



Title	弾性波増幅の等価媒質パラメータによる解析法
Author(s)	瀬上, 広一; Segami, Kouichi; 小柴, 正則 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 76, 87-98
Issue Date	1975-08-20
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41293">https://hdl.handle.net/2115/41293</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	76_87-98.pdf



## 弾性波増幅の等価媒質パラメータによる解析法

瀬上 広一\* 小柴 正則\* 鈴木 道雄\*

(昭和49年12月27日受理)

### Analytical Methods of Elastic Wave Amplification by Means of Equivalent Parameter Representations

Kouichi SEGAMI Masanori KOSHIBA Michio SUZUKI

(Received December 27, 1974)

#### Abstract

Recently, electronic engineers have become interested in using the small wavelength of acoustic waves to achieve microminiaturized circuits. However, all workers in the field are not necessarily familiar with acoustic wave phenomena, and it may be pointed out that boundary value problems involving elastic waves in solids are generally quite intricate and difficult to solve. Oliner presented transmission line models for acoustic waves in isotropic media, and Koshiba et al. developed network methods for anisotropic media and piezoelectric media with body force sources. With transmission line models, one can make use of known microwave network techniques. Unfortunately, transmission line models can be constructed only when waveguide modes can be grouped in pairs with equal and opposite propagation factors, hence nonreciprocal systems such as magnetic or semiconducting medium in a dc magnetic field, cannot be included in the models.

In this paper, we have proposed new analytical methods for piezoelectric media by means of equivalent parameter representations, and we have shown that the new techniques are applicable to the analysis of a given problem involving elastic waves simply and systematically, even when nonreciprocal characteristics should be considered. As an example, we have treated the problem of Elastic Wave Amplification by this method.

#### 1. ま え が き

最近、弾性表面波のマイクロ波回路素子への応用研究が盛んに行われている。ところが弾性波伝搬の問題は電子通信工学の分野では比較的なじみの薄いものであり、又、不連続点を含む場合や、他の電磁界系との相互作用などを扱う場合の解析は極めて複雑になることが多い。そこで、こうした問題に電磁界理論における既知の概念を導入することによって、解析を容易にすると共に現象の理解の一助としようとする試みが活発になっている。Olinerは等方性媒質における弾性波伝搬に対して電磁界と同様な回路網表示を与えた<sup>4)</sup>。この手法は更に異方性<sup>5)</sup>、圧電性媒質<sup>6)</sup>の場合に拡張されて有用な解析法となっはいるが、この取扱いでは解の対称性を考慮している<sup>7)</sup>ために扱い得る媒質が制限されてしまい、又、圧電弾性波と他の電磁界との相互作用などを考え

\* 電子工学科

る場合には統一的な取扱いが困難となる。

圧電弾性波の増幅には主として半導体中のドリフトキャリアとの相互作用を利用するが、これらの現象が、いずれも Maxwell の方程式及び構成方程式によって記述される点に着目すると、弾性波あるいはドリフトキャリアによる影響を Marcuvitz らが電子ビームの、そして深井らが運動媒質、圧縮性プラズマ及び半導体の回路網の取扱い<sup>2)</sup>の際に用いた、いわゆる等価媒質パラメータ (等価誘電率や等価透磁率) の中に含ませてしまうことが可能である。すなわち、形式的に Maxwell の方程式のみで記述することにより、圧電弾性体、半導体の両方の系に対して全く統一的な取扱いが可能となる。媒質の境界に垂直な方向を線路と考え、この方向の電圧、電流及び伝送方程式を考えることによって、従来の異方性媒質中の電磁界の解析法<sup>1)</sup>がそのまま適用され、これらの問題を容易に、且つ統一的に取扱うことができる。もちろん、この等価媒質パラメータの中には未知の伝搬定数が含まれているが、これらは境界条件が定められると決定されるのであり、それにより等価媒質パラメータが逆に求められることになる。

圧電弾性波の増幅は、圧電性媒質、半導体及び等方性媒質を層状に組み合わせて行われる。本論文は、各媒質の等価媒質パラメータを用いることにより、考え得る全ての組合せに対して増大波を含む波の伝搬定数の決定方程式を導き、一例に対して数値解を示したものである。

## 2. 圧電性媒質

座標系を図1のようにとる。

Auld の表記法<sup>7)</sup>により、圧電弾性波の基本式は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\omega^2 \rho \mathbf{U} - \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\nabla_s \mathbf{U} = \mathbf{S} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon^s \cdot \mathbf{E} + \mathbf{e} : \mathbf{S} \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^e : \mathbf{S} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \quad (4)$$

ここに  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$  はそれぞれ応力, 変位, 歪, 外力,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  はそれぞれ電気変位, 電界,  $\epsilon^s$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{e}$  はそれぞれ歪一定の誘電率テンソル, 電界一定の弾性定数テンソル, 圧電定数テンソル,  $\omega$ ,  $\rho$  はそれぞれ角周波数, 媒質密度である。

又, 式(1), (2)における演算子  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla_s$  を形式的に dyadic tensor の形で表すと

$$\nabla \cdot = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \rho/\rho y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\nabla_s = \nabla \cdot T \quad (6)$$

