HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	回転円板によって誘起される長い円筒内の流れ
Author(s)	有江, 幹男; 木谷, 勝; 田村, 尚敬 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 76, 31-42
Issue Date	1975-08-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41297
Type	departmental bulletin paper
File Information	76_31-42.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第76号（昭和50年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 76 (1975)

回転円板によって誘起される長い円筒内の流れ

有江幹男* 木谷 勝* 田村尚敬*
林 和夫** 佐藤方厚***

（昭和49年12月27日受理）

Axisymmetric Flow Induced in a Long Circular Cylinder by a Rotating Disk

Mikio ARIE Masaru KIYA Hisataka TAMURA
Kazuo HAYASHI Masahiro SATO

(Received December 27, 1974)

Abstract

Navier-Stokes equations are numerically solved for the axisymmetric flow in a long circular cylinder induced by a rotating disk at the top of the cylinder. The depth of the cylinder, in this case, is chosen to be five times of its radius. Reynolds number based on the angular velocity and the radius of the disk is varied from 1 to 700. In this range, two secondary vortices are formed in the cylinder. The height of the upper secondary vortex is about two and half times the radius of the cylinder. However, it remains constant for Reynolds numbers less than about a hundred. Flow patterns obtained numerically are found to coincide well with the experimental patterns which are made visible by means of aluminum flakes.

The experiment also shows that the lower secondary vortex is formed when the depth of the cylinder is more than two times of its radius. The velocity distribution in the cylinder is clarified in detail on the basis of the numerical results.

1. 緒 言

容器内で回転する円板によって誘起される流れは工学的に重要な意義をもっている。機械工学の立場からみれば，遠心羽根車とケーシングとの間の流れがこの範ちゅうに属するものであり羽根車の回転摩擦損失，羽根車に作用する軸推力の推定などの観点から活発な研究が行なわれている。このほかにも回転粘度計の特性解析，撹拌装置内の流れの解析などを挙げることができる。また，金属工学の分野では鋳塊の凝固過程において溶湯に撹拌を与えることによって凝固組織を改善する方法が考えられている。この方法の実現のために種々の方式が試みられているが[1]，その中の一つとして鋳型に流しこんだ溶湯の上部で耐火レンガ製の羽根状物体を回転させ，これによって生ずる旋回流および二次流れによって特に鋳物の外周部における有害な偏析を除去する

* 流体工学第一講座
** 東 芝
*** 東洋サッシ

方法が考えられる。このような攪拌凝固の効果的な実施のためには，回転物体によって溶湯内に生ずる流れの特性を明らかにしておく必要がある。

本論文はこの目的に対する基礎資料を得るために，回転円板によって誘起される長い円筒内の流れに対する解析および実験を行なった結果について報告するものである。流れのパターンは流体の動粘性係数に依存するから，鋳型内の流れに対する模型実験を行なうためには溶湯鋳鋼の動粘性係数の値が必要である。動粘性係数は溶湯温度，炭素含有量などによって異るとともに測定が困難なため，各研究者による数値にはかなりの差違が認められるが，Fe-0.75C 鋳鋼については 1480～1600°C で粘性係数 $\mu=(0.612\sim0.715)\times10^{-2}$ kg·sec/m^2，比重量 $\gamma=(6.5\sim7.0)\times10^3$ kg/m^3 なる値が得られている。したがって，この場合の溶湯の動粘性係数 ν は常温常圧における空気のそれと同一のオーダーである。いま一つの例として，鋳型の直径を $d=50$ cm，攪拌子の回転数 $n=136$ rpm とすれば，$Re=\omega(d/2)^2/\nu$ ($\omega=2\pi n/60$) で定義される Reynolds 数は約 9×10^4 となる。円筒内における流れの遷移 Re 数は明確にされていないが，回転円板上の境界層に対する遷移 Re 数が 3×10^5 であることから推測すると，鋳型内における溶湯の流れは層流から乱流までの範囲を含んでいるものと考えなければならない。

しかし，現象の解明のためには，層流状態の流れから取扱いを始める方が合理的である。層流の方が流れの構造が簡単で理論的に取扱いやすく，しかも層流のフローパターンは乱流の場合の平均的フローパターンと類似の傾向を示すものと期待されるからである。したがって，本論文においては現象の把握のためにまず定常な層流を対象とする。

この分野に関連する従来の研究はほとんどすべて円筒と円板の間隙および円筒底面と円板との間隙が円板半径に比較して小さい場合を対象としており，境界層理論に基づく解析が中心である。これに対し攪拌凝固のような問題では，回転円板は長い円筒の上部で回転すると共に，円筒内のフローパターンの把握が重要となるため境界層理論による取扱いは適当でない。流れに関するこのような知識は境界層理論からは得られず，Navier-Stokes 方程式を直接解くことによって求めなければならない。そのためこの方面の研究は少なく Pao[2),3)] によって行なわれた円筒深さと円板半径の比が 1 の場合に対する解析をみるにすぎない。

本論文では上記の比が 5 の場合に対する Navier-Stokes 方程式の数値解を求め，円筒内の速度分布，二次流れ渦の形状，渦内の循環流量などを明らかにした。また，二次流れ渦については流れの可視化法を用いた実験結果との比較を行なってある。

2. 基礎方程式および境界条件

図 1 に示すように円板中心を原点とする円柱極座標 (r, θ, z) をとり，半径方向に r 軸，円板から垂直に流体側に向かって z 軸をとる。r, θ, z 方向の速度成分をそれぞれ u, v, w，流体の密度を ρ，動粘性係数を ν，円板の半径を b，円筒の深さを H，円板の回転角速度を ω とする。ただし，速度成分は円板の外周速度 ωb により，また r, z は b により無次元化されているものとする。したがって λ を定数として $H=\lambda b$ と書くことができる。また円板の半径と円筒の半径は等しいものとする。これは実際には両者の間隙がきわめて小さい場合に相当している。

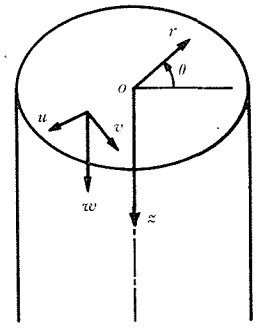


Fig. 1. Definition sketch and coordinate system.

