(b) 表面弾性波の減衰率の相関長依存性

たが、この式にはいろいろな物理的性質が含まれている。まず、ゆらぎ幅 $\overline{\Delta\rho}$ が零になれば $\Gamma_R(\omega)$ は同時に零になることは当然のことである。また相関長 $l_c \rightarrow \infty$ では、同様に $\Gamma_R(\omega)$ も零になる。また $l_c \rightarrow 0$ では ω の5乗べきになることに注意しよう。このことは、相関長 l_c で減衰率 $\Gamma_R(\omega)$ の周波数依存性が強く影響していることを示している。このようにして求められた $\Gamma_R(\omega)$ の周波数依存性および相関長依存性の数値計算した結果を第3図に示す。

4. 結 論

この論文で我々は、強い相関関係をもった密度ゆらぎが固体表面に存在する場合の中を、表面波が伝播するときの減衰に関する理論を扱ってきた。絶縁体における表面波の減衰の理論的問題は、弾性エネルギーの非調和項にもとづいた著者らの報告⁵⁾および本論文とで完成される。独立な散乱体として考えられるほど希薄に固体表面に存在する質量欠陥の場合は、その減衰率は周波数の5乗べきで変化することが知られているが、この論文では強い相関をもって密度の不均一が固体表面に存在するときは、表面波の減衰は相関長 l に強く依存することが示された。

つぎに密度ゆらぎによるバルク波の減衰の問題との関連について述べておこう。バルク波の現象論的な密度ゆらぎによる減衰の問題は最初 Klemens¹¹⁾ によって与えられた。その後 Ziman¹²⁾ は電磁波が屈折率のゆらぎの存在する場を伝播する問題に対する Ratcliffe¹³⁾ による取扱いをフォノンに適用することによりつぎのような結果を得た。考えている音波の波長 λ と相関長 l_c の間に $\lambda \gg l_c$ なる条件のもとでは、その減衰率は周波数に依存しないこと、また $\lambda \ll l_c$ の場合には ω^2 に比例することを示した。しかしながら Ziman¹²⁾ も指摘しているように、完全な理論はこれらの結果を同時に含むようなものになるはずである。ところで、本論文での取扱いをバルク波に適用すると Ziman の結果を同時に含んでいることに注目したい。また最近、非晶質状態の物質における熱

伝導の問題が注目されている¹⁴⁾が、本論文の方法をこの問題に適用することは興味あることであろう。またバルク波の密度ゆらぎによる減衰の周波数依存性が、周波数の2乗にきいてくると表面波のそれがだいたい5乗できいてくることの違いは、表面効果の反映にほかならない。

最後に実験との関連について述べておこう。DeVriesとMiller¹⁵⁾は圧電セラミクス上を伝播する表面波の減衰の周波数特性を測定し、20~50 MHzの領域で、その周波数依存性として5乗べきの結果を得た。この結果は、散乱体が充分希薄に存在し、独立な散乱体とみなせる場合であろう。またLarson等¹⁶⁾は、LiNbO₃にNe⁺イオンを80 keVで加速し注入することによって密度の不均一さを人工的につくることにより表面波の減衰の周波数特性を測定し、それは周波数の2乗べきで減衰するという結果を得た。この場合、Ne⁺イオンは固体表面から深さ約940 Åのところ分布しており、直接には本論文の結果とは比較できない。

おわりに著者の1人(中山)は、財団法人作行会の研究助成金を与えられていることに感謝する。また本研究の数値計算の部分は、北海道大学大型計算センターFACOM 230-60を使用した。

文 献

- 1) H. J. Maris: Phys. Rev. **188** (1969), 1308.
- 2) P. J. King and F. W. Sheard: J. appl. Phys. **40** (1969), 5189.
- 3) A. A. Maradudin and D. L. Mills: Phys. Rev. **173** (1968), 881.
- 4) P. J. King and F. W. Sheard: Proc. Roy. Soc. London **A 320** (1970), 175.
- 5) 佐久間哲郎, 中山恒義: 北海道大学工学部研究報告, 第70号, 昭和49年2月, p. 63.
中山恒義, 佐久間哲郎: ibid, 第73号, 昭和49年12月, p. 123.
T. Sakuma and T. Nakayama: Appl. Phys. Letters. **25** (1974), 176.
T. Sakuma and T. Nakayama: JJAP Supplement 2 (1974), 893.
- 6) R. G. Steg and P. G. Klemens: Phys. Rev. Letters **24** (1970), 381.
- 7) T. Nakayama and T. Sakuma: Lett. Nuovo Cimento **2** (1971), 1104.
- 8) T. Sakuma: Phys. Rev. Letters **29** (1972), 1394.
T. Sakuma: Phys. Rev. **B 8** (1973), 1433.
- 9) H. Ezawa: Ann. of Physics **67** (1971), 438.
- 10) T. Matsubara: Prog. Theor. Phys. **14** (1955), 351.
See also A. A. Abrikosov, L. L. Gorkov and I. Ye. Dzyaloshinskii: Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics. Translated by D. E. Brown (Pergamon Press, 1965).
- 11) P. G. Klemens: Proc. Roy. Soc. **A 208** (1951), 108.
- 12) J. M. Ziman: Electrons and Phonons p. 248, Clarendon Press, Oxford (1960).
- 13) J. A. Ratcliffe: Reports on Progress in Physics **19** (1956), 190.
- 14) D. Walton: Solid State Communications **14** (1974), 335.
- 15) A. J. DeVries and R. L. Miller: Appl. Phys. Letters **20** (1972), 210.
- 16) T. R. Larson, W. H. Weisenberger and W. H. Lucke: Appl. Phys. Letters **22** (1973), 617.