ここに  $T$  は transpose を意味する

又, Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (8)$$

ここに,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  はそれぞれ磁界, 磁束密度である。

ここで式(1)~(8)における  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  を例えば

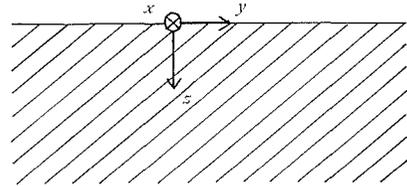


図1 座標系

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}(\alpha, \beta) \exp \left\{ j\omega t - j(\alpha x + \beta y + k_z z) \right\} d\alpha d\beta$$

$$k_z = k_z(\alpha, \beta) \quad (9)$$

とフーリエ積分表示し、更に式(5), (6)において  $\partial/\partial x \rightarrow -j\alpha$ ,  $\partial/\partial y \rightarrow -j\beta$ ,  $\partial/\partial z \rightarrow -jk_z$  なる置き換え<sup>2)</sup>を行い、次式のような演算子  $\mathbf{R}$  を定義する<sup>3)</sup>。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -j\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -j\beta & 0 \\ 0 & 0 & -jk_z \\ 0 & -jk_z & -j\beta \\ -jk_z & 0 & -j\alpha \\ -j\beta & -j\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)の表示を用いると式(1), (2)は

$$\mathbf{R}^T : \mathbf{T} = -\omega^2 \rho \mathbf{U} - \mathbf{F} \quad (11)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{S} \quad (12)$$

式(3), (4), (11), (12)より  $\mathbf{D}$  は  $\mathbf{E}$  だけで表されることになり、次式を得る。

$$\mathbf{D} = \varepsilon^S \cdot \mathbf{E} + \mathbf{e} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^T : \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{e} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \quad (13)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{R}^T : \mathbf{C}^E : \mathbf{R} + \omega^2 \rho \mathbf{I})^{-1} \quad (14)$$

$\mathbf{I}$  は単位ベクトルである。

式(13)を式(7)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \varepsilon_P \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_P^* \\ \varepsilon_P &= \varepsilon^S + \mathbf{e} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^T : \mathbf{e} \\ \mathbf{J}_P^* &= -j\omega \mathbf{e} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)は形式的に Maxwell の方程式と同じであり、弾性的な影響は dyadic な等価誘電率  $\varepsilon_P$  の中に含まれている。又、外力  $\mathbf{F}$  は等価な電流源  $\mathbf{J}_P^*$  に置き換えられることになり、従って電磁界理論におけると同様な伝送方程式を誘導することが可能となる。

具体例として、 $C_{6v}$  結晶の  $C$  軸を  $z$  軸方向にとり、等価誘電率ならびに伝送方程式を示す。 $C_{6v}$  結晶の媒質定数テンソルは次式で与えられる。

$$\varepsilon^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^E = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\partial/\partial x = 0$  として、式(15), (16)から等価誘電率  $\varepsilon_P$  を求めると

$$\varepsilon_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^S - e_{15}^2 p_{11} k_z^2$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}^S - e_{15}^2 (p_{22} k_z^2 + 2p_{23} \beta k_z + p_{33} \beta^2)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = -e_{31} e_{15} (p_{22} \beta k_z + p_{23} \beta^2) - e_{33} e_{15} (p_{23} k_z^2 + p_{33} \beta k_z)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^S - (e_{31}^2 p_{22} \beta^2 + 2e_{31} e_{33} p_{23} \beta k_z + e_{33}^2 p_{33} k_z^2)$$

ここに  $p_{ij}$  は式(14)で定義される  $\mathbf{P}$  の  $(i, j)$  要素である。

この場合、Rayleigh 波 ( $u_x=0$ ) と結合している TM-type 波 ( $H_y=0$ ) と SH 波 ( $u_y=u_z=0$ ) と結合している TE-type 波 ( $E_y=0$ ) とは分離されるが<sup>6)</sup>、工學上実際に用いられているのは前者であるので、 $E_y$  に比例する姿態電圧を  $V_1$ 、 $H_x$  に比例する姿態電流を  $I_1$  として、TM-type 波のみを取り出すと、その伝送方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -dV_1/dz &= ja_{11}I_1 + b_{11}V_1 \\ -dI_1/dz &= jc_{11}V_1 + d_{11}I_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$a_{11} = (\omega^2 \varepsilon_{33} \mu_0 - \beta^2)/\omega \varepsilon_{33}$$

$$b_{11} = d_{11} = -j\beta \varepsilon_{32}/\varepsilon_{33}$$

$$c_{11} = \omega(\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32})/\varepsilon_{33}$$

式(18)より  $I_1$  を消去して

$$\left\{ d^2/dz^2 + (b_{11} + d_{11}) \cdot d/dz + (a_{11} c_{11} + b_{11} d_{11}) \right\} V_1 = 0 \quad (19)$$

式(19)は2次の微分方程式であるが、媒質定数  $\varepsilon$  が  $k_z$  を含むためこれらの式を整理すると  $k_z$  についての6次方程式となる。この方程式の根を次式のように示す。

$$k_{z,p} = \pm k_{z,p}^{(6)} \quad i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