回転円板によって誘起される円筒内の流れは非圧縮性で z 軸に関し回転対称であると仮定すれば，連続の方程式は次式で

定義される流れ関数 ψ を導入することによって自動的に満足される：

$$\partial\psi/\partial z = ru\,, \qquad \partial\psi/\partial r = -rw \tag{1}$$

rz-平面内の二次流れの渦度を ζ とすれば

$$\zeta = (\partial u/\partial z) - (\partial w/\partial r) \tag{2}$$

であって，ζ と ψ の間には

$$\Delta\psi - (2/r)(\partial\psi/\partial r) - r\zeta = 0 \tag{3}$$

の関係がある。ここに $\Delta = (\partial^2/\partial r^2) + (r^{-1}\partial/\partial r) + (\partial^2/\partial z^2)$ である。Navier-Stokes 方程式の r および z 方向成分から圧力項を消去すれば，渦度輸送方程式

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\zeta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right) = \frac{1}{Re}\left(\Delta\zeta - \frac{1}{r^2}\zeta\right) \tag{4}$$

が得られる。ただし，Γ は半径の位置における循環の $(2\pi)^{-1}$ 倍，Re は Reynolds 数であって，それぞれ

$$\Gamma = vr\,; \qquad Re = \omega b^2/\nu \tag{5), (6}$$

によって定義されるものである。Γ を用いると Navier-Stokes 方程式の θ 方向成分は

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Gamma}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\right) = \frac{1}{Re}\left(\Delta\Gamma - \frac{2}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right) \tag{7}$$

となる。式 (3), (4) および (7) が円筒内の流れを記述する基礎方程式を構成する。

境界条件としては固体壁と流体との間にすべりがないことおよび z 軸に関する流れの軸対称性を採用すればよい。これらの条件を具体的に書けば次のようになる。

$$r = 0, \quad z \geqslant 0: \quad \psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \zeta = 0 \tag{8}$$

$$r = 1, \quad z \geqslant 0: \quad (1/r)(\partial\psi/\partial z) = 0, \quad (1/r)(\partial\psi/\partial r) = 0, \quad \Gamma = 0 \tag{9}$$

$$z = 0, \quad 0 \leqslant r < 1: \quad (1/r)(\partial\psi/\partial z) = 0, \quad (1/r)(\partial\psi/\partial r) = 0, \quad \Gamma = r^2 \tag{10}$$

$$z = \lambda, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1: \quad (1/r)(\partial\psi/\partial z) = 0, \quad (1/r)(\partial\psi/\partial r) = 0, \quad \Gamma = 0 \tag{11}$$

3. 階差方程式

方程式 (3), (4) および (7) を数値的に解くための階差方程式を求める。本解析では近似精度の良好な中心階差法を採用する。流れの場を図2に示すように r および z 方向に分割し，その間隙を両方向ともに h とする。このことは流れの領域内を正方形の格子点に分割したことを意味する。このような分割方法では分割数が十分に大きくない限り，流れの変化が急激な領域，特に Re 数が大きいときの円板の表面近くで精度の減少する可能性がある。このような誤差を減少させるために，流れの変化の急激な領域をより細く分割する方法がよく用いられている。しかし，本解析の主目的は円筒内のフローパターンの把握にあり，流れの変化の大きな回転円板近傍の流れがとりたてて重要なわけではない。そのため特に円板近傍の格子間隙を減少させる方法はとらず，流れの場全体にわたって等間隙格子点を採用した。図2に示すように，r 方向に i 番目，z 方向に j 番目の格子点における流れの変数に添

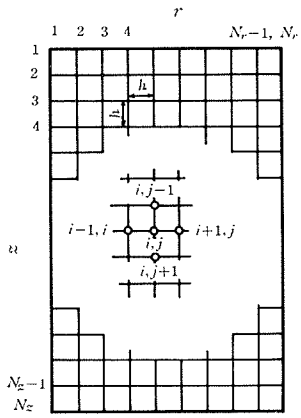


Fig. 2. Grid system for finite-difference equations.

字 (i, j) を付して表示すれば，式(3), (4), (7)に対応する階差方程式は次のようになる。

$$\psi_{i,j}=\frac{1}{4}(\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1})-\frac{1}{8i}(2h^3i^3\zeta_{i,j}+\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{i,j}=&\left\{1+\frac{1}{4i^2}+(\psi_{i,j-1}-\psi_{i,j+1})\frac{Re}{8hi^2}\right\}^{-1}\left[\frac{1}{4}(\zeta_{i+1,j}+\zeta_{i-1,j}+\zeta_{i,j+1}+\zeta_{i,j-1})\right.\\&-\frac{Re}{16hi}\left\{\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}-\frac{2h}{Re}\right)(\zeta_{i+1,j}-\zeta_{i-1,j})\right.\\&\left.\left.-(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1}-\zeta_{i,j-1})-\frac{4}{hi^2}\Gamma_{i,j}(\Gamma_{i,j+1}-\Gamma_{i,j-1})\right\}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,j}=&\frac{1}{4}(\Gamma_{i+1,j}+\Gamma_{i-1,j}+\Gamma_{i,j+1}+\Gamma_{i,j-1})-\frac{Re}{16hi}\left\{\left(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{2h}{Re}\right)(\Gamma_{i+1,j}-\Gamma_{i-1,j})-(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})(\Gamma_{i,j+1}-\Gamma_{i,j-1})\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

次に，境界条件(8)～(11)に対する階差形を求める。円筒側壁に対する r 方向格子番号を N_r，円筒底部に対する z 方向格子番号を N_z とすれば，式(8)は

$$\psi_{1,j}=0,\quad \Gamma_{1,j}=0,\quad \zeta_{1,j}=0\qquad (j=1, 2, \cdots, N_z) \tag{15}$$

となる。また式(9)の第1，第3および式(10), (11)の第2，第3の条件はそれぞれ

$$\begin{aligned}&\psi_{N_r,j}=0,\quad \Gamma_{N_r,j}=0;\quad \psi_{i,1}=0,\quad \Gamma_{i,1}=(i-1)^2h^2;\\&\psi_{i,N_z}=0,\quad \Gamma_{i,N_z}=0\qquad (i=1, 2, \cdots, N_r;\ j=1, 2, \cdots, N_z)\end{aligned} \tag{16), (17), (18}$$

となる。式(9)～(11)の中で ψ の壁面に垂直方向の微分係数に対する条件は，壁面での渦度の値を与える。例として円筒底部壁における渦度について説明する。底部においては u, w はともに0であるから，式(2)の中で $\partial w/\partial r=0$ である。したがって，底部における渦度 ζ_W は

$$\zeta_W=(\partial u/\partial z)_W=(r^{-1}\partial^2\psi/\partial z^2)_W \tag{19}$$

となる。W に最も近い z 方向の格子点を P とすれば，ψ_P は次の Taylor 級数で表わすことができる。

$$\psi_P=\psi_W-h(\partial\psi/\partial z)_W+(h^2/2)(\partial^2\psi/\partial z^2)_W+0(h^3)$$

$\psi_W=0$, $(\partial\psi/\partial z)_W=0$ であるから，これより $(\partial^2\psi/\partial z^2)_W=2\psi_P/h^2$ となる。これを式(19)に代入すれば

$$\zeta_W=2\psi_P/(h^2r) \tag{20}$$

すなわち

$$\zeta_{i,N_z}=2\psi_{i,N_z-1}/\{h^3(i-1)\}\qquad (i=2, 3, \cdots, N_r) \tag{21}$$

となる。同様に，円板表面および円筒側壁における渦度の値は次式によって計算することができる。

$$\begin{aligned}&\zeta_{i,1}=2\psi_{i,2}/\{h^3(i-1)\};\quad \zeta_{N_r,j}=2\psi_{N_r-1,j}/h^2\\&(i=2, 3, \cdots, N_r;\quad j=1, 2, \cdots, N_z)\end{aligned} \tag{22), (23}$$

以上で円筒内の流れを計算するための階差方程式および境界条件がすべて整ったことになる。適当な初期値を各格子点に与えて計算を反復させ，$(n-1)$ 回の反復計算によって得られた各格子点における近似解を $\psi^{(n-1)}$, $\Gamma^{(n-1)}$, $\zeta^{(n-1)}$ とすれば，第 n 次近似解は

$$\begin{aligned}&\psi^{(n)}=\psi^{(n-1)}+\beta\{\psi^{(n)*}-\psi^{(n-1)}\};\quad \Gamma^{(n)}=\Gamma^{(n-1)}+\alpha\{\Gamma^{(n)*}-\Gamma^{(n-1)}\};\\&\zeta^{(n)}=\zeta^{(n-1)}+\alpha\{\zeta^{(n)*}-\zeta^{(n-1)}\}\end{aligned}$$

となる。ここに $\psi^{(n)*}$, $\Gamma^{(n)*}$, $\zeta^{(n)*}$ は第 $(n-1)$ 次近似解を式(12)～(14)の右辺に代入して得られる ψ, Γ および ζ の値を意味する。また，α, β は緩和係数である。ε を適当に指定した小さな正数としてすべての格子点において

$$\mathrm{Max}\left\{\left|\frac{\psi^{(n)*}-\psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)*}}\right|,\ \left|\frac{\Gamma^{(n)*}-\Gamma^{(n-1)}}{\Gamma^{(n)*}}\right|,\ \left|\frac{\zeta^{(n)*}-\zeta^{(n-1)}}{\zeta^{(n)*}}\right|\right\}\leqslant\varepsilon$$

の条件が満足されるまでこの遂次計算を続行すればよい。

4. 計算結果および考察

数値計算は半径の5倍の深さをもつ円筒 ($\lambda=5$) について行なった。半径方向を20等分，z 方向を100等分し格子間隙を $h=0.05$ としてある。Re 数は表1に示す範囲で変化させた。表1には計算に用いた緩和係数の値をあわせて示してある。計算は表1に示す順序に $Re=1$ から始めて次第に大きな Re 数の場合に進めた。$Re=1$ の計算に対する初期値としては，円筒内の流体が円板の角速度に等しい一様な角速度で回転しているものとして，

$$\zeta_{i,j}^{(0)}=0,\quad \psi_{i,j}^{(0)}=0,\quad \Gamma_{i,j}^{(0)}=h^2(i-1)^2$$

とした。より高い Re 数の場合については最も近い Re 数の既知解を初期値として採用した。なお収束判定規準は $\varepsilon=10^{-4}$ である。

Table 1. Relaxation parameters employed in the numerical calculations.