ここに  $p$  は圧電弾性体の量であることを表す。

従って式(19)の解は

$$\left. \begin{aligned} V_{1,p} &= \mathbf{L}_{\bar{v},p}^+(z) \cdot \mathbf{A}_p + \mathbf{L}_{\bar{v},p}^-(z) \cdot \mathbf{B}_p \\ I_{1,p} &= \mathbf{L}_{\bar{I},p}^+(z) \cdot \mathbf{A}_p + \mathbf{L}_{\bar{I},p}^-(z) \cdot \mathbf{B}_p \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_p = (A_p^{(1)}, A_p^{(2)}, A_p^{(3)})^T, \quad \mathbf{B}_p = (B_p^{(1)}, B_p^{(2)}, B_p^{(3)})^T$$

$$\mathbf{L}_{\bar{v},p}^+(z) = \left( \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \right)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{I},p}^+(z) = \left( \mp y_p^{(1)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), \pm y_p^{(2)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), \pm y_p^{(3)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \right)$$

$$y_p^{(6)} = jc_{11,p}^{(6)} / (d_{11,p}^{(6)} - jk_{z,p}^{(6)})$$

ここに  $A_p^{(6)}$ 、 $B_p^{(6)}$  は境界条件により定められる定数である。

次に境界のある場合について考察する。境界のないときに求めた式(20)をみると6つの伝搬定数があるので、電磁界の境界条件と弾性的な境界条件が必要になる。媒質の境界面 ( $xy$  面) では境界面に働く応力  $T_{zz}$ 、 $T_{zy}$ 、 $T_{zx}$  及び変位  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  が連続しなければならないが、前述したように本稿で扱っている TM-type 波の場合には  $T_{yz}$ 、 $T_{zz}$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  のみを考慮すればよい。

式(3)、(4)、(11)、(12)より  $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{U}$  が

$$\mathbf{T} = (\mathbf{C}^E : \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^T : \mathbf{e} - \mathbf{e}) \cdot \mathbf{E} \quad (22)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}^T : \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \quad (23)$$

で与えられることに留意し、準静電近以

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (24)$$

を適用すると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} T_{zy,p} \\ T_{zz,p} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\bar{T},p}^+(z) \cdot \mathbf{A}_p + \mathbf{L}_{\bar{T},p}^-(z) \cdot \mathbf{B}_p \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\vec{x},p}^{\pm}(z) &= \begin{bmatrix} T_{zy,p}^{(1)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), & T_{zy,p}^{(2)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), & T_{zy,p}^{(3)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \\ \pm T_{zz,p}^{(1)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), & \pm T_{zz,p}^{(2)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), & \pm T_{zz,p}^{(3)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \end{bmatrix} \\
T_{zy,p}^{(i)} &= - \left\{ e_{15} c_{44} (p_{22}^{(i)} k_{z,p}^{(i)2} + 2p_{23}^{(i)} \beta k_{z,p}^{(i)} + p_{33}^{(i)} \beta^2) + e_{15} \right\} \\
&\quad - \left\{ c_{44} \beta k_{z,p}^{(i)} (e_{31} p_{22}^{(i)} + e_{33} p_{33}^{(i)}) + c_{44} p_{23}^{(i)} (e_{31} \beta^2 + e_{33} k_{z,p}^{(i)2}) \right\} \cdot (k_{z,p}^{(i)} / \beta) \\
T_{zz,p}^{(i)} &= - \left\{ \beta k_{z,p}^{(i)} (e_{31} c_{13} p_{22}^{(i)} + e_{15} c_{33} p_{33}^{(i)}) + e_{15} p_{23}^{(i)} (c_{13} \beta^2 + c_{33} k_{z,p}^{(i)2}) \right\} \\
&\quad - \left\{ e_{31} c_{13} p_{22}^{(i)} \beta^2 + p_{23}^{(i)} \beta k_{z,p}^{(i)} (e_{33} c_{13} + e_{31} c_{33}) + e_{33} c_{33} p_{33}^{(i)} k_{z,p}^{(i)2} + e_{33} \right\} \cdot (k_{z,p}^{(i)} / \beta) \\
\begin{bmatrix} u_{y,p} \\ u_{z,p} \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{u,p}^+(z) \cdot \mathbf{A}_p + \mathbf{L}_{u,p}^-(z) \cdot \mathbf{B}_p \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{u,p}^{\pm}(z) &= \begin{bmatrix} \pm u_{y,p}^{(1)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), & \pm u_{y,p}^{(2)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), & \pm u_{y,p}^{(3)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \\ u_{z,p}^{(1)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(1)} z), & u_{z,p}^{(2)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(2)} z), & u_{z,p}^{(3)} \exp(\mp jk_{z,p}^{(3)} z) \end{bmatrix} \\
u_{y,p}^{(i)} &= -j e_{15} (p_{22}^{(i)} k_{z,p}^{(i)} + p_{23}^{(i)} \beta) - j (e_{31} p_{22}^{(i)} \beta + e_{33} p_{23}^{(i)} k_{z,p}^{(i)}) \cdot (k_{z,p}^{(i)} / \beta) \\
u_{z,p}^{(i)} &= -j e_{15} (p_{23}^{(i)} k_{z,p}^{(i)} + p_{33}^{(i)} \beta) - j (e_{31} p_{23}^{(i)} \beta + e_{33} p_{33}^{(i)} k_{z,p}^{(i)}) \cdot (k_{z,p}^{(i)} / \beta)
\end{aligned}$$

### 3. 半 導 体

ドリフトキャリアとして電子一種類のみを扱う場合については文献(2)において報告されているので、ここでは更に横磁界中での等価誘電率及び伝送方程式を示す。尚、座標系は図1と同様である。

Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \tag{27}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \tag{28}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -en/\varepsilon \tag{29}$$

又、電流に関係のある式は

$$\mathbf{J} = -e [n_0 \mathbf{V} + n \mathbf{i}_y u] \tag{30}$$

$$j(\omega - \beta u - j/\tau) \mathbf{V} = -(e/m) \cdot \mathbf{E} - (v_y^2/n_0) \cdot \nabla n \tag{31}$$

ここに  $\varepsilon$  は半導体の誘電率,  $v_T$ ,  $\tau$  はそれぞれ電子の熱速度, 衝突時間,  $\mathbf{V}$ ,  $u$  はそれぞれ交流速度,  $y$  方向直流速度,  $m$ ,  $e$ ,  $n$ ,  $n_0$  はそれぞれ質量, 電荷, 交流密度, 平均密度であり, 更に  $1/\tau \gg |\omega - \beta u|$  と仮定する

式(29)~(31)を用いて, ドリフトキャリアによる影響を次式で与えられる等価誘電率の中に含ませてしまうことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon [1 + \omega_c / j\omega \Delta]$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon \left[ 1 - ju\beta / j\omega + \left\{ (\omega_c + D\beta^2) - \mu_c B_0 D k_z \beta \right\} / j\omega \Delta \right]$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon \left[ -ju k_z / j\omega + \left\{ D\beta k_z - \mu_c B_0 (\omega_c + D k_z^2) \right\} / j\omega \Delta \right]$$

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon \left[ D\beta k_z + \mu_c B_0 (\omega_c + B\beta^2) \right] / j\omega \Delta$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon \left[ 1 + \left\{ (\omega_c + D k_z^2) + \mu_c B_0 D k_z \beta \right\} / j\omega \Delta \right]$$

$$\Delta = 1 + (\mu_c B_0)^2$$

ここに  $D$  は拡散定数,  $\omega_c = e^2 n_0 \tau / m \varepsilon$  は誘電緩和角周波数,  $B_0$  は直流磁束密度である。

この場合も TM-type 波と TE-type 波とが分離し, TE-type 波は真空中と同じであるので TM-type 波のみを取り出すと

$$\left. \begin{aligned} -dV_1/dz &= ja_{11}I_1 + b_{11}V_1 \\ -dI_1/dz &= jc_{11}V_1 + d_{11}I_1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$a_{11} = (\omega^2 \varepsilon_{33} \mu_0 - \beta^2) / \omega \varepsilon_{33}, \quad b_{11} = -j\beta \varepsilon_{32} / \varepsilon_{33}$$

$$c_{11} = \omega (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32}) / \varepsilon_{33}, \quad d_{11} = -j\beta \varepsilon_{23} / \varepsilon_{33}$$

2. と同様にして伝搬定数  $k_z$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} k_{z,s} &= \pm k_{z,s}^{(2)} & i &= 1, 2 \\ k_{z,s}^{(1)} &= -j\eta_L, & k_{z,s}^{(2)} &\simeq -j\beta \\ \eta_L &= \sqrt{\{\omega_c^* + D^* \beta^2 + j(\omega - \beta u)\} / D^*} \\ \omega_c^* &= \omega_c / A, & D^* &= D / A \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここに  $s$  は半導体中の量であることを表す。

従って伝送方程式 (33) の解は

$$\left. \begin{aligned} V_{I,s} &= \mathbf{L}_{\bar{v},s}^+(z) \cdot \mathbf{A}_s + \mathbf{L}_{\bar{v},s}^-(z) \cdot \mathbf{B}_s \\ I_{I,s} &= \mathbf{L}_{\bar{i},s}^+(z) \cdot \mathbf{A}_s + \mathbf{L}_{\bar{i},s}^-(z) \cdot \mathbf{B}_s \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\mathbf{A}_s = (A_s^{(1)}, A_s^{(2)})^T, \quad \mathbf{B}_s = (B_s^{(1)}, B_s^{(2)})^T$$

$$\mathbf{L}_{\bar{v},s}^\pm(z) = \left( \exp(\mp jk_{z,s}^{(1)} z), \exp(\mp jk_{z,s}^{(2)} z) \right)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{i},s}^\pm(z) = \left( Y_{s\pm}^{(1)} \exp(\mp jk_{z,s}^{(1)} z), Y_{s\pm}^{(2)} \exp(\mp jk_{z,s}^{(2)} z) \right)$$

$$Y_{s\pm}^{(1)} = j\varepsilon (\eta_L u \pm j\omega \tau \mu_c B_0) / \beta$$

$$Y_{s\pm}^{(2)} = \varepsilon \left\{ (j\omega + \omega_c^*) \mp j\omega \mu_c B_0 \right\} / \beta$$

ここに  $A_s^{(i)}, B_s^{(i)}$  は境界条件により定められる定数である。

境界条件は横電磁界の他に  $z$  方向の電流  $J_z$  に対しても与えられる。

$$J_z = \mathbf{L}_{\bar{j},s}^+(z) \cdot \mathbf{A}_s + \mathbf{L}_{\bar{j},s}^-(z) \cdot \mathbf{B}_s \quad (36)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{j},s}^\pm(z) = \left( J_{z,s}^{(1)\pm} \exp(\mp jk_{z,s}^{(1)} z), J_{z,s}^{(2)\pm} \exp(\mp jk_{z,s}^{(2)} z) \right)$$

$$J_{z,s}^{(i)\pm} = e n_0 \mu_c (\mu_c B_0 \omega_c^* \pm k_{z,s}^{(i)} / \beta) \left\{ 1 + (\beta^2 + k_{z,s}^{(i)2}) \cdot D^* / \omega_c^* \right\}$$