Re	α	β
1	0.8	1.2
10	0.8	1.2
100	0.8	1.2
300	0.8	1.2
500	0.9	1.1
700	0.6	1.0

数値計算は $Re=1$～700 の範囲について行なったが，Re が700を超えると解の収束はきわ

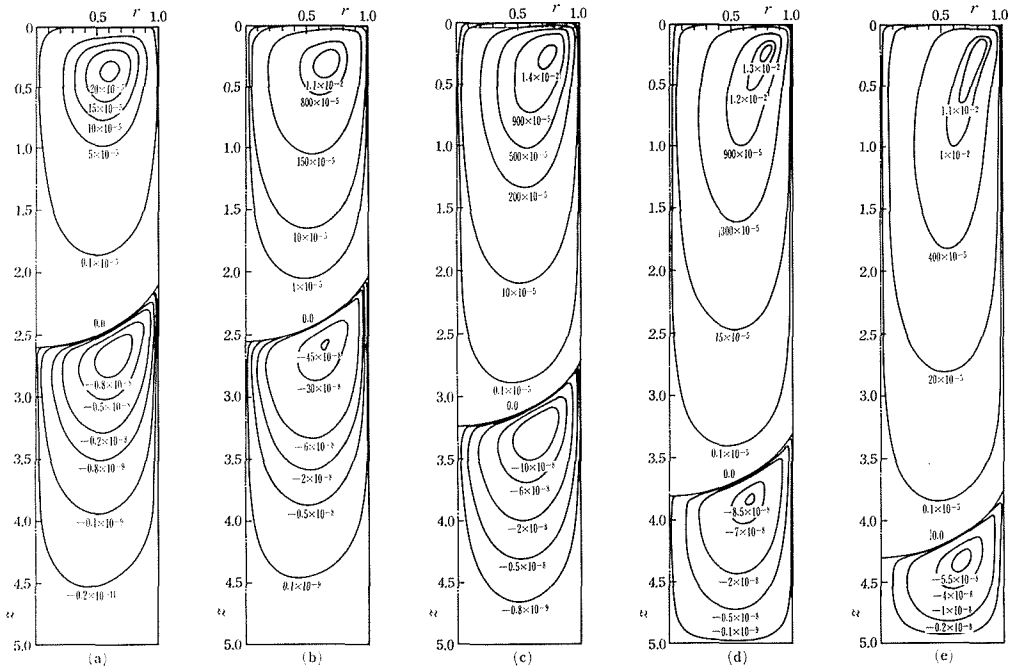


Fig. 3. Secondary flow patterns in the rz-plane ($\lambda=5$).
(a) $Re=1$, (b) $Re=100$, (c) $Re=300$, (d) $Re=500$, (e) $Re=700$.

めて遅くなる。

図3に5種類の Re 数に対する rz 平面内の二次流れのパターンを示してある。二次流れ渦は上下に2個形成され互に反対方向に回転している。また上部渦の長さは $Re=100$ までは Re 数によってほとんど変化しないが，Re が 100 以上になると急激にその長さを増し，下部渦は円筒底部に押しつけられるようになる。このような Re 数による下部渦の長さの変化を明瞭にするために，円筒壁上における上部渦の長さ（$\zeta=0$ の点までの深さ）l と Re 数との関係を示せば図4

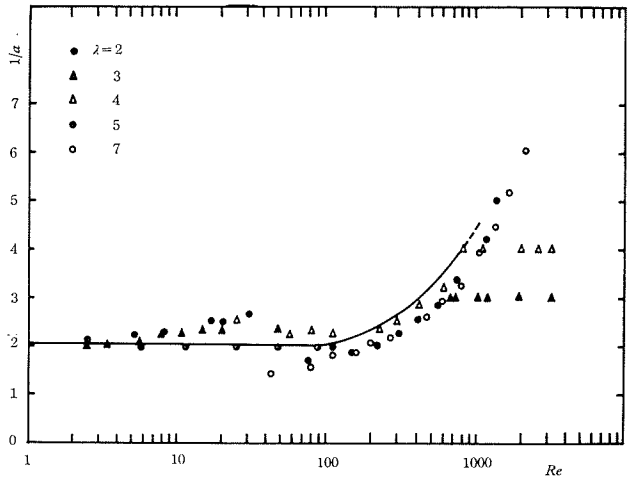


Fig. 4.　Variation of the height of the upper vortex with respect to Reynolds number.

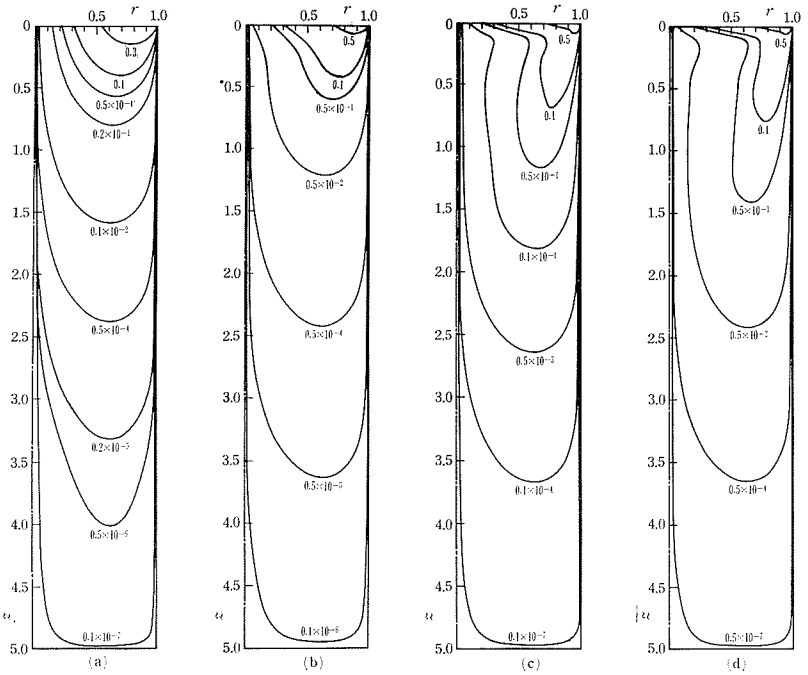


Fig. 5.　Lines of constant circulation ($\lambda=5$).
(a) $Re=1$,　(b) $Re=100$,　(c) $Re=500$,　(d) $Re=700$.

のようになる。$Re=100$ までは $l=0.2$ でほとんど一定であるが，Re 数が 100 をこえると l は急激に増大し，層流状態が維持され続けるものとすれば $Re \fallingdotseq 10^3$ 程度の Re 数において上部渦が円筒底部に達すると予想される。

図5は Γ =一定の曲線を示す。$Re=1$ および 100 に対する Γ の分布にはさしたる変化は認められないが，$Re \geqslant 100$ では Re 数の増加によって円筒のより深部での Γ が増加することがわかる。これは Re 数の増加とともに，より深部における旋回速度成分 v が増加することを意味する。

Re 数が小さく流れの慣性力が粘性力に比較して無視しうるときは，円筒内の流れは Stokes 方程式によって記述することができる。Pao[3] によれば，Γ に対する Stokes 方程式の解は

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2rJ_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \sinh(\alpha_n \lambda) J_0(\alpha_n)} \sinh \alpha_n (z-\lambda) \tag{24}$$

で与えられる。ここに，α_n は Bessel 関数 J_1 の n 番目の正根である。特に $\lambda \to \infty$ のとき式(24)は

$$\Gamma = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2rJ_1(\alpha_n r)}{J_0(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n z) \tag{25}$$

となる。式(24)および(25)によって与えられる Γ の分布は $z<1$ の範囲においてほとんど差違を生じない。Stokes 方程式によって記述される流れの特徴の一つは，フローパターンが Re 数によらず一定の形状をとる点にある。したがって，本計算において $Re<100$ での円筒内のフローパターンが Re 数によってほとんど変化しないことは，この範囲内の流れが Stokes 流れとして取扱いうることを意味している。

rz 平面内における二次流れの無次元循環流量 Q は

$$dQ = 2\pi r(udz - wdr) = 2\pi d\psi$$

で与えられる。したがって，上部渦および下部渦内の循環流量を Q_1, Q_2 とすれば

$$Q_1 = 2\pi|\psi_1|_{\max}, \quad Q_2 = 2\pi|\psi_2|_{\max}$$

となる。ここに，$|\psi_1|_{\max}$, $|\psi_2|_{\max}$ はそれぞれ上部渦および下部渦における流れ関数の最大値を意味する。$Q_1/(2\pi)$, $Q_2/(2\pi)$ と Re 数との関係を図6に示してある。同図にはあわせて Pao による $\lambda=1$ の場合の結果を示してあるが，λ の値の大きな差違にもかかわらず，両者がほぼ同一の値を示すことは注目に値する。Pao の計算では，$Q_1/(2\pi)$ と Re の間に両対数グラフ上で直線関係が成立するのは $Re<10$ の範囲であるが，本計算の場合この範囲が $Re=100$ 程度まで拡大されている。また下部渦の循環流量 Q_2 は Q_1 に比較すると 10^{-3} 程度以下の大きさにすぎない。Re 数が 100 をこえると Q_2 が急

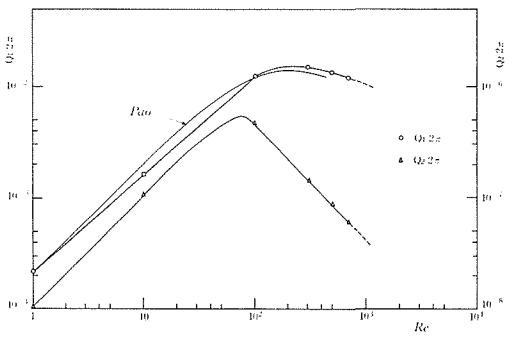


Fig. 6. Circulating secondary-flow rates in the upper and lower vortices ($\lambda=5$).

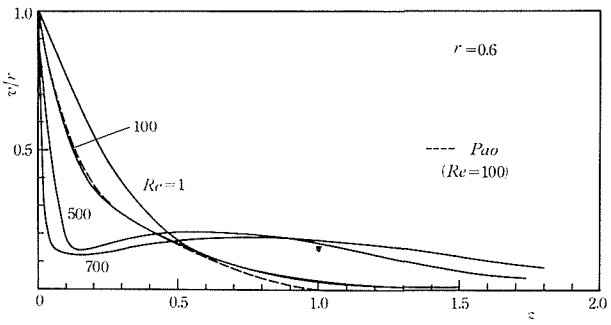


Fig. 7. Variation of the tangential velocity component at $r=0.6$ in the z-direction.

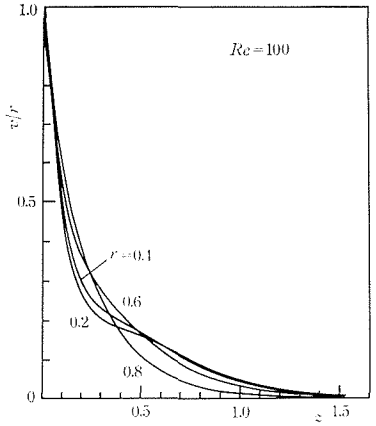


Fig. 8. Variation of the tangential velocity component at a few radial positions in the z-direction ($Re=100$).