#### 4. 等方性媒質

ここで, 圧電性を持たない等方性媒質中の弾性波について簡単に述べておく。

本論文では Rayleigh 波を扱っているので, 2. と同様に  $T_{zy}, T_{zx}, u_y, u_z$  のみを考慮すれば十分であり, これらは次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} T_{zy} \\ T_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\bar{T}}^+(z) \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{L}_{\bar{T}}^-(z) \cdot \mathbf{B}' \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\bar{u}}^+(z) \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{L}_{\bar{u}}^-(z) \cdot \mathbf{B}' \quad (38)$$

$$\mathbf{A}' = (A'^{(1)}, A'^{(2)})^T, \quad \mathbf{B}' = (B'^{(1)}, B'^{(2)})^T$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\vec{z}}^{\pm}(z) &= \begin{bmatrix} T_{zy}^{(1)} \exp(\mp \xi^{(1)} z), & T_{zy}^{(2)} \exp(\mp \xi^{(2)} z) \\ \pm T_{zz}^{(1)} \exp(\mp \xi^{(1)} z), & \pm T_{zz}^{(2)} \exp(\mp \xi^{(2)} z) \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{\vec{u}}^{\pm}(z) &= \begin{bmatrix} \pm \exp(\mp \xi^{(1)} z), & \pm \exp(\mp \xi^{(2)} z) \\ u_z^{(1)} \exp(\mp \xi^{(1)} z), & u_z^{(2)} \exp(\mp \xi^{(2)} z) \end{bmatrix} \\
\xi^{(1)} &= \sqrt{1 - \omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu) \beta^2}, & \xi^{(2)} &= \sqrt{1 - \omega^2 \rho / \mu \beta^2} \\
T_{zy}^{(\xi)} &= -j\mu(\beta u_z^{(\xi)} - \xi^{(\xi)}) \\
T_{zz}^{(\xi)} &= -j\left\{ \mu\beta - j(\lambda + 2\mu)\xi^{(\xi)} u_z^{(\xi)} \right\} \\
u_z^{(\xi)} &= \left[ \omega^2 \rho - \left\{ \beta^2(\lambda + 2\mu) - \xi^{(\xi)2} \mu \right\} \right] / \left[ -j\xi^{(\xi)} \beta(\lambda + \mu) \right]
\end{aligned}$$

ここに  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$  は境界条件により定められる定数であり,  $\lambda$ ,  $\mu$  はラーメ定数である。

以上 2., 3., 4. においてそれぞれ圧電性媒質, 半導体, 等方性媒質における基本的諸量を求めたので, これらの結果を利用して弾性波の増幅問題を極めて簡単に且つ統一的に取扱うことが可能となる。

### 5. 圧電性波増幅の解析

圧電弾性波を増幅するには, 圧電弾性波に伴う圧電界と半導体中のドリフトキャリアとの相互作用が利用される<sup>8),9)</sup>。従って, 圧電性媒質, 半導体, 等方性媒質の組み合わせにより, 種々の増幅器が考えられる。

最も一般的な構造として図2の系を考え, 等方性媒質を I, II, 圧電性媒質を P, 半導体を S で表す。

$z = -d_1, 0, d_2$  における境界条件及びそれぞれの境界条件に係する各媒質中のモードを表1に示す。

未知定数 ( $\mathbf{B}_I, \mathbf{B}'_I, \mathbf{A}_P, \mathbf{B}_P, \mathbf{A}_S, \mathbf{B}_S, \mathbf{A}'_S, \mathbf{B}'_S, \mathbf{A}_{II}, \mathbf{A}'_{II}$ ) が非自明な値を持つためには表1で与えられる要素からなる行列式が零とならなければならないことになり, 従ってこの行列式は電磁界理論における横共振式に等価なものとなる。

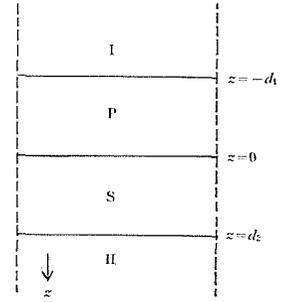


図2 弾性波増幅器

$$\bar{Y}_1(-d_1) = \bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0 \quad (39)$$

ここに  $\bar{Y}_1(-d_1)$  は  $z = -d_1$  から下方をみたアドミタンスであり

$$\bar{Y}_1(-d_1) = Y_I \quad (40)$$

$$Y_I = \omega \varepsilon_I / \kappa_I, \quad \kappa_I = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_I \mu_0 - \beta^2}$$

$\bar{Y}_1(-d_1)$  は  $z = -d_1$  から上方をみたアドミタンスで

$$\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D \quad (41)$$

$\Delta_N$ : 表1から第①行, 第①列を取り除いた行列式

$\Delta_D$ : 表1から第②行, 第①列を取り除いた行列式

と与えられる。(表2-(i)参照)

式(41)において  $\beta = \beta_0 - j\alpha$  ( $\beta_0 = \omega / V_S$ ,  $V_S$ :  $y$  方向位相速度) とおくことにより弾性波の増幅度  $\alpha$  を求めることができる。