激に減少することは，$Re>100$ の範囲における下部渦の大きさの減少に対応している。なお，Q_1 が $Re>100$ でほぼ一定となることは，上部渦内の循環流量が円板の角速度 ω に比例することを意味している。

次に円筒内の速度分布を示す。図7は $r=0.6$ の位置における周方向速度成分の z 方向の変化を v/r の形で示したものである。パラメタは Re 数であって，あわせて $\lambda=1$ の場合の計算結果も示してある。$z<0.5$ の範囲における速度分布は $\lambda=1$, 5 の場合についてほとんど変化していない。また，Re 数の増加とともにより深部における周方向速度成分が増加する。また，図8にはいくつかの半径位置における周方向速度成分の方向への減衰過程を $Re=100$ の場合について示してある。

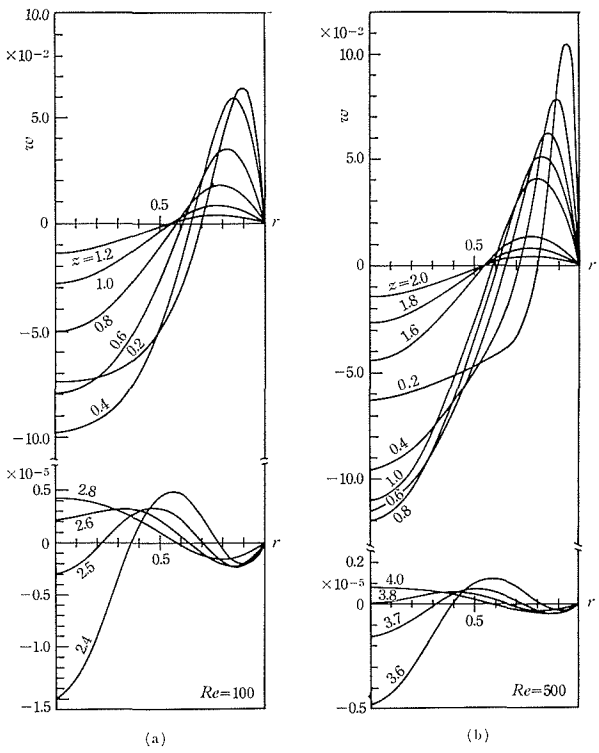


Fig. 9. Distribution of the axial velocity component in the upper and lower vortices.
(a) $Re=100$, (b) $Re=500$.

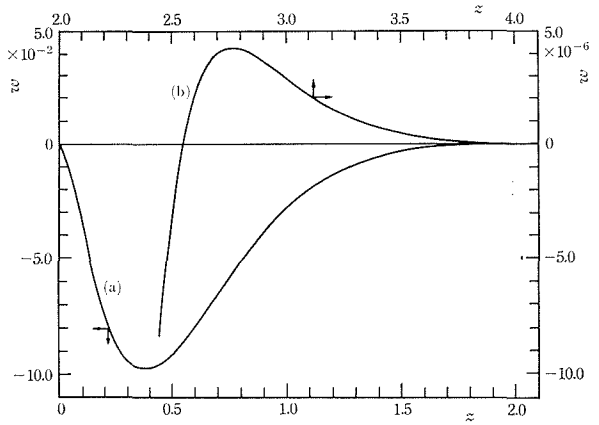


Fig. 10. Variation of the axial velocity component along the center-line in the z-direction ($Re=100$).
(a) upper vortex, (b) lower vortex.

図9は $Re=100$ および 500 に対する上部渦および下部渦内の z 方向速度成分を示す。下部渦内の w は上部渦のそれの 10^{-3} 以下にすぎない。図10には円筒の中心軸上における w の深さによる変化を示してある。

図11は $Re=100, 500$ に対する半径方向速度成分の変化を示す。高い方の Re 数においては，

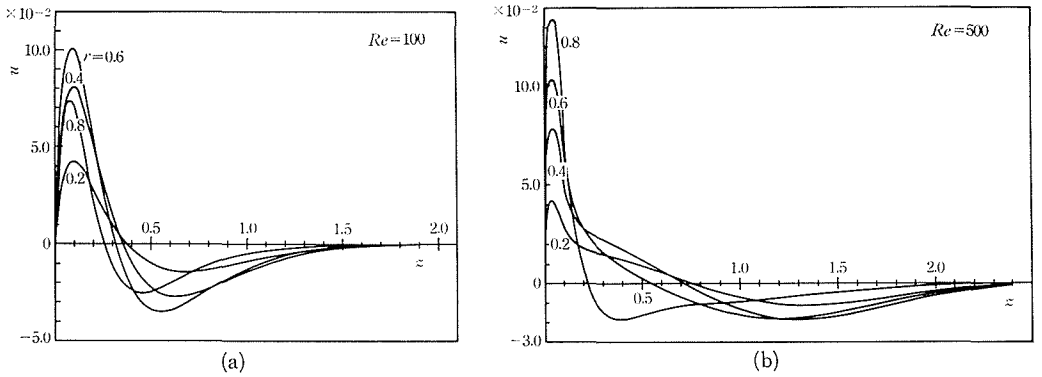


Fig. 11. Distribution of the radial velocity component. (a) $Re=100$, (b) $Re=100$.

u は円板端部の周速度の 10^{-2} 程度の大きさである。なお，以上の速度分布から，Re 数の高い場合における円板近傍および円筒壁近傍には，境界層の存在が明瞭に認められることを指摘しておく。

流体の密度を ρ として，$\frac{1}{2}\rho(\omega b)^2$ を用いて無次元化した回転円板上の θ 方向のせん断応力を τ，$\frac{1}{2}\rho(\omega b)^2 b^3$ を用いて無次元化した回転円板のトルクを C_M とすれば

$$C_M = 2\pi\int_0^1 \tau r^2\, dr \tag{26}$$

である。式(26)の積分を実行するにあたって，円板の端部 ($r=1$) の取扱いが問題となる。流れの場の計算においては端部は直接階差式の中に現われないので問題はないが，この点は流れの特異点であり $\tau = 2Re^{-1}(\partial v/\partial z)_{r=1}$ は無限大となる。いま，端部近傍における v に関する境界層の厚さを δ とすれば，$(1/r)\,\partial v/\partial z \sim \omega/\delta$ であるから，端部近傍で δ が一定であるものと仮定すれば，端部における τ の値はこれより1つだけ内側の格子点での $(1/r)\,\partial v/\partial z$ の値を用いて評価することができる。すなわち

$$C_M = \frac{4\pi}{Re}\left\{\frac{d}{dz}\int_0^{1-h} vr^2\, dr + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{r=1-h}\int_{1-h}^1 r^3\, dr\right\} \tag{27}$$

このようにして計算された $C_M \sim Re$ の関係を $\lambda=1$ に対する Pao の結果とともに図12に示してある。式(24), (25)に関連して述べたように，低 Re 数の範囲においては，$z<1$ のフローパターンは $\lambda=1, 5$ についてほぼ同一であるから，C_M の値は両者同一となるはずである。図12に見られる両者の差違は数値計算における格子間隙の差違に基づくものであり，どちらかといえば Pao の結果の方が正確であろう。

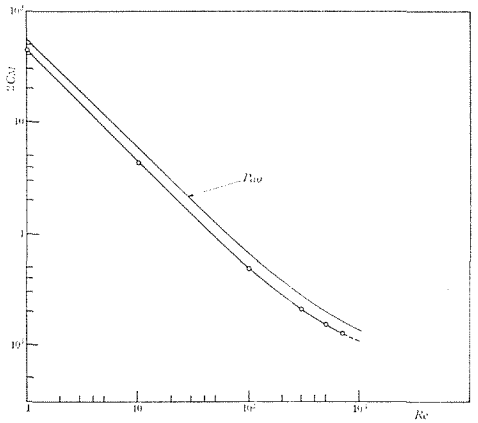


Fig. 12. Variation of the moment coefficient of the disk with respect to Reynolds number.

5. 実　　験

円筒容器内に誘起される二次流れのパターンに関する可視化実験を行ない，先に求められた計算結果との対比を行なう。今回の実験では速度分布，円板のトルクなどの測定は実施していない。

5.1　実験装置および実験方法　実験装置の概略を図13に示してある。本装置の主要部分は，ガラス製の供試円筒，回転円板，円板を回転させるための変速モータおよび供試円筒内の流体温度を一定に保ちかつ円筒によるレンズ効果を除去するための恒温水槽より構成されている。供試円筒の内径は94 mmで，回転円板の直径は円筒内で円滑に回転しうる範囲内でできるだけ円筒のそれに近づけてある。λの値は円筒の深さを変えることによって変化させた。

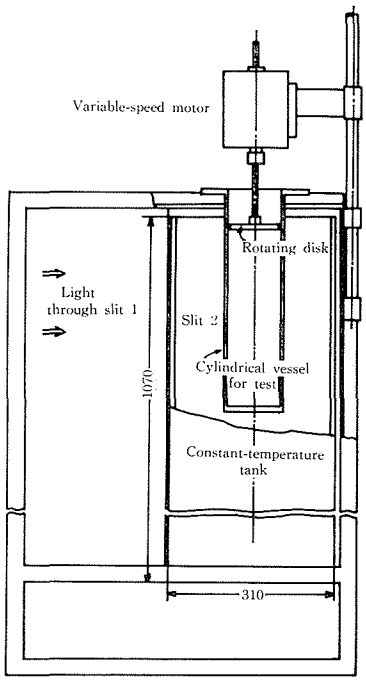


Fig. 13. Experimental apparatus.

供試液体としては，Re数の範囲に応じてそれぞれひまし油，工業用潤滑油および水を使用した。前二者の動粘性係数はウベローデ粘度計によって測定し，水の動粘性係数は機械工学便覧に記載のものを採用した。この結果$Re=2\sim3\times10^5$の範囲にわたるRe数を得ることができた。

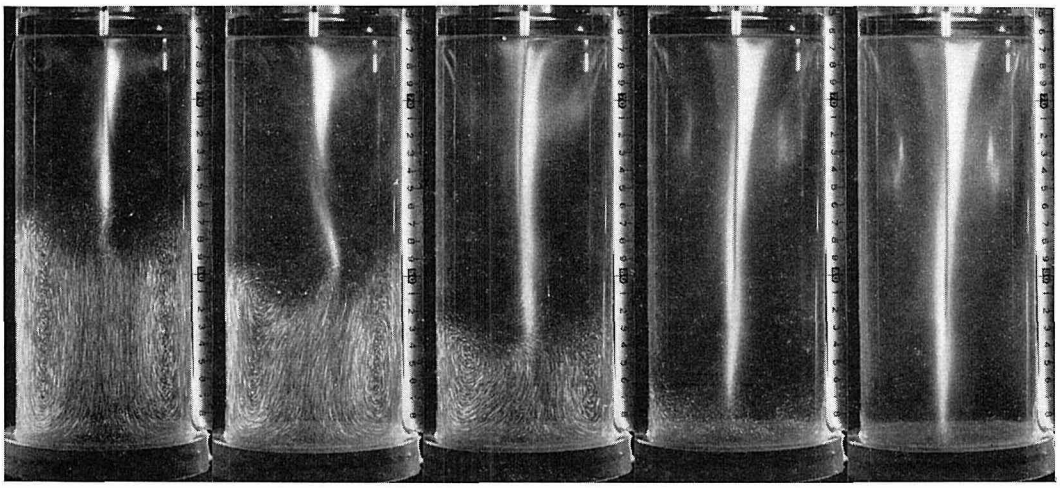
二次流れの観察は，液体中にアルミニウム粉末を懸濁させ，これを2枚のスリットを通した光源によって照射することによって行なった。光膜は供試円筒の中心軸を通るように調整されており，第1および第2スリットの幅はそれぞれ10 mm，4 mmである。

円筒内流体と冷却用水槽の温度が異ると，円筒内に自然対流による流れが誘起されるので，これを回転円板による二次流れと混同する可能性がある。そのため円筒および冷却水槽内に供試液体および水を満たした後，2～3時間放置し，両者の温度が等しいことを確認したのち実験を開始した。なお，円板の回転数は光電管を用いた非接触型の回転数測定器によって測定した。