結合型, 分離型表面波増幅器として, 表2-(ii)~(vii)の構造が考えられるが, いずれの場合も(i)と同様にして横共振式から容易に増幅度を計算することができ, 表2の右側の欄に解析方法を示す。

表 1 境界条件と境界条件に関する語彙

媒質	等方性媒質 I		圧電性媒質		半導体		等方性媒質 II														
	電磁波	弾性波	$A_P$	$B_P$	$A_S$	$B_S$	$A'_S$	$B'_S$	電磁波	弾性波											
境界条件	①	$B_I$	②	$B'_I$	③	$A_P$	④	$B_P$	⑤	$A_S$	⑥	$B_S$	⑦	$A'_S$	⑧	$B'_S$	⑨	$A_{II}$	⑩	$A'_{II}$	
	$E_y$ cont.	$e^{-j\kappa_1 d_1}$			$I_{\bar{E},P}(-d_1)$	$I_{\bar{E},P}(-d_1)$		$I_{\bar{E},P}(-d_1)$													
	$H_x$ cont.	$-Y_I e^{-j\kappa_1 d_1}$			$I_{\bar{H},P}(-d_1)$	$I_{\bar{H},P}(-d_1)$		$I_{\bar{H},P}(-d_1)$													
	$T_{zy}, T_{zz}$ cont.		$I_{\bar{T},I}(-d_1)$		$I_{\bar{T},P}(-d_1)$	$I_{\bar{T},P}(-d_1)$		$I_{\bar{T},P}(-d_1)$													
$u_y, u_z$ cont.			$I_{\bar{u},I}(-d_1)$		$I_{\bar{u},P}(-d_1)$	$I_{\bar{u},P}(-d_1)$		$I_{\bar{u},P}(-d_1)$													
$z=0$	$E_y$ cont.				$I_{\bar{E},P}(0)$	$I_{\bar{E},P}(0)$		$I_{\bar{E},P}(0)$		$I_{\bar{E},S}(0)$	$I_{\bar{E},S}(0)$		$I_{\bar{E},S}(0)$					$\{1\}$			
	$H_x$ cont.				$I_{\bar{H},P}(0)$	$I_{\bar{H},P}(0)$		$I_{\bar{H},P}(0)$		$I_{\bar{H},S}(0)$	$I_{\bar{H},S}(0)$		$I_{\bar{H},S}(0)$					$\{Y_{II}\}$			
	$T_{zy}, T_{zz}$ cont.				$I_{\bar{T},P}(0)$	$I_{\bar{T},P}(0)$		$I_{\bar{T},P}(0)$					$I_{\bar{T},S}(0)$							$\{I_{\bar{T},II}(0)\}$	
	$u_y, u_z$ cont.				$I_{\bar{u},P}(0)$	$I_{\bar{u},P}(0)$		$I_{\bar{u},P}(0)$					$I_{\bar{u},S}(0)$							$\{I_{\bar{u},II}(0)\}$	
$J_z$ zero									$I_{\bar{J},S}(0)$	$I_{\bar{J},S}(0)$		$I_{\bar{J},S}(0)$									
$z=d_2$	$E_y$ cont.				$I_{\bar{E},S}(d_2)$	$I_{\bar{E},S}(d_2)$		$I_{\bar{E},S}(d_2)$		$I_{\bar{E},S}(d_2)$	$I_{\bar{E},S}(d_2)$		$I_{\bar{E},S}(d_2)$					$e^{-j\kappa_1 d_2}$			
	$H_x$ cont.				$I_{\bar{H},S}(d_2)$	$I_{\bar{H},S}(d_2)$		$I_{\bar{H},S}(d_2)$		$I_{\bar{H},S}(d_2)$	$I_{\bar{H},S}(d_2)$		$I_{\bar{H},S}(d_2)$					$Y_{II} e^{-j\kappa_1 d_2}$			
	$T_{zy}, T_{zz}$ cont.				$I_{\bar{T},S}(d_2)$	$I_{\bar{T},S}(d_2)$		$I_{\bar{T},S}(d_2)$					$I_{\bar{T},S}(d_2)$							$I_{\bar{T},II}(d_2)$	
	$u_y, u_z$ cont.				$I_{\bar{u},S}(d_2)$	$I_{\bar{u},S}(d_2)$		$I_{\bar{u},S}(d_2)$					$I_{\bar{u},S}(d_2)$							$I_{\bar{u},II}(d_2)$	
$J_z$ zero									$I_{\bar{J},S}(d_2)$	$I_{\bar{J},S}(d_2)$		$I_{\bar{J},S}(d_2)$									