5.2　実験結果および考察　数値計算の場合と同一のλをもつ円筒について得られた二次流れのパターンを，Re数をパラメタとして図14に示してある。数値計算で得られたフローパターンと同様に，円筒内には2個の二次流れ渦が形成されている。これらの写真から明らかなように，流れは完全には軸対称ではないが，そのずれは比較的小さく，十分軸対称流と考えることが許される程度のものである。

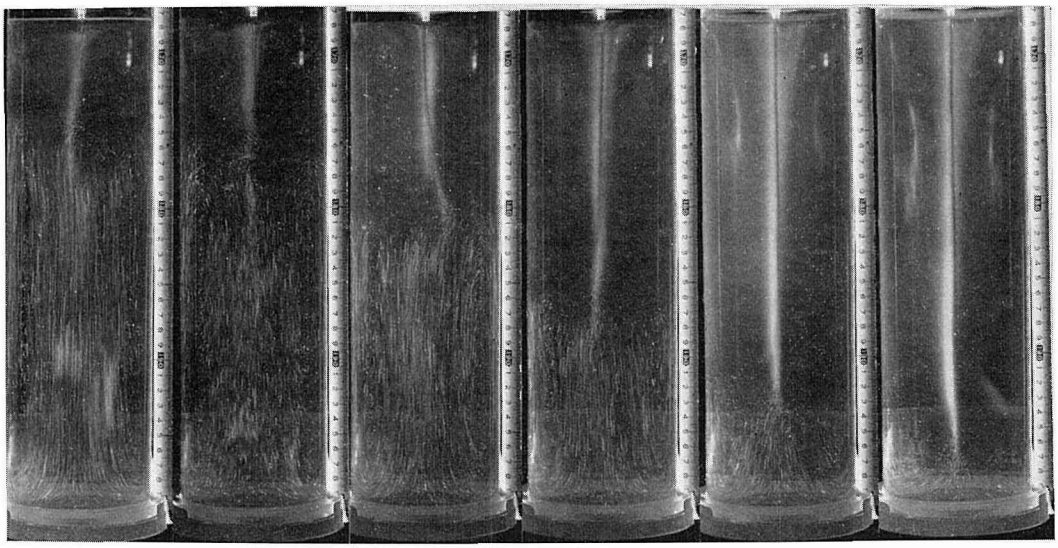
$Re=100$程度までは二つの渦はほぼ同じ大きさであるが，Re数が100をこえて増加すると下部渦が急速に小さくなり，$Re=1170$においては円筒底部にわずかの痕跡を残すだけとなる。$Re=1320$においては下部渦は完全に消滅している。この傾向は数値計算結果とよく一致する。この点をより明確にするために，円筒壁の位置での上部渦の深さlを測定し，計算結果と比較したものが図4である。流れの写真から上部渦の深さを決定するにはかなりの不確実さを伴うが，この点を考慮しても理論と実験との一致は良好であるといってよい。なお，図4にはあわせて$\lambda=5$以外の場合の上部渦の長さを示してある。

本実験における最大のλの値は図15に示す$\lambda=7$であるが，このときでも2個の渦が形成



$Re=223$ 413 760 1170 1400

Fig. 14. Secondary-flow patterns for $\lambda=5$.



$Re=44.4$ 112 479 1090 1680 2150

Fig. 15. Secondary-flow patterns for $\lambda=7$.

されるだけで第3の渦は生じない。ただし，さらに深い円筒の場合には第3，第4の渦が形成される可能性はある。

$\lambda=2$ の円筒では常に1個の二次渦しか存在しないが，$\lambda=3$ の円筒では低い方の Re 数範囲において2個の渦が現われる。これは $\lambda=5$ の円筒について図4および15に示したように，低 Re 数における上部渦の深さが半径のほぼ2倍であることに対応している。したがって，下部渦が現われる限界の深さは $2<\lambda<3$ の間に存在することになる。

6. 結 論

本論文では回軸円板によって誘起される長い円筒内の流れについて，理論ならびに実験的研究を行なった結果について述べた。本論文で得られた主な結果を要約すれば次の通りである。

(1) 軸対称流に対する Navier-Stokes 方程式を中心階差を用いた差分方程式に変換し，Re 数 $Re=\omega b^2/\nu$ (ω：円板の角速度，b：円板半径，ν：動粘性係数) が 1～700 の範囲に対する数値解を求めた。ただし，円筒深さと直径の比 λ を 5 としてある。$Re>700$ においては解の収束がきわめて遅くなることが見出された 。

(2) $\lambda=5$ の場合，上下二つの二次流れ渦が形成される。$Re\leqslant 100$ においては，上部渦の深さは円筒直径の約 2 倍でほぼ一定であるが，Re 数が 100 をこえると急激に成長し，$Re\fallingdotseq 10^3$ において円筒底部に達する。 Re 数の増加に伴うこのような二次流れ渦の変化は実験によっても確認できた。

(3) 流れの可視化法を用いた実験により，$\lambda=2$ の円筒では $R<100$ の Re 数においてただ 1 個の二次流れ渦が存在するだけであるが，$\lambda=3$ の円筒では 2 個の渦が存在する。結論 (2) との関連から，第 2 の渦が現われる λ の範囲は $2<\lambda<3$ となる。

(4) 下部渦内の循環速度は上部渦のそれの 10^{-3}～10^{-4} 倍程度である。したがって，下部渦の存在する領域では流体の移動はきわめて小さい。円筒上部での回転円板による円筒内の撹拌が効果的となるのは，二次流れ渦がただ 1 個となるような Re 数範囲に限られる。

本研究の実施にあたり，実験装置の製作に援助を受けた山崎輝夫，山保敏幸両技官に謝意を表する。

文 献

1) 萩原，高橋： 日本金属学会誌，**29-6**，637 (1965).
2) Pao, H. -P.: J. Appl. Mech., **37-2**, 480 (1970).
3) Pao, H. -P.: Phys. Fluids, **15-1**, 4 (1972).