\* 圧電性媒質と等方性媒質 II の間に半導体がない場合には ( ) の部分を用いる。

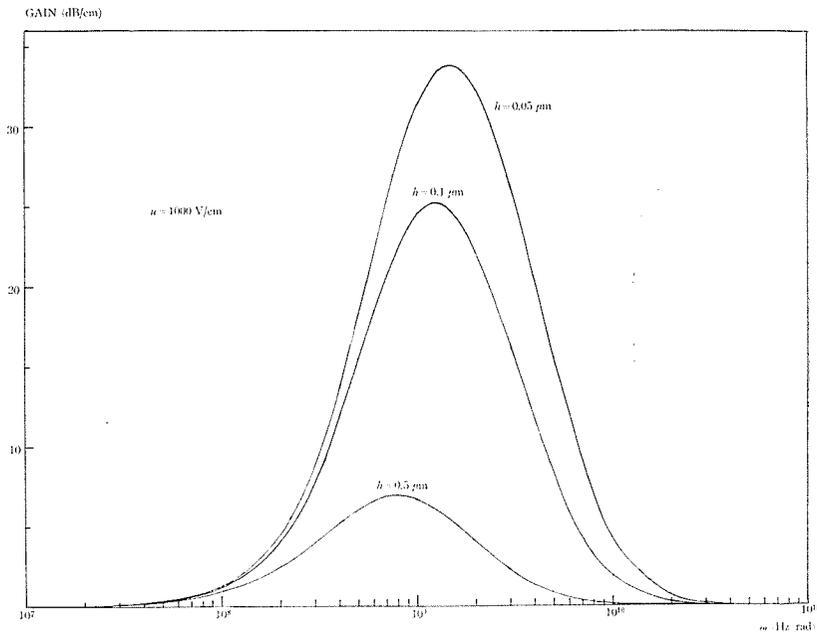


図 3-a. 弾性波増幅利得

- 半導体にかかる直流電圧  $u$  を一定にし、半導体と圧電媒質との間隔  $h$  をパラメータとした場合
- \* 半導体として Si, 圧電媒質として ZnO を用いた。

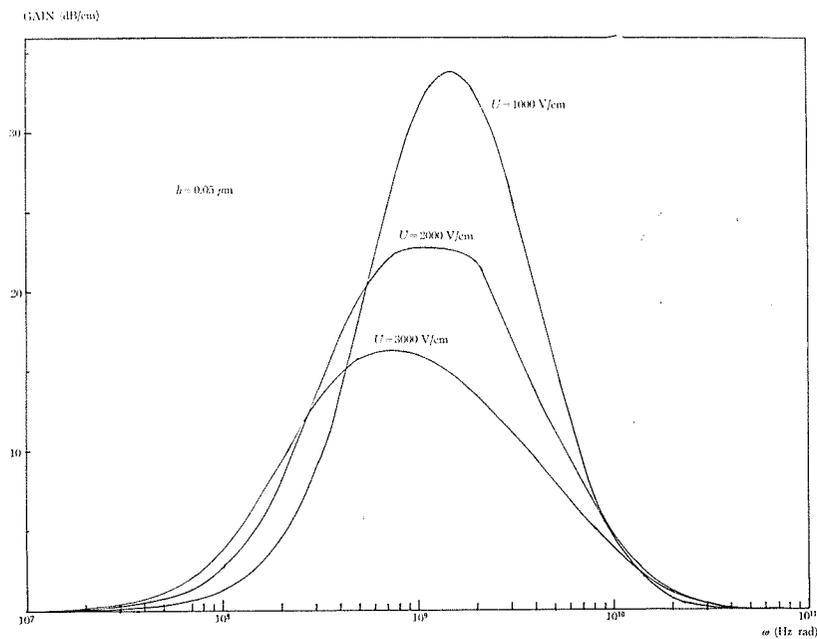


図 3-b. 弾性波増幅利得

- 間隔  $h$  を一定にし、半導体での直流電圧  $u$  をパラメータとした場合。
- \* 半導体—Si, 圧電媒質—ZnO。

表 2 弾性波増幅器の構造と横共振式

\* この表において、 $\Delta_N, \Delta_D$  は表 1 から、この表で指定された行と列を取り除くことによって得られる行列式であることを意味する。  
 A: 真空, I: 等方性媒質 I, II: 等方性媒質 II, P: 圧電性媒質, S: 半導体

結合型表面波増幅器

	$\bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \omega \varepsilon_I / \kappa_I$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{① 行, ① 列}$ $\Delta_D: \text{② 行, ① 列}$
	$\bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \omega \varepsilon_0 / \kappa_0$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{① ④ 行, ① ② 列}$ $\Delta_D: \text{② ④ 行, ① ② 列}$
	$\bar{Y}_1(d_2) + \bar{Y}_1(d_2) = 0$ $\bar{Y}_1(d_2) = \omega \varepsilon_0 / \kappa_0$ $\bar{Y}_1(d_2) = -\Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{⑩ ⑬ 行, ⑨ ⑩ 列}$ $\Delta_D: \text{⑪ ⑬ 行, ⑨ ⑩ 列}$
	$\bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \omega \varepsilon_0 / \kappa_0$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{① ④ ⑩~⑬ 行, ① ② ⑥ ⑧~⑩ 列}$ $\Delta_D: \text{② ④ ⑩~⑬ 行, ① ② ⑥ ⑧~⑩ 列}$
	$\bar{Y}_1(d_2) + \bar{Y}_1(d_2) = 0$ $\bar{Y}_1(d_2) = \omega \varepsilon_0 / \kappa_0$ $\bar{Y}_1(d_2) = -\Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{①~④ ⑩ ⑬ 行, ①~③ ⑨~⑩ 列}$ $\Delta_D: \text{①~④ ⑪ ⑬ 行, ①~③ ⑨~⑩ 列}$

分離型表面波増幅器

	$\bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0$ $\bar{Y}_1(-d_1): \text{文献 2)}$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{① ④ ⑨~⑬ 行, ① ② ⑤~⑧ 列}$ $\Delta_D: \text{② ④ ⑨~⑬ 行, ① ② ⑤~⑧ 列}$
	$\bar{Y}_1(-d_1) + \bar{Y}_1(-d_1) = 0$ $\bar{Y}_1(-d_1): \text{文献 2)}$ $\bar{Y}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D$ $\Delta_N: \text{① ④~⑬ 行, ① ② ④~⑩ 列}$ $\Delta_D: \text{③ ④~⑬ 行, ① ② ④~⑩ 列}$

ここでは、表 2-(vii) の場合について具体的に計算過程を述べる。

まず  $z = -d_1$  から上方をみたアドミタンスは表 1 より次のように求められる。

$z < -d_1$ ,  $z > -d_1$  の領域がそれぞれ真空、圧電媒質であること、更に  $z \rightarrow \infty$  での境界条件を考慮すると表 1 の ②, ④~⑩ 例が取り除かれることになり、又、 $z = -d_1$  での変位に対する境界条件、並びに  $z = 0$ ,  $d_2$  での境界条件は全て不要となることから表 1 の ④~⑩ 行が取り除かれることになる。従って  $\mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{A}_P$  が非自明な値をもつためには上記の操作で取り除かれずに残された要素からなる行列式が零とならなければならないことになり、結局  $\bar{\mathbf{Y}}_1(-d_1)$  は

$$\bar{\mathbf{Y}}_1(-d_1) = \Delta_N / \Delta_D \quad (42)$$

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{I,P}^+(-d_1) \\ \mathbf{L}_{T,P}^+(-d_1) \end{vmatrix}, \quad \Delta_D = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{V,P}^+(-d_1) \\ \mathbf{L}_{T,P}^+(-d_1) \end{vmatrix}$$

横磁界がかかっていない場合には、式 (35), (36) から

$$Y_S = \frac{\omega \varepsilon (1 + j\gamma \omega / \omega_c)}{\beta (\beta / j\gamma \varepsilon + \gamma \omega / \omega_c)} \quad (44)$$

$$\gamma = 1 - u / V_S$$

となり、Ingebrigtsen により求められた半導体の表面アドミタンス<sup>10)</sup>に一致する。

更に、 $z = -d_1$  から下方をみたアドミタンスは

$$\bar{\mathbf{Y}}_1(-d_1) = Y_0 \cdot (jY_0 - Y_S \tan \kappa_0 h) / (jY_S - Y_0 \tan \kappa_0 h)$$

$$Y_0 = \omega \varepsilon_0 / \kappa_0, \quad \kappa_0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2}, \quad h = |d_2 - d_1| \quad (45)$$

従って横共振式 (39) に式 (42), (45) を代入し、 $\beta = \beta_0 - j\alpha$  とおくことにより、この系の増幅度が求められることになる。

摂動法により近似的に数値計算した例を図 3-(a), (b) に示す。

## 6. む す び

以上、等価媒質パラメータによる解析法を興味ある圧電弾性波の増幅問題に適用した。前述のように系全体を等価媒質パラメータを用いて評価することができ、従って統一的に、且つ容易に解析を行うことができることになる。

本論文では圧電弾性波の増幅に関連して、圧電弾性波とドリフトキャリアのある半導体との相互作用について考察したが、電磁界と結合した種々の系に対して本論文の手法は極めて有効であると考えられる。

## 参 考 文 献

- 1) 松本, 鈴木: 可変パラメータ異方性媒質を含む導波管内の電磁界. 電子通信学会論文誌, **45-B**, 12, p. 1680 (昭 37-12).
- 2) 深井, 鈴木, 松本: 運動媒質, 圧縮性プラズマ及び半導体の等価媒質パラメータによる解析法. 電子通信学会論文誌, **52-B**, 2, p. 55 (昭 44-02).
- 3) 小柴, 鈴木: 圧電および磁気弾性波の等価媒質パラメータによる新しい取扱い. 電子通信学会論文誌, **58-B**, 1, p. 1 (昭 50-01).
- 4) A. Oliner: Microwave Network Methods for Guided Elastic Waves. IEEE Trans., **MTT-17**, 11, p. 812 (Nov. 1969).
- 5) 小柴, 榎戸, 鈴木: マイクロウェーブアクースティクス取扱いの公式化—異方性を考慮した層状媒質系について. 電子通信学会論文誌, **55-B**, 8, p. 456 (昭 47-08).

- 6) 足田, 小柴, 谷藤, 鈴木: 圧電弾性波の伝送路モデルによる取扱い. 電子通信学会論文誌, **56-B**, 2, p. 65 (昭 48-02).
- 7) B. A. Auld: *Acoustic Fields and Waves in Solids*. A Wiley-Inter Science ub. (1973).
- 8) K. M. Lakin and H. J. Shaw: Surface Wave Delay line Amplifier. *IEEE Trans.*, **MTT-17**, 11, p. 912 (Nov. 1969).
- 9) 佐々木, 中鉢, 菊池: 半導体, 圧電二重膜の弾性表面波増幅について. 電子通信学会, 超音波研究会資料, US72-5 (1972-05).
- 10) K. A. Ingebrigtsen: Linear and Nonlinear Attenuation of Acoustic Surface Waves in a Piezoelectric Coated with a Semiconducting Film. *J. Appl. phys.* **41**, 2, p. 454 (Feb. 1970).